

На правах рукописи

Рыхлов Виктор Сергеевич

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ**

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Саратов — 2025

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и математической экономики ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Научный консультант: **Хромов Август Петрович**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных
уравнений и математической экономики
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского»,

Официальные оппоненты: **Ломов Игорь Сергеевич**
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры общей математики
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»,
(специальность 01.01.02)

Половинкин Игорь Петрович
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математического и
прикладного анализа ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный университет»,
(специальность 01.01.02)

Закора Дмитрий Александрович
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математического анализа
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет
имени В. И. Вернадского», (специальность 01.01.02)

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Северо-Осетинский государственный
университет имени К. Л. Хетагурова»

Защита диссертации состоится «16» сентября 2025 г. в 14 ч. 00 мин.
на заседании диссертационного совета 24.2.392.08 на базе ФГБОУ ВО «Са-
ратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» по
адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, 10-й учебный корпус,
ауд. 511.

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке
СГУ и на сайте СГУ

<https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-08>

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.392.08
доктор технических наук

И. В. Вешнева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тема диссертации относится к спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и дифференциальных оператор-функций (о.-ф.).

Вопросы спектральной теории, изучаемые в работе, затрагивают асимптотику по спектральному параметру фундаментальной системы решений (ф.с.р.) обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, равномерную равносходимость внутри основного интервала разложений в ряды по собственным и присоединённым функциям (с.п.ф.) обыкновенного дифференциального оператора n -го порядка с регулярными по Биркгофу краевыми условиями, а также с ненулевым коэффициентом при $n - 1$ -й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье, оценку разности частичных сумм этих разложений в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при $n - 1$ -й производной, m -кратную полноту ($1 \leq m \leq n$) в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. нерегулярных полиномиальных дифференциальных о.-ф. n -го порядка, определяемых однородными по спектральному параметру дифференциальными выражениями (д.в.) с постоянными коэффициентами и произвольными двухточечными краевыми условиями.

В **первой главе** диссертации решается задача построения асимптотических формул экспоненциального типа для решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка общего вида и общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка с параметром λ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Глава начинается с рассмотрения дифференциального уравнения n -го порядка с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ вида

$$\ell(y) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

Обозначим $\lambda = -\text{sign}(a_0(x))\rho^n$ и введем в комплексной ρ -плоскости области: $S_k = \{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\pi k}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi(k+1)}{n}\}$, $k = \overline{0, 2n-1}$. Пусть S — некоторая область S_k , а T_c — область, получающаяся из S сдвигом на число $-c$. Через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ обозначим корни n -й степени из -1 , занумерованные для $\rho \in T_c$ так, что $\text{Re}(\rho + c)\omega_1 \leq \text{Re}(\rho + c)\omega_2 \leq \dots \leq \text{Re}(\rho + c)\omega_n$.

Пусть $W_p^k[a, b]$ ($1 \leq p \leq \infty$) есть нормированное пространство гладких функций на отрезке $[a, b]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k -ю производную из $L_p[a, b]$, с нормой $\|y(x)\|_{pk} := \|y(x)\|_p + \|y^{(k)}(x)\|_p$, где через $\|\cdot\|_p$ обозначена норма пространства $L_p[a, b]$, $W_p^0[a, b] := L_p[a, b]$.

Задача об асимптотике решений уравнения (1) при больших значениях параметра $|\lambda|$ имеет долгую историю. Первым такого рода задачу рассмотрел Ж. Лиувиль в 1837 г. в принципиально важном частном случае $n = 2$, $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 0$. Позднее, в 1899 г., аналогичный случай рассмотрел Я. Хорн.

Общее уравнение (1) с бесконечно гладкими коэффициентами при $\arg \rho = \alpha = \text{const}$ рассмотрел Л. Шлезингер в 1907 г., а при $\theta \leq \arg \rho \leq \psi$ независимо этот результат получил Дж. Биркгоф¹. Позднее решение этой задачи в общем виде было рассмотрено в работах Я. Д. Тамаркина^{2,3,4}, М. Стоуна⁵, книгах Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона⁶, М. А. Наймарка⁷.

Широкий круг тем, связанных с асимптотическими методами, излагается в книгах И. М. Рапопорта⁸, А. С. Ломова⁹ и М. В. Федорюка¹⁰. Там же имеется обширная библиография.

Каноническим д.в. в этой задаче можно считать д.в. $\ell(y)$ в случае, когда $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 0$, а коэффициенты $a_j(x)$ ($j = \overline{2, n}$) могут быть самого общего вида, например, из пространства $C[a, b]$ или даже $L_1[a, b]$, если не стоит вопрос об уточнении асимптотических формул. Как правило, при нахождении асимптотических формул более общие д.в. сводят к каноническому д.в.

Для канонического д.в. из результатов^{1,3,4,5} следует, что в любой области T_c ρ -плоскости существуют n линейно независимых решений $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$, $\dots$, $y_n(x, \rho)$, регулярных по $\rho \in T_c$ при $|\rho|$ достаточно большом и удовлетворяющих асимптотическим формулам

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho \omega_k)^m e^{\rho \omega_k(x-a)} (1 + O(1/\rho)), \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{0, n-1}.$$

В случае $a_0(x) \in W_1^n[a, b]$, $a_1(x) \in W_1^{n-1}[a, b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$ в результате соответствующей замены искомой функции и независимой переменной с использованием функций $\eta(x)$ и $w(x)$, определяемых

¹Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — Vol. 9. — P. 219–231.

²Tamarkine J. D. Sur quelques points de la theory des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1912. — Vol. 34. — Pp. 345–382.

³Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды. — Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917. — 308 с.

⁴Tamarkin J. D. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Z. — 1928. — Vol. 27(1). — Pp. 1–54.

⁵Stone M. H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. — 1926. — Vol. 28. — Pp. 695–761.

⁶Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Перевод с англ. Б. М. Левитина. — М.: ИЛ, 1958. — 474 с.

⁷Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

⁸Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1954. — 292 с.

⁹Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

¹⁰Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.

коэффициентами $a_0(x)$ и $a_1(x)$, получается каноническое дифференциальное уравнение с суммируемыми коэффициентами. Таким образом, в этом случае существует ф.с.р. с асимптотикой

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho \omega_k \eta'(x))^m |a_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}} w(x) e^{\rho \omega_k \eta(x)} (1 + O(1/\rho)). \quad (2)$$

Если же $a_0(x) \notin W_1^n[a, b]$ или $a_1(x) \notin W_1^{n-1}[a, b]$, ситуация усложняется. В работах^{1,3,4}, в статье М.В. Федорюка¹¹, а также в книге М.Л. Расулова¹² были рассмотрены более общие дифференциальные уравнения. Если полученные там результаты применить к уравнению (1), то найдем, что при выполнении условий $a_0(x) \in W_1^2[a, b]$, $a_1(x) \in W_1^1[a, b]$, $a_j(x) \in L_1[a, b]$, $j = \overline{2, n}$, и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$, это уравнение в любой области T_c имеет n линейно независимых решений $y_1(x, \rho), \dots, y_n(x, \rho)$, регулярных по $\rho \in T_c$ при $|\rho|$ достаточно большом, для которых также справедливы асимптотические формулы (2).

Эти требования были ослаблены сначала в работах автора диссертации^{13,14} при $a_0(x) \equiv 1$, затем в совместной статье с А.П. Хромовым¹⁵ (результаты по асимптотике ф.с.р. полностью принадлежат автору диссертации) и в последующих статьях^{16,17} автора диссертации в общем случае. Вместо оценки $O(\frac{1}{\rho})$ была получена оценка $O(\psi(\rho))$, где $|\psi(\rho)| \rightarrow 0$ при $|\rho| \rightarrow \infty$, причем стремление $|\psi(\rho)|$ к нулю зависит от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ и может быть сколь угодно медленным.

Позднее А.И. Вагабов¹⁸ также получил оценку $o(1)$, как следствие результата для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывными коэффициентами. В частности, в этой работе также отмечается зависимость скорости стремления к нулю остаточного

¹¹Федорюк М.В. Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка // В кн.: Хеминг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965. — С. 169–176.

¹²Расулов М.Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964. — 464 с.

¹³Рыхлов В.С. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$ -й производной // Дифференц. уравнения и теория функций. Вып. 2. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. — С. 57–75.

¹⁴Рыхлов В.С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — Саратов, 1981. — 129 с.

¹⁵Рыхлов В.С., Хромов А.П. О порождающих функциях вольтерровых операторов с весом // Дифференц. уравнения и теория функций. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. — С. 32–49.

¹⁶Рыхлов В.С. Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром. — Саратов: Саратовский университет, 1994. — 19 с. — Рукопись деп. в ВИНТИ 14.02.95, № 434-B95.

¹⁷Рыхлов В.С. Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 1. — С. 96–108.

¹⁸Вагабов А.И. Об уточнении асимптотической теоремы Тамаркина // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 1. — С. 41–49.

члена от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$, а точнее, от аналогов этих коэффициентов в дифференциальной системе, если они из пространства Гёльдера $C^\gamma[a, b]$. В этом случае получается оценка $\psi(\rho) = O\left(\frac{1}{|\rho|^\gamma}\right)$.

Таким образом, задача получения асимптотики системы решений дифференциального уравнения (1) при наименьших требованиях на коэффициенты $a_j(x)$, $j = \overline{0, n}$, и выяснение зависимости функции $\psi(\rho)$ в остаточном члене от свойств этих коэффициентов является актуальной.

К указанным результатам близки результаты работ А. М. Гомилко и Г. В. Радзиевского¹⁹, Г. В. Радзиевского²⁰ об асимптотике решений функционально-дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)}(x) + (Fy)(x) + \rho^n y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

а также некоторым его обобщениям. Здесь F — линейный оператор, непрерывно действующий из пространства Гёльдера $C^\gamma[0, 1]$ в пространство $L_1[0, 1]$, причем $\gamma < n - 1$. В этих работах, в частности, получена асимптотика системы решений экспоненциального типа, при этом также выявлена определенная зависимость скорости стремления $\psi(\rho)$ к нулю от свойств оператора F .

Случай, когда коэффициенты д.в. являются обобщёнными функциями, рассмотрен В. Е. Владыкиной и А. А. Шкаликовым²¹ для скалярных уравнений второго порядка, а позже А. А. Шкаликовым и А. М. Савчуком²² для уравнений высших порядков.

Далее в первой главе рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[a, b]$ вида

$$Y'(x) - A(x, \lambda)Y(x) = 0, \quad (3)$$

где $A(x, \lambda)$ и $Y(x)$ — $n \times n$ матрицы-функции, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр,

$$A(x, \lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda} A_{-1}(x, \lambda),$$

причем компоненты матрицы $A_1(x)$ из $AC[a, b]$, матриц $A_0(x)$ и $A_{-1}(x, \lambda)$ из $L_1[a, b]$ и нормы компонент $A_{-1}(x, \lambda)$ ограничены в $L_1[a, b]$ по λ при $|\lambda| \gg 1$.

¹⁹Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 11. — С. 1460–1469.

²⁰Радзиевский Г. В. О свойствах решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 9. — С. 1213–1231.

²¹Владыкина В. Е., Шкаликов А. А. Асимптотика решений уравнения Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. — 2015, — Т. 98, № 6. — С. 832–841.

²²Савчук А. М., Шкаликов А. А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Мат. сб. — 2020. — Т. 211, № 11. — С. 129–166.

Впервые наиболее полно асимптотические решения системы уравнений (3) изучались Я. Д. Тамаркиным^{3,4}. Исследования продолжили Дж. Биркгоф и Р. Э. Лангер²³, И. М. Рапопорт⁸, М. Л. Расулов¹², В. Р. Вазов²⁴. В предположении, что компоненты матриц $A_1(x)$, $A_0(x)$ и $A_{-1}(x, \lambda)$ принадлежат пространствам $W_1^2[a, b]$, $W_1^1[a, b]$ и $L_1[a, b]$, и некоторых других естественных предположениях в этих работах была получена следующая асимптотическая формула для ф.м.р.

$$Y(x, \lambda) = \tilde{\Psi}(x) \exp \left(\lambda \int_a^x \Phi_1(\xi) d\xi \right) \left(E + \mathcal{E}(x, \lambda) \right), \quad (4)$$

где матрица $\tilde{\Psi}(x)$ вполне определяется коэффициентами системы (3), $\Phi_1(x) := \text{diag} \{ \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \}$ ($\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, есть корни характеристического уравнения системы (3) или, кратко, характеристики) и для компонент матрицы $\mathcal{E}(x, \lambda)$ справедлива оценка $O(\frac{1}{\lambda})$ в равномерной метрике.

Если $A_1'(x)$ и $A_0(x)$ из класса Гёльдера $C^\gamma[a, b]$, то А. И. Вагабов¹⁸, как уже отмечалось, получил для компонент матрицы $\mathcal{E}(x, \lambda)$ в формуле (4) оценку $O(\frac{1}{|\lambda|^\gamma})$.

Из изложенного следует, что задача получения асимптотики типа (4) для ф.м.р. системы уравнений (3) при наименьших требованиях на коэффициенты $A_1(x)$, $A_0(x)$ и $A_{-1}(x, \lambda)$ и выявление зависимости функции $\mathcal{E}(x, \lambda)$ от свойств этих коэффициентов также является актуальной.

Наиболее сильный результат по этой задаче принадлежит автору диссертации²⁵. Им была получена равномерная оценка функции $\mathcal{E}(x, \lambda)$, в которой выявлена явная зависимость от свойств коэффициентов $A_1(x)$ и $A_0(x)$ в предположении, что элементы матриц $A_1(x)$, $A_0(x)$ и $A_{-1}(x, \lambda)$ принадлежат, соответственно, пространствам $W_1^1[a, b]$, $L_1[a, b]$ и $L_1[a, b]$.

Результаты работы²⁵ были передоказаны А. И. Вагабовым²⁶ при более сильных условиях на компоненты матриц: $\{A_1(x)\}_{ij} \in W_q^1[a, b]$, $\{A_0(x)\}_{ij}$, $\{A_{-1}(\cdot, \lambda)\}_{ij} \in L_q[a, b]$, $q > 1$, а оценка компонент остатка была получена в более слабой норме $\|\cdot\|_{q'}$, где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, вместо $\|\cdot\|_\infty$ в²⁵.

Случай, когда главная матрица $A_1(x)$ диагональная, что позволяет снизить требования на эту матрицу, исследовался А. П. Косаревым и

²³Birkhoff G. D., Langer R. E. The Boundary Problems and Developments Associated with a System of Ordinary Linear Differential Equations of the First Order // Proc. Amer. Acad. Arts Sci. — 1923. — Vol. 58, no. 2. — Pp. 51–128.

²⁴Вазов В. Р. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.

²⁵Rykhlov V. S. Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Res. Math. — 1999. — Vol. 36. — Pp. 342–353.

²⁶Вагабов А. И. Об асимптотике по параметру решений дифференциальных систем с коэффициентами из класса L_q // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 16–22.

А. А. Шкаликовым^{27,28}. В этих статьях была получена не только асимптотика типа (4), но и уточнённая асимптотика при наименьших условиях гладкости коэффициентов.

Другие подходы к нахождению асимптотических формул для решений систем уравнений типа (3) и более общих систем, а также другие оценки остаточных членов в этих асимптотических формулах можно найти в совместной статье Дж. Биркгофа и Р. Е. Лангера²³, в статье Р. Е. Лангера²⁹, работах Р. Меникена и М. Мёллера^{30,31}

Задача об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений на оси была рассмотрена Р. Билсом, П. Дейфтом и К. Томеем³², а на конечном интервале и полуоси с особенностями (коэффициенты которых не интегрируемы) — В. А. Юрко^{33,34} и М. Ю. Игнатьевым^{35,36}.

Во **второй главе** рассматривается дифференциальный оператор L , порожденный д.в.

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad p_j(x) \in L_1[0,1], \quad (5)$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по с.п.ф. или, что то же самое, по корневым

²⁷Косарев А. П., Шкаликов А. А. Асимптотические представления решений $(n \times n)$ -систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 2. — С. 266–289.

²⁸Косарев, А. П., Шкаликов А. А. Асимптотические разложения решений $(n \times n)$ -систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 6. С. 923–940.

²⁹Langer R. E. The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain // Trans. Amer. Math. Soc. — 1939. — Vol. 46. — Pp. 151–190.

³⁰Mennicken R., Möller M. Boundary eigenvalue problems. // Notas de algebra y analisis. — 1986. — Vol. 46. — Pp. 1–100.

³¹Mennicken R., Möller M. Non-self-adjoint boundary eigenvalue problems. — Amsterdam: Elsevier Science, 2003. — Vol. 192 of North-Holland Math. Stud. — 518 pp.

³²Beals R., Deift P., Tomei C. Direct and Inverse Scattering on the Line. — Providence: AMS, 1988. — Vol. 28 of Mathematical Surveys and Monographs. — 209 pp.

³³Юрко В. А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 8. — С. 1355–1362.

³⁴Юрко В. А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Матем. сб. — 1995. — Т. 186, № 6. — С. 133–160.

³⁵Ignatiev M. Y. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. — 2020. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 17–28.

³⁶Игнатьев М. Ю. О данных рассеяния дифференциальных систем с особенностью // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 846–863.

функциям (к.ф.) оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности частичных сумм или, по-другому, о скорости равномерности.

Задача о разложении заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удастся доказать равномерность (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена.

Исследование равномерности спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление, начало которого было положено в работах В. А. Стеклова³⁷, Е. Хобсона³⁸, А. Хаара^{39,40} для случая дифференциального оператора Штурма-Лиувилля, Я. Д. Тамаркина^{2,3,4} и М. Стоуна⁵ для дифференциального оператора любого порядка с произвольными двухточечными краевыми условиями, удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа⁷.

Новый импульс этому направлению придал В. А. Ильин^{41,42}, разработавший метод получения теорем равномерности, в котором дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений (с.з.) и с.п.ф.

Первый наиболее общий результат о равномерности для оператора L получил Я. Д. Тамаркин². Он доказал, что при нулевом коэффициенте $p_1(x)$ (или достаточно гладком: $p_1(x) \in C^{m-1}[0,1]$) и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой (по Риману) функции ряды Фурье по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе равномерно сходятся внутри $(0,1)$. Похожий результат получил М. Н. Стоун⁵.

Позднее Я. Д. Тамаркин^{3,4} доказал теорему равномерности для более общих операторов, но опять-таки с условиями регулярности краевых

³⁷ Стеклов В. А. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par les équations différentielles du second ordre... // Сообщ. Харьк. мат. об-ва. — 1907. — Сер. 2. — Т. 10. — С. 97–199.

³⁸ Hobson E. W. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions // Proc. London Math. Soc. — 1908. — Vol. 6. — Pp. 349–395.

³⁹ Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. — 1910. — Vol. 69. — Pp. 331–371.

⁴⁰ Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. — 1911. — Vol. 71. — Pp. 38–53.

⁴¹ Ильин В. А. О равномерной равномерности разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 223, № 3. — С. 548–551.

⁴² Ильин В. А. О равномерности разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 225, № 3. — С. 497–499.

условий и достаточной гладкости коэффициента при $n - 1$ -й производной или аналогичных ему коэффициентов.

Н. П. Купцов⁴³ доказал абстрактную теорему равносходимости разложений по с.п.ф. операторов A и $A + Q$, действующих в банаховом пространстве. Приложениями этой теоремы являются обычные теоремы равносходимости разложений по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, но опять же в случае регулярных краевых условий оператора L и нулевого коэффициента $p_1(x)$.

А. П. Хромов^{44, 45} распространил теорему равносходимости Тамаркина на интегральные операторы $(Af)(x) := \int_0^1 A(x, \xi)f(\xi) d\xi$ ($x \in [0, 1]$), ядра которых обобщают свойства функции Грина оператора L с регулярными краевыми условиями. А именно, А. П. Хромов рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра $A(x, \xi)$ имеют разрыв первого рода на линии $\xi = x$. Такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье. В дальнейшем В. В. Корнев и А. П. Хромов⁴⁶, а также А. П. Хромов⁴⁷ распространили эти результаты на другие интегральные операторы. Аналог случая $p_1(x) \notin C^{n-1}[0, 1]$ при этом не рассматривался.

В статье⁴⁸ А. П. Хромова приведён обзор результатов по вопросам сходимости и, в частности, равносходимости биортогональных разложений функций для обыкновенных дифференциальных операторов.

В основе всех этих результатов лежал метод контурного интеграла Пуанкаре-Коши или, по-другому, резольвентный метод, использующий интегральное представление Коши проекторов Рисса.

Другой подход к проблеме равносходимости, как уже было отмечено ранее, предложил В. А. Ильиным^{41, 42}. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения, полученную первоначально Е. И. Моисеевым⁴⁹ для случая гладких коэффициентов д.в. и затем модифицированную для случая негладких коэффициентов

⁴³Купцов Н. П. Теорема равносходимости для разложений Фурье в пространствах Банаха // Матем. заметки. — 1967. — Т. 1, № 4. — С. 469–474.

⁴⁴Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. — 1981. — Т. 114(156), № 3. — С. 378–405.

⁴⁵Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2000. — № 2. — С. 21–26.

⁴⁶Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 33–55.

⁴⁷Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 115–142.

⁴⁸Хромов А. П. Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1691–1696.

⁴⁹Моисеев Е. И. Формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 3. — С. 562–565.

И. С. Ломовым⁵⁰. Эта формула является распространением соответствующей формулы для решения уравнения второго порядка, установленную Э. Ч. Титчмаршем.

В. А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$ и произвольными краевыми условиями, обеспечивающими определенное асимптотическое поведение с.з.

Доказанные В. А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случай регулярных краевых условий.

Дальнейшее продвижение в вопросе о равносходимости было сделано А. М. Минкиным^{51, 52, 53}. Некоторые доказанные им теоремы по формулировке родственны ряду утверждений В. А. Ильина^{41, 42}, но доказательства другие. В обзорной статье⁵⁴ А. М. Минкина дан развернутый анализ результатов по равносходимости спектральных разложений.

Приведенные выше результаты относились к операторам L с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$ или к обобщениям таких операторов. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость был исследован автором диссертации^{14, 55}. Было установлено, что существует тесная связь между множеством тех функций $f(x)$, для разложений которых по с.п.ф. оператора L имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье, и свойствами коэффициента $p_1(x)$. По сути, в этих работах была дана оценка разности частичных сумм разложений в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Отметим, что вопрос об оценке разности частичных сумм разложений по с.п.ф., отвечающим двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма-Лиувилля, впервые

⁵⁰Ломов И. С. Формула среднего значения Е. И. Моисеева для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с негладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 8. — С. 1046–1057.

⁵¹Минкин А. М. Принцип локализации для рядов по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения и теория функций. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. — С. 68–80.

⁵²Минкин А. М. Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. — Саратов, 1982. — 129 с.

⁵³Минкин А. М. Разложение по собственным функциям одного класса негладких дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 356–358.

⁵⁴Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators // J. Math. Sci. — 1999. — Vol. 96, no. 6. — Pp. 3631–3715.

⁵⁵Рыхлов В. С. О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной // Докл. АН СССР, 1984. — Т. 279, № 5. — С. 1053–1056.

был рассмотрен В. А. Ильиным и И. Йо⁵⁶. Аналогичные вопросы для оператора Штурма–Лиувилля исследовались Ш. А. Алимовым и И. Йо⁵⁷.

Для оператора Шредингера вопросы о скорости равносходимости спектральных разложений, исследовались Е. И. Никольской⁵⁸. Результат⁵⁶ на случай несамосопряженного оператор Шредингера с комплекснозначным потенциалом из класса L_{loc}^2 перенесли В. Е. Волков и И. Йо⁵⁹.

Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$, где G есть основной интервал. Такие же локальные оценки, но в интегральной метрике, получены В. М. Курбановым⁶⁰ для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов. Отметим также другие статьи^{61, 62} В. М. Курбанова в этом направлении. В частности, им была исследована⁶¹ зависимость скорости равносходимости от модуля непрерывности главных коэффициентов д.в.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям, поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке G в общем случае не может быть. И. С. Ломов⁶³, используя подход В. А. Ильина, получил оценки скорости равносходимости соответствующих разложений на всем интервале G в интегральной метрике L_p .

В дальнейшем И. С. Ломов перенёс эти результаты на несамосопряженный оператор Шредингера и затем на оператор Штурма–Лиувилля

⁵⁶Ильин В. А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 243, № 6. — С. 1381–1383.

⁵⁷Alimov S. A., Joó I. Equiconvergence theorem with exact order // Stud. Sci. Math. Hung. — 1980. — Vol. 15. — Pp. 431–439.

⁵⁸Никольская Е. И. Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шредингера с комплексными потенциалами из класса L_1 // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 4. — С. 598–612.

⁵⁹Волков В. Е., Йо И. Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шредингера // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 11. — С. 1865–1876.

⁶⁰Курбанов В. М. О скорости равносходимости спектральных разложений // Докл. РАН. — 1999. — Т. 365, № 4. — С. 444–449.

⁶¹Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 12. — С. 1619–1633.

⁶²Курбанов В. М. Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 3. — С. 319–335.

⁶³Ломов И. С. О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля в интегральной метрике // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1480–1493.

с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в дифференциальной операции^{64, 65}. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен И. С. Ломовым^{66, 67} и И. С. Ломовым совместно с С. В. Афоным⁶⁸ — для операторов нечетного порядка.

Детальный обзор этих и аналогичных результатов по оценке разности частичных сумм можно найти в обзорной статье И. С. Ломова⁶⁹.

Интересные результаты по оценке скорости равномерности получили Г. В. Радзиевский и А. М. Гомилко⁷⁰, а также Г. В. Радзиевский⁷¹, которые исследовали равномерность и получили оценки разности частичных сумм разложений по с.п.ф. регулярных функционально-дифференциальных и дифференциальных операторов в метрике $L_p[0,1]$, где $1 < p < \infty$.

Отдельно от перечисленных результатов стоят результаты о равномерности для операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями, которые начали изучаться в начале 2000-х годов. Такого типа операторы были введены А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым⁷² и активно исследовались разными математиками.

По-видимому, первой работой о равномерности для таких операторов стала статья В. А. Винокурова и В. А. Садовниченко⁷³, в которой была

⁶⁴Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равномерности спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 5. — С. 619–628.

⁶⁵Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равномерности спектральных разложений. II // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 8. — С. 1066–1077.

⁶⁶Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 3. — С. 328–342.

⁶⁷Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 5. — С. 648–660.

⁶⁸Афонин С. В., Ломов И. С. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // Докл. РАН. — 2010. — т. 431, № 2. — с. 151–153.

⁶⁹Ломов И. С. Оценки скорости сходимости и равномерности спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 405–418.

⁷⁰Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 316, № 2. — С. 265–270.

⁷¹Radzieskii G. V. The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions // Some problems of the modern theory of differential equations. — Kiev: Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., 1994. — Pp. 14–27.

⁷²Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.

⁷³Винокуров В. А., Садовничий В. А. Равномерная равномерность ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 6. — С. 731–735.

доказана равномерная на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимость в случае, когда $f(x) \in L_1[0, \pi]$, $q(x) = u'(x)$, где функция $u(x)$ из пространства $BV[0, \pi]$. При этом рассматривались краевые условия Дирихле.

П. Джаков и Б. С. Митягин⁷⁴ установили равномерную равносходимость для такого вида операторов Штурма-Лиувилля с произвольными регулярными краевыми условиями. При этом разлагаемая функция $f(x)$ выбиралась квадратично суммируемой с дополнительным условием на ее коэффициенты Фурье, а именно: суммируемость в квадрате с логарифмическим весом.

И. В. Садовничая в серии работ^{75, 76, 77, 78} получила ряд интересных результатов о равносходимости и оценке скорости равносходимости для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом-распределением для краевых условий Дирихле, а также для операторов Дирака.

Отметим также результаты В. А. Юрко³⁴ по равносходимости спектральных разложений в случае дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми коэффициентами.

Таким образом, вопросы равносходимости в том или ином виде спектральных разложений и задача оценки разности частичных сумм в различных метриках и для различных классов дифференциальных операторов являются актуальными направлениями исследований.

Автору диссертации удалось продвинуться в данном направлении, а именно, в работах^{55, 79} была дана оценка разности частичных сумм разложений по с.п.ф. оператора L и в тригонометрический ряд Фурье в терминах логарифмических модулей непрерывности коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$.

⁷⁴Djakov P., Mityagin B. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — Vol. 61, no. 1.— Pp. 359–398.

⁷⁵Садовничая И. В. О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 656–664.

⁷⁶Садовничая И. В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 9. — С. 61–76.

⁷⁷Садовничая И. В. Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 2. — С. 162–163.

⁷⁸Садовничая И. В. Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега // Труды МИАН. — 2016. — Т. 293. — С. 296–324.

⁷⁹Рыхлов В. С. Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 975–989.

В последующих статьях^{80,81} автора диссертации результаты^{55,79} были обобщены и оценка разности частичных сумм была получена в терминах общих модулей непрерывности. В частности, в случае, когда модули непрерывности оцениваются медленно меняющимися функциями. Важную роль при этом играет доказанный автором аналог теоремы Штейнгауза⁸².

В **третьей главе** исследуется кратная полнота к.ф. некоторых классов дифференциальных о.-ф. с постоянными коэффициентами. Вопрос об n -кратной полноте к.ф. возникает при решении методом Фурье начально-граничных задач для соответствующих уравнений в частных производных.

Основным объектом, рассматриваемым в главе, является о.-ф. $L(\lambda)$ порожденная однородным д.в.

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (7)$$

и краевыми условиями

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами.

$L(\lambda)$ является частным случаем более общей о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$, порожденной д.в.

$$\tilde{\ell}(y, \lambda) := p_n(x, \lambda) y^{(n)} + p_{n-1}(x, \lambda) y^{(n-1)} + \dots + p_0(x, \lambda) y, \quad (9)$$

где $p_j(x, \lambda) = \sum_{s=0}^{n-j} p_{js}(x) \lambda^s$, $p_{js}(x) \in L_1[0, 1]$, и краевыми условиями (8).

Далее используются известные определения собственных значений дифференциальных о.-ф., корневых функций (с.п.ф.), производных (по Келдышу) m -цепочек ($1 \leq m \leq n$), кратной полноты системы к.ф. в гильбертовом пространстве из работ М. В. Келдыша^{83,84}, М. А. Наймарка⁷, А. А. Шкаликова⁸⁵.

⁸⁰Rykhlov V.S. Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators // Res. Math. — 1996. — Vol. 29. — P. 153–168.

⁸¹Рыхлов В. С. Оценка близости частичных сумм разложений по корневым функциям регулярного линейного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Сб. материалов междуна. конф. КРОМШ-2024 «XXXV Крымская Осенняя Мат. Школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектр. и эволюц. задачам». — Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2024. — С. 11–13

⁸²Рыхлов В. С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза // ТВИМ. — 2015. — № 3(28). — С. 62–81.

⁸³Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11–14.

⁸⁴Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. — 1971. — Т. 26, №4. — С. 15–41.

⁸⁵Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — № 9. — С. 190–229.

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. $\tilde{L}(\lambda)$, а $Y := \{y_k(x)\}$ — множество всех к.ф., соответствующих множеству Λ . Предполагается, что множество Λ счетное.

Одной из важных задач для о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$ является задача о кратной полноте системы её к.ф. в различных пространствах, в частности, в $L_2[0,1]$, т.е. задача нахождения условий на коэффициенты д.в. $\tilde{\ell}(y, \lambda)$ и краевые условия (8), при которых имеет место или отсутствует n -кратная полнота системы к.ф. в $L_2[0,1]$. В последнем случае, естественно, возникает вопрос об m -кратной полноте при $1 \leq m \leq n - 1$.

Основополагающей по этой проблеме является статья М.В. Келдыша⁸³, в которой была сформулирована теорема об n -кратной полноте системы к.ф. $\tilde{L}(\lambda)$, порожденной д.в. (9) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и не зависящими от λ распадающимися краевыми условиями (8). Подробное доказательство этой теоремы было опубликовано⁸⁴ только в 1971 году.

Из результатов А.П. Хромова⁸⁶ вытекает справедливость теоремы Келдыша в случае аналитических коэффициентов д.в. Независимо аналогичный результат был получен В. Эберхардом⁸⁷. В случае суммируемых коэффициентов д.в. этот результат был установлен А.А. Шкаликвым^{88,89}.

Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано А.П. Хромовым^{86,90,91}.

Случай произвольной главной части д.в. (9) рассмотрел Г. Фрайлинг⁹² и С.А. Тихомиров⁹³.

⁸⁶Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1973. — 242 с.

⁸⁷Eberhard W. Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme // Math. Z. — 1976. — Vol. 146, no. 3. — P. 213–221.

⁸⁸Шкалик А.А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функциональный анализ. — 1976. — Т. 10, №4. — С. 69–80.

⁸⁹Шкалик А.А. О полноте и базисности собственных и присоединенных функций краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. — Москва, 1976. — 121 с.

⁹⁰Хромов А.П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сборник. — 1977. — Т. 102(144), №3. — С. 457–472.

⁹¹Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 10. — С. 3–163.

⁹²Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. — 1984. — Vol. 188, no 1. — P. 55–68.

⁹³Тихомиров С.А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1987. — 126 с.

В работах М. Г. Гасимова и А. М. Магеррамова⁹⁴, а также А. А. Шкаликова⁸⁵, относящихся к общему виду о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$, получены достаточные условия n - и m -кратной полноты системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по λ функции Грина о.-ф $\tilde{L}(\lambda)$ на некоторых лучах.

Отметим, что А. А. Шкаликов исследовал полноту производных n -цепочек, построенных по системе к.ф., при достаточно гладких коэффициентах $p_{js}(x)$ в специально построенных гильбертовых пространствах $\mathscr{W}_{p,U}^r$ (r достаточно большое), которые естественны при наличии спектрального параметра λ в граничных условиях и являются подпространствами конечной коразмерности в пространстве $\mathscr{W}_p^r = W_p^{n-1+r} \oplus \dots \oplus W_p^r$, где W_p^k — соболевские пространства гладких функций. Индекс U означает зависимость $\mathscr{W}_{p,U}^r$ от краевых условий.

Но для некоторых классов о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте системы к.ф. ещё недостаточно исследован. Речь идет о кратной полноте системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ вида (7)–(8).

Наиболее полное исследование вопроса об n - и m -кратной полноте ($1 \leq m \leq n-1$) системы к.ф. $L(\lambda)$ вида (7)–(8) в случае неоднородного д.в. с постоянными коэффициентами и полураспадающимися краевыми условиями, не зависящими от λ , проведено А. И. Вагабовым⁹⁵. Им были получены условия n - и m -кратной полноты системы к.ф. в $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов.

Исследование вопроса об n - и m -кратной полноте системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ вида (7)–(8) в других ранее не исследованных случаях были предприняты также и автором диссертации^{96,97,98}.

Но есть классы полиномиальных дифференциальных о.-ф. с постоянными коэффициентами (даже в случае распадающихся краевых условий при определенном расположении характеристик), для которых стандартные методы рассуждений, которые использовались в вышеприведенных работах, не позволяют установить кратную полноту системы к.ф.

⁹⁴Гасимов М. Г., Магеррамов А. М. О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН Азерб. ССР. — 1974. — Т. 30, № 12. — С. 9–12.

⁹⁵Вагабов А. И. Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения // Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Москва, 1987. — 201 с.

⁹⁶Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients // Results in Mathematics. — 2015. — Vol. 68, no. 3–4. — Pp. 427–440.

⁹⁷Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients // Results in Mathematics. — 2017. — Vol. 72, no. 1–2. — Pp. 281–301.

⁹⁸Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН. — 2017. — Т. 63, № 2. — Р. 340–361.

Из этого следует, что вполне актуальной является задача модификации известных методов под еще нерешенные задачи или поиск новых подходов к решению этих задач.

Дальнейшее продвижение в решении задачи о кратной полноте системы к.ф. было осуществлено автором диссертации с использованием нового подхода к доказательству, который по основной идее можно назвать методом *обобщенных порождающих функций* (п.ф.). Здесь под п.ф. понимается функция $g(x, \lambda)$, которая определённым образом порождает систему к.ф. $\tilde{L}(\lambda)$. Первоначально идея такого подхода опубликована автором диссертации в статье⁹⁹. Более подробное изложение дано в статье¹⁰⁰.

Аналогично⁸⁵, множество о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$ и, в частности, множество о.-ф. $L(\lambda)$ разбиваются по степени усиления нерегулярности на классы регулярных, почти регулярных, слабо нерегулярных, сильно нерегулярных и вырожденных о.-ф. Из⁸⁵ следует, что если о.-ф. слабо нерегулярна, то система её производных n -цепочек, построенных по системе к.ф., полна в пространствах $\mathcal{W}_{p,U}^r$ и, в частности, в $L_2^n[0,1]$.

Поэтому, вполне естественно, что интерес представляет исследование кратной полноты к.ф. именно для сильно нерегулярных о.-ф.

При изучении спектральных свойств дифференциальных о.-ф. традиционно использовались^{7,88,89,95} так называемые *классические* п.ф. $g_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, которые получаются из характеристического определителя (х.о.) $\Delta(\lambda) = \det\{U_j(y_k(x, \lambda), \lambda)\}_{j,k=1}^n$ путем замены i -й строки определителя строкой $(y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda))$, где $\{y_k(x, \lambda)\}_{k=1}^n$ есть ф.с.р. уравнения $\tilde{\ell}(x, \lambda) = 0$. В случае сильно нерегулярных о.-ф. классические п.ф. не всегда позволяют провести стандартные схемы доказательства кратной полноты системы корневых функций.

Идея метода обобщенных порождающих функций состоит в использовании более общих порождающих функций

$$g(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) := \gamma_1(\lambda)g_1(x, \lambda) + \gamma_2(\lambda)g_2(x, \lambda) \cdots + \gamma_n(\lambda)g_n(x, \lambda),$$

где $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_n(\lambda))^T \not\equiv (0, \dots, 0)^T$ является вектор-параметром (в.-п.). Если $\Gamma(\lambda) := (0, \dots, 1(i), \dots, 0)^T$, то получим функции $g_i(x, \lambda)$.

При рассмотрении некоторых классов сильно нерегулярных о.-ф. автору диссертации удалось подобрать векторы $\Gamma(\lambda)$ так, что стандартная схема доказательства кратной полноты проходит и в этих случаях. В частности, это удалось сделать для о.-ф. с распадающимися краевыми

⁹⁹Рыхлов В. С. О полноте собственных функций дифференциальных пучков операторов // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 5(311). — С. 153–154.

¹⁰⁰Рыхлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ. — 2015. — № 1(26). — С. 69–86.

условиями в случае расположения характеристик на двух лучах^{101,102}, для дифференциального оператора, порожденного д.в. $y^{(n)}$ и двухточечными двучленными краевыми условиями^{103,104}, а также для некоторых конкретных сильно нерегулярных о.-ф. с нераспадающимися краевыми условиями¹⁰⁵.

Активно развивался и другой подход, сводящий вопросы полноты, минимальности, базисности и разложимости по к.ф. к вопросу разрешимости линейных уравнений с операторами внутренней суперпозиции. Этот подход был использован, в частности, А. И. Вагабовым⁹⁵. В дальнейшем он применялся в некоторых исследованиях автора диссертации^{106,107,108}.

Цель работы состоит в исследовании спектральных свойств обыкновенных дифференциальных оператор-функций, включающих построение асимптотики по спектральному параметру экспоненциального типа решений дифференциального уравнения общего вида и общей системы дифференциальных уравнений первого порядка при наименьших требованиях на коэффициенты, доказательство теорем равносходимости разложений по с.п.ф. дифференциального оператора n -го порядка с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и ненулевым коэффициентом при $n - 1$ -й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты, а также получение оценок разности частичных сумм этих рядов в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $n - 1$ -й производной и, в частности, в случае оценки этих модулей непрерывности медленно меняющимися функциями, развитие новых подходов к доказательству n - и m - кратной полноты ($1 \leq m \leq n$) в пространстве $L_2[0,1]$ систем к.ф. сильно нерегулярных дифференциальных оператор-функций.

¹⁰¹Рыхлов В.С. О кратной полноте корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // ТВИМ. — 2018. — № 4. — С. 90–112.

¹⁰²Рыхлов В.С. О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 134–151.

¹⁰³Рыхлов В.С. О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями // Докл. РАН. — 2009. — Т. 428, № 6. — С. 740–743.

¹⁰⁴Рыхлов В.С. О полноте собственных функций одного дифференциального оператора 5-го порядка // СМФН. — 2022. — Т. 68, № 2. — С. 338–375.

¹⁰⁵Рыхлов В.С. Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов // ТВИМ. — 2016. — № 1(31). — С. 87–103.

¹⁰⁶Рыхлов В.С. О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. — 1992. — № 2. — С. 35–44.

¹⁰⁷Рыхлов В.С. О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегр. преобр. и спец. функции: Информационный бюллетень. — 2001. — Т. 2, № 1. — С. 85–103.

¹⁰⁸Rykhlov V.S. On eigenfunction expansions for a class of irregular quadratic pencils of second-order differential operators // Lobachevskii J. Math. — 2021. — Vol. 42, no. 5. — Pp. 1014–1026.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Для линейного дифференциального уравнения n -го порядка общего вида со спектральным параметром получены асимптотические формулы экспоненциального типа для решений при наименьших условиях на коэффициенты с новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциального выражения.
2. Для общей линейной дифференциальной системы первого порядка со спектральным параметром получены асимптотические формулы экспоненциального типа для ф.м.р. при наименьших условиях на коэффициенты с новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциальной системы.
3. Доказаны новые теоремы равносходимости в равномерной метрике внутри основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора n -го порядка с ненулевым коэффициентом при $n - 1$ -й производной и регулярными по Биркгофу краевыми условиями и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты д.в.
4. Получены оценки разности частичных сумм нового типа разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора из п. 3 и в обычный тригонометрический ряд Фурье в терминах общих модулей непрерывности коэффициента при $n - 1$ -й производной и разлагаемой функции, как в общем случае, так и в случае, когда эти модули непрерывности оцениваются медленно меняющимися функциями.
5. Предложен новый подход, а именно, метод обобщённых порождающих функций, к исследованию m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. оператор-функций, определяемых однородными по спектральному параметру д.в. с постоянными коэффициентами и двухточечными краевыми условиями с полиномиальными по спектральному параметру коэффициентами.
6. Исследованы приложения метода из п. 5 к отдельным новым сильно нерегулярным о.-ф., к новому классу сильно нерегулярных о.-ф. с распадающимися краевыми условиями при расположении характеристик на двух лучах и к новым дифференциальным операторам, порожденным простейшим д.в. пятого порядка и двухточечными двучленными краевыми условиями.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, спектральной теории линейных операторов и оператор-функций в гильбертовом и банаховом пространствах, алгебры матриц, теории целых аналитических функций,

теории аппроксимации функций многочленами, теория медленно и правильно меняющихся функций, асимптотические и другие методы комплексного и функционального анализа, а также оригинальные методы автора диссертации.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные подходы могут быть обобщены на другие классы операторов и о.-ф.: операторы, порожденные более общими д.в., о.-ф. с кратными характеристиками, с многоточечными краевыми условиями, на графах, в коэффициентах-распределениях. Результаты работы носят достаточно общий характер и могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к изучению несамосопряженных операторов. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в СГУ им. Н. Г. Чернышевского, МГУ им. М. В. Ломоносова, СПбГУ, МИАН им. В. А. Стеклова и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание спецкурсов по спектральной теории дифференциальных о.-ф. для студентов и аспирантов математических и физических специальностей университетов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Асимптотические по спектральному параметру формулы экспоненциального типа для решений линейных дифференциальных уравнений n -го порядка общего вида при наименьших требованиях на коэффициенты уравнения и новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциального уравнения.
2. Асимптотические по спектральному параметру формулы экспоненциального типа для ф.м.р. общих линейных дифференциальных систем первого порядка общего вида при наименьших требованиях на коэффициенты системы и новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциальной системы.
3. Теоремы равносходимости в равномерной метрике внутри основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. регулярного по Биркгофу дифференциального оператора n -го порядка с ненулевым коэффициентом при $n - 1$ -й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты д.в.
4. Оценки разности частичных сумм разложений в ряды по с.п.ф. регулярного по Биркгофу дифференциального оператора n -го порядка с ненулевым коэффициентом при $n - 1$ -й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье в терминах общих модулей непрерывности коэффициента при $n - 1$ -й производной и

разлагаемой функции, как в общем случае, так и в случае, когда модули непрерывности оцениваются медленно меняющимися функциями.

5. Новый подход, основанный на использовании обобщённых порождающих функций для системы к.ф., к исследованию m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. оператор-функций, определяемых однородными по спектральному параметру д.в. и двухточечными краевыми условиями с полиномиальными по спектральному параметру коэффициентами.
6. Приложения подхода из предыдущего пункта к отдельным сильно нерегулярным о.-ф., к классу сильно нерегулярных о.-ф. с распадающимися краевыми условиями при расположении характеристик на двух лучах и к дифференциальным операторам, порождённым простейшим д.в. пятого порядка и двухточечными двучленными краевыми условиями.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы в разные годы докладывались на научных семинарах:

1. Семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» ВМК МГУ (руководители в разные годы — акад. РАН В. А. Ильин, акад. РАН Е. И. Моисеев, проф. И. С. Ломов).
2. Семинар «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» механико-математического факультета МГУ (руководители — проф. В. В. Власов, доц. Н. А. Раутиан).
3. Семинар «Спектральная теория несамосопряженных операторов» кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики Саратовского государственного университета (руководитель — проф. А. П. Хромов).
4. Семинар «Обратные задачи спектрального анализа» кафедры математической физики и вычислительной математики Саратовского государственного университета (руководитель — проф. В. А. Юрко).
5. Семинар факультета математики университета Дуйсбурга-Эссена (руководители в разные годы — проф. В. Эберхард, Г. Фрайлинг), г. Дуйсбург, Германия.
6. Семинар факультета математики, информатики и естествознания Рейнско-Вестфальского технического университета (руководители — проф. Г. Фрайлинг, Г. Янк), г. Ахен, Германия.
7. Семинар Институт математики НАН Украины (руководитель — проф. Г. В. Радзиевский).

и на международных научных конференциях:

1. Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов (регулярно с 1982 года).
2. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения», Воронеж (регулярно с 1997 года).
3. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж (1999, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025 гг.).
4. Крымская осенняя математическая школа-симпозиум «Спектральные и эволюционные проблемы» (регулярно с 1996 года).
5. «Казанская летняя математическая школа», Казань (1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2015, 2021, 2023 гг.).
6. Международная конференция «Понтрягинские чтения-XXIX», посвященная 90-летию академика В. А. Ильина, Москва (2018 г.).
7. Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», Москва (1995 г.).
8. Международная конференция, посвященная 75-летию члена-корреспондента РАН профессора Л. Д. Кудрявцева, Москва (1998 г.).
9. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И. Г. Петровского, Москва (2007 г.).
10. Международная конференция «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С. М. Никольского, Москва (2010 г.).
11. «Казанская международная конференция по алгебре, анализу и геометрии», Казань (2016 г.).
12. Международная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа (2018 г.).
13. Международной конференция, посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко, Москва (2019 г.).
14. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения», Владикавказ (2023 г.).
15. Международная конференция «Analysis and Mathematical Physics (AMP-2024)», Мехико, Мексика (2024 г.).

Часть результатов получена при работе в качестве исполнителя по грантам РФФИ 97-01-00566, 00-01-00075, 03-01-00169, 06-01-00003, 10-01-00270, 13-01-00238, гранту Президента РФ на поддержку ведущих научных школ 00-15-96123, НШ-1295.2003, НШ-4383.2010, гранту Минобрнауки 1.1520.2014/К.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации получены автором лично.

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 26 статьях [1-26], из которых 21 статья опубликована в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и включённых в Перечень ВАК РФ. Все работы выполнены без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, приложения и списка литературы. Общий объем диссертации 295 страниц, из них 266 страница текста. Список литературы включает 209 наименований на 24 страницах. Диссертация содержит 16 рисунков.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводятся общая характеристика работы и ее краткое содержание.

В **первой главе** формулируются и доказываются теоремы об асимптотике по спектральному параметру экспоненциального типа решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка общего вида и решений общей системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка при неограниченном возрастании параметра.

В первом разделе рассматривается дифференциальное уравнение n -го порядка на конечном отрезке $[a, b]$ с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\ell(y) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (10)$$

где $a_j(x) \in L_1[a, b]$, $j = \overline{1, n}$, $a_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция, не обращающаяся в ноль на $[a, b]$.

Обозначим $\lambda = -\operatorname{sign}(a_0(x))\rho^n$ и введем в рассмотрение следующие угловые области или секторы в комплексной ρ -плоскости $S_k = \{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\pi k}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi(k+1)}{n}\}$, $k = \overline{0, 2n-1}$. Пусть S — некоторый сектор S_k , а T_c — область, получающаяся из S сдвигом на число $-c$. Пусть T есть некоторая область T_c .

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ корни n -й степени из -1 (характеристики уравнения (10)), занумерованные для $\rho \in T_c$ таким образом, что

$$\operatorname{Re}(\rho + c)\omega_1 \leq \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_n.$$

Пусть $W_p^k[a, b]$ ($1 \leq p \leq \infty$) есть нормированное пространство гладких функций на отрезке $[a, b]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k -ю производную из $L_p[a, b]$, $W_p^0[a, b] := L_p[a, b]$, а норма определяется формулой $\|f(x)\|_{W_p^k[a, b]} := \|f(x)\|_{L_p[a, b]} + \|f^{(k)}(x)\|_{L_p[a, b]}$. Кроме того, там, где это не вызовет разночтения, используем обозначения $\|f(x)\|_p := \|f(x)\|_{L_p[a, b]}$, $\|f(x)\|_{pk} := \|f(x)\|_{W_p^k[a, b]}$. Через $\|f(x)\|$ обозначим норму в пространстве $C[a, b]$.

Положим $\rho_j = \rho\omega_j$, $\rho_{js} = \rho(\omega_j - \omega_s)$ и введём функции

$$\eta(x) := \int_a^x |a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}} d\tau, \quad w(x) := \exp\left(-\frac{1}{n} \int_a^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau\right).$$

Сформулируем основные результаты, которые доказываются в данном разделе и которые опубликованы автором диссертации в статьях^{16,17}.

Теорема 1.1. *Предположим, что коэффициенты дифференциального уравнения (10) удовлетворяют следующим условиям:*

$$a_0(x) \in W_1^1[a, b], \quad a_j(x) \in L_1[a, b], \quad j = \overline{1, n}; \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in [a, b].$$

Тогда во всякой области T комплексной ρ -плоскости уравнение (10) имеет n линейно независимых решений $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$, $\dots$, $y_n(x, \rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом и имеющих асимптотику при $k = \overline{1, n}$ и $m = \overline{0, n-1}$

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^m |a_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}} w(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)} (1 + O(\psi(\rho))),$$

где

$$\eta(x) := \int_a^x |a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}} d\tau, \quad w(x) := \exp\left(-\frac{1}{n} \int_a^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau\right), \quad \psi(\rho) := f(\rho) + \frac{1}{|\rho|},$$

$$f(\rho) := \max_{j \neq s} \left\{ \left\| \int_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\eta(x) - \eta(t))} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\|, \left\| \int_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\eta(x) - \eta(t))} \frac{a'_0(t)}{a_0(t)} dt \right\| \right\},$$

c_{js} равно либо a , либо b в зависимости от условия $j < s$ или $j > s$. При этом $f(\rho) \rightarrow 0$, когда $|\rho| \rightarrow \infty$.

Из результата видно, что главный вклад в асимптотику решений вносят коэффициенты $a_0(x)$ и $a_1(x)$, причем в случае, когда $a'_0(x)$ и $a_1(x) \in L_1[a, b]$, вклад $a'_0(x)$ и $a_1(x)$ в асимптотику одинаков.

Во втором разделе даются асимптотические формулы для ф.м.р. линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром.

Используются следующие обозначения:

$\mathfrak{L}_p[a, b]$ ($1 \leq p \leq \infty$) есть нормированное пространство $n \times n$ матриц-функций (м.-ф.) с компонентами из пространства $L_p[a, b]$ и с нормой, определяемой формулой $\|X(t)\|_p := \max_{i,j} \|\{X(t)\}_{ij}\|_p$ для $n \times n$ м.-ф. $X(t)$

с компонентами $\{X(t)\}_{ij}$;

$\mathfrak{W}_p^1[a, b]$ ($1 \leq p \leq \infty$) есть нормированное пространство $n \times n$ м.-ф. с компонентами из пространства $W_p^1[a, b]$ и с нормой, определяемой формулой $\|X(t)\|_{p1} := \max_{i,j} \|\{X(t)\}_{ij}\|_{p1}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка на отрезке $[a, b]$

$$Y'(x) - A(x, \lambda)Y(x) = 0, \tag{11}$$

где $A(x, \lambda)$ и $Y(x)$ — $n \times n$ м.-ф., λ — комплексный параметр,

$$A(x, \lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda} A_{-1}(x, \lambda).$$

Под решением системы (11) понимается такая $n \times n$ м.-ф. $Y(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{W}_1^1[a, b]$, которая удовлетворяет уравнению (11) п.в. на $[a, b]$.

Введём следующие условия:

1° $A_1(x) \in \mathfrak{W}_1^1[a, b]$, $A_0(x) \in \mathfrak{L}_1[a, b]$, $A_{-1}(x, \lambda) \in \mathfrak{L}_1[a, b]$ по переменной x и $\|A_{-1}(\cdot, \lambda)\|_1 = O(1)$ при $|\lambda| \geq R$, где $R \gg 1$;

2° корни $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ характеристического уравнения $\det(\varphi E - A_1(x)) = 0$, где E обозначает единичную $n \times n$ матрицу, различны при всех $x \in [a, b]$ и отличны от нуля;

3° существует бесконечное подмножество Ω области $|\lambda| > R$, в котором при всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}(\lambda \varphi_1(x)) \leq \operatorname{Re}(\lambda \varphi_2(x)) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda \varphi_n(x))$$

при соответствующей нумерации функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$;

4° $A_{-1}(\cdot, \lambda)$ — аналитическая м.-ф. по λ при $|\lambda| > R$ в пространстве $\mathfrak{L}_1[a, b]$.

Обозначим через $\Psi(x)$ м.-ф., которая приводит матрицу $A_1(x)$ к диагональному виду

$$\Psi^{-1}(x) A_1(x) \Psi(x) = \operatorname{diag} \{ \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \} =: \Phi_1(x).$$

Положим $B_0(x) := \Psi^{-1}(x) A_0(x) \Psi(x) - \Psi^{-1}(x) \Psi'(x) - \Phi_0(x)$, где

$$\Phi_0(x) := \operatorname{diag} \{ \varphi_{01}(x), \varphi_{02}(x), \dots, \varphi_{0n}(x) \},$$

$$\varphi_{0j}(x) := \{ \Psi^{-1}(x) A_0(x) \Psi(x) - \Psi^{-1}(x) \Psi'(x) \}_{jj}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Обозначим

$$\chi_{ij}(x, \lambda) := \varphi_i(x, \lambda) - \varphi_j(x, \lambda) \quad (i \neq j), \quad \text{где } \varphi_j(x, \lambda) := \lambda \varphi_j(x) + \varphi_{0j}(x).$$

Введем числовую $n \times n$ матрицу L с компонентами $l(i, j)$ такими, что $l(i, j) := a$ при $i \leq j$ и $l(i, j) := b$ при $i > j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Сформулируем основную теорему данного раздела. Результат опубликован автором диссертации в статьях^{109, 25}.

Теорема 1.9. При условиях **1°** — **3°** существует ф.м.р. $Y(x, \lambda)$ системы (11), допускающая асимптотическое по $|\lambda| \rightarrow \infty$ ($\lambda \in \Omega$) представление

$$Y(x, \lambda) = \tilde{\Psi}(x) \exp \left(\lambda \int_a^x \Phi_1(\xi) d\xi \right) (E + \mathcal{E}(x, \lambda)),$$

¹⁰⁹Рыхлов В. С. Асимптотические формулы для решений дифференциальной системы первого порядка // Саратов: Саратовский университет, 1995. — 19 с. — Рук. деп. в ВИНТИ 19.10.95, № 2781-B95.

где $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) \exp\left(\int_a^x \Phi_0(\xi) d\xi\right)$, $\mathcal{E}(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{W}_1^1[a, b]$ и справедлива оценка

$$\|\mathcal{E}(\cdot, \lambda)\|_\infty \leq C \left(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|} \right),$$

в которой

$$\delta(\lambda) := \max_{i \neq j} \left\{ \left\| \int_{l(i,j)}^x \exp \left(\int_x^t \chi_{ji}(\xi, \lambda) d\xi \right) \{B_0(t)\}_{ij} dt \right\|_\infty \right\},$$

при этом $\delta(\lambda) \rightarrow 0$, когда $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Omega$. Если наряду с условиями $1^\circ) - 3^\circ)$ выполняется условие $4^\circ)$, то решение $Y(x, \lambda)$ является аналитической в $\mathfrak{W}_1^1[a, b]$ м.-ф. при $|\lambda| \gg 1$, $\lambda \in \Omega$.

Во **второй главе** рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор L , определяемый д.в.

$$\ell(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad x \in [0, 1], \quad (12)$$

где $p_j(x) \in L_1[0, 1]$, $j = \overline{1, n}$, с ненулевым коэффициентом при $n - 1$ -й производной и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (13)$$

На протяжении второй главы выполняется основное предположение: краевые условия (13) регулярны по Биркгофу (определение регулярных краевых условий совершенно идентично определению в книге⁷⁾).

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный или модифицированный тригонометрический ряд Фурье (см. формулы (14) далее), а также об оценке разности частичных сумм. Модификация тригонометрического ряда заключается в применении к обычному тригонометрическому ряду Фурье вполне конкретного ограниченного оператора V , выражающегося через коэффициент $p_1(x)$, а к разлагаемой функции оператора V^{-1} .

Введём следующие модули непрерывности

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{в случае } 1 \leq p < \infty,$$

$$\omega(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |f(t+h) - f(t)|.$$

Под $L_\infty[0, 1]$ понимается пространство $C[0, 1]$.

Наряду с оператором L вида (12)–(13) рассматривается дифференциальный оператор L_0 :

$$\ell_0(y) := y^{(n)}, \quad y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

порожденный простейшим д.в. и периодическими краевыми условиями

Числа $\lambda_{0\nu} := (2\nu\pi i)^n$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, есть с.з. оператора L_0 , а функции $e_\nu(x) := \exp(2\nu\pi i x)$ есть соответствующие собственные функции (с.ф.), т. е. система с.ф. есть обычная тригонометрическая система в экспоненциальной форме. Пусть λ_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$, есть с.з. оператора L .

Обозначим через D_δ область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающуюся из $\mathbb{C}$ в результате удаления множеств $\bigcup_{\nu=0}^{\infty} K_\delta(\lambda_\nu)$ и $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} K_\delta(\lambda_{0\nu})$, где используется обозначение $K_\delta(c) = \{\lambda : |\lambda - c| < \delta\}$ и $\delta > 0$ достаточно мало.

Из асимптотики с.з. оператора L следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ такая, что $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, контуры $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с $m \gg 1$, лежат в области D_δ и между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν .

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0 , соответственно, а через $G(x, \xi, \lambda)$ и $G_0(x, \xi, \lambda)$ — соответствующие функции Грина.

Пусть

$$S_m(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi d\lambda,$$

$$\sigma_m(f, x) \equiv S_{0m}(f, x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Известно⁷, что $S_m(f, x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν , для которых $|\lambda_\nu| < r_m$, а $\sigma_m(f)$ есть частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ по с.ф. оператора L_0 , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$, для которых $|\nu| \leq m$, т. е. частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$:

$$\sigma_m(f, x) := \sum_{k=-m}^m (f, e_k) e_k(x), \quad \text{где} \quad (f, e_k) := \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi.$$

Для $f(x)$ из $L_1[0, 1]$ обозначим

$$\Phi_m(x) = S_m(f, x) - V\sigma_m(V^{-1}f, x), \quad \Psi_m(x) = S_m(f, x) - \sigma_m(f, x), \quad (14)$$

где $V(x) = \exp\left(-\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau\right)$.

Введём условие

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad p_1(x) \in L_q[0, 1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (15)$$

Справедлива следующая теорема об оценке разности $\Phi_m(x)$.

Теорема 2.1. При условии (15) для любого компакта $K \subset (0,1)$ и натурального $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f,L,K)A_m, \quad (16)$$

где

$$A_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}.$$

Для формулировки теоремы об оценке разности $\Psi_m(x)$ введём следующие обозначения:

— для функции $h(x) \in C[0,1]$ положим

$$H_q(h,m) := \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} h^q(\xi) d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty, \quad H_\infty(h,m) := 1, \quad (17)$$

— для функции $g(x) \in L_q[0,1]$ положим

$$\theta_q(g,\delta) := \sup_{\tau \in [0,\delta]} \theta_{1q}(g,\tau) \quad \text{при } 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \theta_\infty(g,\delta) \equiv 1, \quad (18)$$

где

$$\theta_{1q}(g,\tau) := \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty, \quad (19)$$

$$\hat{\theta}_q(g,\delta) = \sup_{\tau \in [0,\delta]} \hat{\theta}_{1q}(g,\tau) \quad \text{при } 1 \leq q < \infty \quad \text{и} \quad \hat{\theta}_\infty(g,\delta) \equiv 1,$$

где

$$\hat{\theta}_{1q}(g,\tau) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left(g, \frac{1}{k} \right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при } 1 \leq q < \infty.$$

Теорема 2.2. При условии (15) для любого компакта $K \subset (0,1)$ и любого натурального $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f,L,K)B_m, \quad (20)$$

где

$$B_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + 1 + H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \times \right. \\ \times \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left(p_1, \frac{1}{k} \right) + \\ \left. + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}.$$

Далее рассматривается случай, когда функции $\omega(f, \delta)_r$ и $\omega(p_1, \delta)_q$ оцениваются сверху медленно меняющимися функциями. Такие функции были введены Й. Караматой¹¹⁰ в 1930 году.

В соответствии с теорией из книги¹¹¹ Е. Сенеты, положительная непрерывная в проколотовой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \text{для любого } \gamma > 0,$$

называется *правильно меняющейся функцией* (п.м.ф.) в нуле порядка $\rho \in \mathbb{R}$. При $\rho = 0$ п.м.ф. называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.) в нуле.

Предположим

$$\omega(f, \delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(p_1, \delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (21)$$

где функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2.6 (медленного изменения (МИ)). Существует интервал $(0, \varepsilon_0)$, на котором

- (а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;
- (б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией и обладает свойством $\Omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$;
- (в) для любого $\gamma > 0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma) \sim \Omega(\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$, т. е. существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1 \Omega(\delta) \leq \Omega(\delta^\gamma) \leq C_2 \Omega(\delta).$$

Теорема 2.9. Если выполняются условия (15), (21), функции $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ 2.6 и таковы, что

$$\ln t \, \Omega_1\left(\frac{1}{t}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{t}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (22)$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0, \quad (23)$$

и справедливы следующие оценки при $t \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\ln \Omega_1\left(\frac{1}{t}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{t}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{t}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

¹¹⁰Karamata J. Sur certains "Tauberian theorems" de M.M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). — 1930. — Vol. 3. — Pp. 33–48.

¹¹¹Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. / Под ред. В. М. Золотарева. — М.: Наука. Физматлит, 1985. — 144 с.

Теорема 2.10. Пусть выполняются условия (15), (21), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ 2.6. Если, к тому же, выполняются условия (22) и

$$\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ имеет место равномерность

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0, \quad (24)$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\begin{aligned} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) & \left(\ln m \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \right. \\ & \left. + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right). \end{aligned}$$

Следствиями теорем 2.9 и 2.10 являются результаты для случая

$$\omega(f, \delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega(p_1, \delta)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right), \quad \delta \rightarrow +0. \quad (25)$$

Теорема 2.11. Если выполняются условия (15), (25) и $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0,1)$ имеет место равномерность (23), и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right).$$

Теорема 2.12. Если выполняются условия (15), (25) и $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0,1)$ имеет место равномерность (24), и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$:

— в случае $\beta q = 1$ и $1 \leq q < \infty$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{(\ln \ln m)^{1/q}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right), \quad (26)$$

— а в остальных случаях ($\beta q \neq 1$ и $1 \leq q < \infty$ или $q = \infty$)

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, p_1, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \quad (27)$$

Точность теорем 2.11 и 2.12 показана автором диссертации в работе¹⁴.

Оценки для $\Psi_m(x)$ в теоремах 2.2 и 2.10 получаются из оценок для $\Phi_m(x)$ в теоремах 2.1 и 2.9 с использованием соответствующих аналогов теоремы Г. Штейнгауза¹¹². Дадим формулировку этой теоремы по книге Н. К. Бари¹¹³.

Теорема 2.26. (Г. Штейнгауза) *Если $f(x) \in L_1[0,1]$, $\mathcal{W}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 на $[0,1]$ и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x)\|_{C[0,1]} = 0. \quad (28)$$

В работе автора диссертации¹⁴ равносходимость вида (28), но в метрике пространства $C(K)$ для любого компакта $K \subset (0,1)$ была установлена при других условиях на функции $f(x)$ и $\mathcal{W}(x)$ первоначально в частном случае, а затем — в самом общем случае¹¹⁴. Подробно эти результаты изложены в статье⁸² и в более раннем варианте — в совместной статье с С. Н. Кабановым¹¹⁵ (аналоги теоремы Штейнгауза полностью получены автором диссертации).

Аналоги теоремы Штейнгауза получали и другие математики, в частности, М. М. Бурлуккая и А. П. Хромов¹¹⁶ — для функционально-дифференциальных операторов.

Для формулировки аналога теоремы Штейнгауза обозначим

$$\Theta_m(x) := \mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x).$$

Функцию $\Theta_m(x)$ назовём разностью частичных тригонометрических сумм.

Для функции $\mathcal{W}(x)$ используем представление

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_0 + \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad \mathcal{W}_0 = \text{const}. \quad (29)$$

Введём условие:

$$f(x) \in L_r[0,1], \quad g(x) \in L_q[0,1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (30)$$

Справедлива следующая общая теорема об оценке.

¹¹²Steinhaus H. Sur le développement du produit de deux fonctions en une série de Fourier // Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie. — Kraków, 1913. — Pp. 113–116.

¹¹³Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.

¹¹⁴Рыхлов В. С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза // Функц. анализ. Спектральная теория. Вып. 22. — Ульяновск: УГПИ имени И. Н. Ульянова, 1984. — С. 102–110.

¹¹⁵Кабанов С. Н., Рыхлов В. С. Скорость равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза и оптимизация ее порядка в одном частном случае. — Саратов: Саратовский университет, 1990. — 17 с. — Рукопись деп. в ВИНТИ 13.06.90, № 4378-В90.

¹¹⁶Бурлуккая М. Ш., Хромов А. П. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 2011. — Т. 90, № 1. — С. 22–33.

Теорема 2.28. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (29), а функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию (30). Тогда для любого компакта $K \subset (0,1)$ и любого натурального $m \gg 1$ имеет место оценка

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f,g,K)Q_m,$$

где

$$Q_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r H_q(\theta_q(g, \cdot), m) + \omega \left(g, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}.$$

Предположим выполняются оценки

$$\omega(f, \delta)_r = O(v(\delta)), \quad \omega(g, \delta)_q = O(w(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (31)$$

где $v(\delta)$ и $w(\delta)$ удовлетворяют условию МИ 2.6.

Справедлив следующий аналог теоремы Штейнгауза.

Теорема 2.32. Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид (29), выполняются условия (30) и (31). Тогда, если

$$v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w, m) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (32)$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ имеет место равномерность

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0. \quad (33)$$

При этом справедлива следующая оценка при $m \gg 1$

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f,g,K) \left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w, m) + w\left(\frac{1}{m}\right) \right). \quad (34)$$

Следствием теоремы 2.32 является аналог теоремы Штейнгауза (теорема 2.37) в случае оценки модулей непрерывности логарифмическими функциями.

В работах автора диссертации^{14,82} была показана точность полученного в теореме 2.37, а следовательно, и в 2.32, результатов.

В **третьей главе** рассматривается полиномиальная о.-ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$, порожденная д.в. (7) и краевыми условиями (8), которые, не нарушая общности, можно считать нормированными (в смысле определения из статьи⁸⁵), т.е. имеющими вид

$$\begin{aligned} U_i(y, \lambda) &\equiv U_{i0}(y, \lambda) + U_{i1}(y, \lambda) := \\ &:= \sum_{j+s \leq \kappa_i} \lambda^s (\alpha_{ijs} y^{(j)}(0) + \beta_{ijs} y^{(j)}(1)) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i$ есть порядок i -го краевого условия ($\varkappa_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), $\varkappa := \varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_n$ есть суммарный порядок краевых условий (35).

Исследуется вопрос об m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноте в $L_2[0,1]$ к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ вида (7), (35) в ранее не исследованных случаях.

В разделе 3.1 вводятся обозначения и даются необходимые определения, в частности, известные определения с.з., к.ф., производных по Келдышу n - и m -цепочек ($1 \leq m \leq n - 1$) из работ^{83,84,7,85}.

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. $L(\lambda)$. Предполагается, что множество Λ счетное.

В разделе 3.2 аналогично А. А. Шкаликову⁸⁵ дается классификация о.-ф. $L(\lambda)$ по степени усиления их нерегулярности.

Рассмотрим уравнение $\ell(y, \lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения (характеристики) попарно различны и отличны от нуля. Система функций

$$y_j(x, \lambda) = e^{\lambda \omega_j x}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (36)$$

является ф.с.р. уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$.

В статье⁸⁵ классификация о.-ф. была дана для самых общих о.-ф., коэффициенты д.в. которых могут зависеть от x . Для проведения этой классификации требуется накладывать дополнительные условия гладкости на коэффициенты о.-ф., чтобы получить достаточное число членов уточнённой асимптотики ф.с.р. по спектральному параметру, и это уточнение продолжается неограниченно.

В случае д.в. (7) ф.с.р. имеет самый простой вид (36), классификация сильно упрощается и становится конечной, в отличие от классификации в статье⁸⁵.

Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} \hat{U}_j(\lambda) &:= \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} U_1(y_j), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} U_n(y_j, \lambda) \right)^T, \\ \hat{V}_j(\lambda) &:= \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} U_{10}(y_j, \lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} U_{n0}(y_j, \lambda) \right)^T, \\ \hat{W}_j(\lambda) &:= e^{-\lambda \omega_j} \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} U_{11}(y_j, \lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} U_{n1}(y_j, \lambda) \right)^T. \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{U}_j(\lambda) = \hat{V}_j(\lambda) + e^{\lambda \omega_j} \hat{W}_j(\lambda)$.

При необходимости аргумент λ у функций и в.-ф. будем опускать в тех случаях, когда это не мешает пониманию формул.

С учётом этих обозначений х.о. для $L(\lambda)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det (U_i(y_j, \lambda))_{i,j=1}^n = \lambda^{\varkappa} \left| \hat{U}_1(\lambda), \hat{U}_2(\lambda), \dots, \hat{U}_n(\lambda) \right| = \\ &= \lambda^{\varkappa} \left| \hat{V}_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1} \hat{W}_1(\lambda), \hat{V}_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2} \hat{W}_2(\lambda), \dots, \hat{V}_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n} \hat{W}_n(\lambda) \right|.\end{aligned}$$

Отличные от нуля с.з. $L(\lambda)$ есть нули $\Delta(\lambda)$.

Обозначим через Ω множество, содержащее 0 и всевозможные суммы различных ω_j , $j = \overline{1, n}$, состоящие из 1, 2, ..., n слагаемых, то есть множество Ω содержит точки 0, ω_k , $\omega_i + \omega_j$ ($i \neq j$), $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ ($i \neq j \neq k$), ..., $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$. Совпадающие точки $\omega \in \Omega$, полученные разными способами (разные слагаемые в сумме), считаем разными точками Ω .

Справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa} \sum_{\omega \in \Omega} F^{\omega}(\lambda) e^{\lambda\omega}, \quad F^{\omega}(\lambda) = F_0^{\omega} + \frac{1}{\lambda} F_1^{\omega} + \dots + \frac{1}{\lambda^{\varkappa}} F_{\varkappa}^{\omega}. \quad (37)$$

В этом представлении для $\omega = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \dots + \omega_{j_k}$ имеет место равенство $F^{\omega}(\lambda) = |\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_{j_1-1}, \hat{W}_{j_1}, \hat{V}_{j_1+1}, \dots, \hat{V}_{j_k-1}, \hat{W}_{j_k}, \hat{V}_{j_k+1}, \dots, \hat{V}_n|$.

Положим $M = \text{conv}\{\Omega\}$ (может случиться, что M — отрезок).

Введем обозначение $[\eta(x, \lambda)]_r = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r}$ при значениях $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ для функции $\eta(x, \lambda) = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r} + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^{r+1}} + \dots$.

Для $r \in \{0, 1, \dots, \varkappa\}$ через $(M_{\Delta})_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек ω , для которых $[F^{\omega}(\lambda)]_r \neq 0$. Справедливы включения

$$(M_{\Delta})_0 \subset (M_{\Delta})_1 \subset \dots \subset (M_{\Delta})_{\varkappa} \subset M.$$

Аналогично А. А. Шкаликову⁸⁵ дадим следующие определения.

О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *регулярной* (по Биркгофу), если $(M_{\Delta})_0 = M$.

О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *почти регулярной* (по Стоуну), если $(M_{\Delta})_{\varkappa} = M$.

О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *слабо нерегулярной* (или *нормальной* в терминологии статьи⁸⁵), если многоугольник $(M_{\Delta})_{\varkappa}$ имеет не менее двух точек касания с M , причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам M , на которых лежат точки касания, разбивают комплексную плоскость на углы раствора $< \pi$. Если M есть отрезок, то о.-ф. $L(\lambda)$ называем *слабо нерегулярной*, когда $(M_{\Delta})_{\varkappa} = M$.

О.-ф. $L(\lambda)$, которая не удовлетворяет предыдущему определению, назовём *сильно нерегулярной*.

Таким образом, о.-ф. $L(\lambda)$ сильно нерегулярна, если ее резольвента имеет экспоненциальный рост в λ -плоскости не менее, чем в полуплоскости.

Многоугольник $(M_{\Delta})_{\varkappa}$ кратко обозначим M_{Δ} и назовём его характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$. Из представления (37) видно, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), т. е. первого порядка и нормального типа. Х.м. M_{Δ} есть в

точности сопряженная диаграмма (с.д.) $\bar{I}_\Delta$ функции $\Delta(\lambda)$, в соответствии с теорией из книги¹¹⁷ (необходимые сведения приводятся в приложении А).

Класс слабо нерегулярных о.-ф. $L(\lambda)$ был введен А. А. Шкаликовым⁸⁵ и исследован с точки зрения n -кратной полноты к.ф. в специально построенных гильбертовых пространствах и, в частности, в пространстве $L_2[0,1]$. Этот класс о.-ф. существенно шире первых двух классов (регулярных и почти регулярных). Из результатов статьи⁸⁵ следует, что если о.-ф. $L(\lambda)$ из этого класса, то система её к.ф. n -кратно полна в $L_2[0,1]$.

Исследование кратной полноты для о.-ф. из класса сильно нерегулярных о.-ф. представляет наибольшую трудность и проведено лишь для отдельных множеств о.-ф. $L(\lambda)$.

В разделе 3.3 предлагается новый подход к исследованию кратной полноты системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$, использующий понятие порождающей функции (п.ф.), а именно, метод *обобщённых п.ф.*

Функцию $g(x, \lambda)$, $x \in [0,1]$, $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$, назовём *порождающей* для системы к.ф. $L(\lambda)$, если функции $\frac{\partial^k g(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \Big|_{\lambda=\lambda_\nu}$, где $k \in \overline{\tau_\nu, s_\nu}$, $0 \leq \tau_\nu \leq s_\nu$ и $\lambda_\nu \in \Lambda$, являются к.ф. $L(\lambda)$, соответствующими с.з. λ_ν кратности $s_\nu + 1$; τ_ν определяется условием $\frac{1}{k!} \frac{\partial^k g(x, \lambda)}{\partial \lambda^k} \Big|_{\lambda=\lambda_\nu} \equiv 0$, $k = \overline{0, \tau_\nu - 1}$, $\frac{1}{\tau_\nu!} \frac{\partial^{\tau_\nu} g(x, \lambda)}{\partial \lambda^{\tau_\nu}} \Big|_{\lambda=\lambda_\nu} \neq 0$.

Рассматривается только случай $D = \mathbb{C}$ и п.ф. есть решения уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$. В этом случае п.ф. являются ц.ф.э.т. по λ . Тогда¹¹⁷ для каждого фиксированного $x \in [0,1]$ можно построить сопряжённую диаграмму $M_{g(x, \lambda)} := \bar{I}_{g(x, \lambda)}$, которая является многоугольником.

Многоугольник

$$M_{g(\cdot, \lambda)} := \operatorname{conv}_{x \in [0,1]} M_{g(x, \lambda)}, \quad (38)$$

назовём *характеристическим многоугольником* п.ф. $g(x, \lambda)$.

Будем говорить, что п.ф. $g(x, \lambda)$ *удовлетворяет условию* (α) (обозначаем $g(x, \lambda) \in (\alpha)$), если M_Δ имеет не менее двух точек касания с $M_{g(\cdot, \lambda)}$, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам $M_{g(\cdot, \lambda)}$, на которых лежат точки касания M_Δ , разбивают комплексную плоскость на секторы раствора меньше π .

В основе стандартной схемы доказательства кратной полноты (сокращённо: схема ДКП) лежит следующая лемма.

Лемма 3.14. *Если $g(x, \lambda) \in (\alpha)$ и $h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x))^T$ ортогональна всем производным m -цепочкам, соответствующим системе к.ф. Y , то при дополнительном условии ортогональности $h(x)$ некоторому конечному набору в.-ф. справедливо равенство*

$$H_m(g, \lambda) \equiv 0,$$

¹¹⁷ Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

где

$$H_m(g, \lambda) := \int_0^1 g(x, \lambda) h_m(x, \lambda) dx, \quad h_m(x, \lambda) := \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} \bar{h}_j(x).$$

Схема ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ предполагает наличие некоторого набора п.ф. $g_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$, удовлетворяющих условию (α) . Тогда на основании леммы 3.14 получим

$$H_m(g_i, \lambda) \equiv 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (39)$$

при условии ортогональности в.-ф. $h(x)$ всем производным m -цепочкам, соответствующим системе к.ф. и, возможно, некоторому дополнительному конечному множеству в.-ф.

Если набор п.ф. достаточен для того, чтобы из (39) получить соотношения

$$h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_m(x) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in [0, 1], \quad (40)$$

то это означает, что имеет место m -кратная полнота к.ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.

Существенным условием описанной схемы ДКП системы к.ф. является наличие достаточного количества п.ф. $g_i(x) \in (\alpha)$.

При исследовании спектральных свойств дифференциальных о.-ф. обычно используются^{7, 88, 89, 95} п.ф. $g_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, которые получаются из х.о. $\Delta(\lambda) = \det\{U_j(y_k(x, \lambda), \lambda)\}_{j, k=1}^n$ путем замены i -й строки определителя строкой $(y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda))$, где $\{y_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$ в рассматриваемом случае есть система решений (36).

Такие п.ф. будем называть *классическими* п.ф. (или, кратко, к.п.ф.). Они являются ц.ф.э.т. по λ .

Классические п.ф. удачно применялись при рассмотрении о.-ф. $L(\lambda)$ с распадающимися или полураспадающимися краевыми условиями при некоторых дополнительных предположениях на характеристики^{88, 89, 95}.

Проведение описанной схемы ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ сильно усложняется или вообще не проходит, если либо $g_i(x, \lambda) \notin (\alpha)$ для всех $i = \overline{1, n}$, либо из набора соотношений (39) проблематично вывести равенства (40). Следуя описанной схеме, в этих ситуациях не удастся получить m -кратную полноту к.ф. в $L_2[0, 1]$.

Чтобы расширить возможности описанной схемы ДКП системы к.ф., автор диссертации предложил^{99, 100} использовать обобщённые п.ф. (или, кратко, о.п.ф.) вида

$$g(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) := \gamma_1(\lambda)g_1(x, \lambda) + \gamma_2(\lambda)g_2(x, \lambda) \dots + \gamma_n(\lambda)g_n(x, \lambda), \quad (41)$$

где $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \dots, \gamma_n(\lambda))^T \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ есть вектор-параметр (в.-п.). Обозначим

$$\hat{\Gamma}(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} \gamma_1(\lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} \gamma_n(\lambda) \right)^T.$$

Так как $g_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, являются решениями уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ и эти функции линейно независимы, то о.п.ф. (41) включают в себя все п.ф., являющиеся решениями уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$.

Для о.п.ф. $g(x, \lambda, \Gamma(\lambda))$ удобно использовать следующее представление

$$g(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) := \lambda^{\varkappa} \begin{vmatrix} 0 & y_1(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) \\ -\hat{\Gamma}(\lambda) & \hat{U}_1(\lambda) & \dots & \hat{U}_n(\lambda) \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Обозначим через Ω_k подмножество тех точек из Ω , которые представляются в виде $\omega_k + \dots$. Через Ω^k обозначим множество $\Omega \setminus \Omega_k$.

Считаем далее, что $\gamma_j(\lambda) = \gamma_{j, \varkappa_j} \lambda^{\varkappa_j} + \gamma_{j, \varkappa_j - 1} \lambda^{\varkappa_j - 1} + \dots + \gamma_{j0}$, $j = \overline{1, n}$.

Справедливо представление

$$\begin{aligned} g(x, \lambda, \Gamma) &= \lambda^{\varkappa} \sum_{k=1}^n y_k(x, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{U}_1, \dots, \hat{U}_{k-1}, \hat{\Gamma}, \hat{U}_{k+1}, \dots, \hat{U}_n \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^{\varkappa} \sum_{k=1}^n e^{\lambda \omega_k x} \begin{vmatrix} \dots, \hat{V}_{k-1} + e^{\lambda \omega_{k-1}} \hat{W}_{k-1}, \hat{\Gamma}, \hat{V}_{k+1} + e^{\lambda \omega_{k+1}} \hat{W}_{k+1}, \dots \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^{\varkappa} \sum_{k=1}^n \sum_{\omega \in \Omega^k} G_k^{\omega}(\lambda) e^{\lambda(\omega_k x + \omega)}, \quad (43) \end{aligned}$$

определители $G_k^{\omega}(\lambda)$ составлены из столбцов $\hat{V}_j$, $\hat{W}_j$, $\hat{\Gamma}$ и ограничены по λ .

Таким образом, п.ф. $g(x, \lambda, \Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т. по λ . Для такой функции уже был ранее введен х.м. Так как для фиксированной о.-ф. $L(\lambda)$ вид этого многоугольника определяется лишь в.-п. $\Gamma(\lambda)$, то х.м. обобщённой п.ф. $g(x, \lambda, \Gamma(\lambda))$ будем называть также х.м. вектор-параметра $\Gamma(\lambda)$ и обозначать $M(\Gamma(\lambda))$ или просто $M(\Gamma)$.

Будем говорить также, что $\Gamma(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (α) и писать $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, если о.п.ф. $g(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) \in (\alpha)$.

Таким образом, из схемы ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ следует, что если $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, то при условии ортогональности в.-ф. $h(x)$ всем производным m -цепочкам, соответствующим системе к.ф. и, возможно, некоторому дополнительному конечному множеству в.-ф. из $L_2[0, 1]$, на основании леммы 3.14 получим тождество $H_m(g(x, \lambda, \Gamma(\lambda)), \lambda) \equiv 0$.

В разделе 3.4 доказываются достаточные условия кратной полноты системы к.ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$.

Теорема 3.21. *Если существуют n линейно независимых в.п. $\Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda), \dots, \Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$, то система к.ф. $L(\lambda)$ n -кратно полна в $L_2[0,1]$ с нулевым дефектом в случае $\varkappa_i \leq n-1, i = \overline{1, n}$, и с возможным конечным дефектом в противном случае.*

В случае $\Gamma(\lambda) = V_j(\lambda)$ или $\Gamma(\lambda) = W_j(\lambda)$ в формуле (43) для о.п.ф. очень много экспонент зануляется, ввиду обращения в нуль соответствующих коэффициентов из-за наличия в определяющих их определителях одинаковых столбцов. Поэтому при поиске в.п. $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$ для о.п.ф. естественными кандидатами являются именно векторы $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$

При проверке условия (α) для в.п. $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$ удобно пользоваться довольно простыми достаточными условиями, даваемыми следующими двумя леммами.

Лемма 3.22. *Справедливы включения $M(V_j) \subset \text{conv}\{M_\Delta, \Omega_j\}$, $j = \overline{1, n}$.*

Лемма 3.23. *Справедливы включения $M(W_j) \subset \text{conv}\{M_\Delta, \Omega^j\}$, $j = \overline{1, n}$.*

Специфическая структура функции $g(x, \lambda, \Gamma(x))$, определяемая формулой (42), позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.25. *Если существуют m пар векторов $\{V_{j_s}, W_{j_s}\}$, $s = \overline{1, m}$, таких, что $V_{j_s}, W_{j_s} \in (\alpha)$, то имеет место m -кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы к.ф. $L(\lambda)$ с возможным конечным дефектом.*

В разделе 3.5 рассмотрены три конкретных примера сильно нерегулярных о.-ф. третьего порядка вида (7), (35) идентичной структуры, но с различным расположением характеристик. В результате исследования кратной полноты в $L_2[0,1]$ с помощью о.п.ф. с использованием теорем 3.21 и 3.25 и лемм 3.22 и 3.23 удалось установить, что кратность полноты у этих о.-ф. различна, а именно, имеет место 1-, 2- и 3-кратная полнота с возможным конечным дефектом.

В разделе 3.6 рассматривается о.-ф. $L^1(\lambda)$, порожденная д.в. $\ell(y, \lambda)$ вида (??) и распадающимися краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n},$$

где $\alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq l \leq n-1$.

Предполагается, что характеристики $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала, (или на одном луче) в количествах k и $n-k$ ($0 \leq k \leq n$). Не нарушая общности можно считать, что корни ω_j расположены следующим образом

$$\omega_n e^{i(\pi-\varphi)} < \omega_{n-1} e^{i(\pi-\varphi)} < \dots < \omega_{k+1} e^{i(\pi-\varphi)} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k, \quad (44)$$

где $0 < |\varphi| < \pi$. В случае $k = n$ считаем, что $\varphi = 0$.

Решается задача о нахождении условий на параметры о.-ф. $L^1(\lambda)$, при которых имеет место m -кратная полнота ($1 \leq m \leq n$) системы её к.ф. в $L_2[0,1]$.

Найдены условия на параметры n , l и k , при которых реализуется схема ДКП системы к.ф. $L^1(\lambda)$ с использованием только к.п.ф.

Обозначим $[p, q]_- = \min\{p, q\}$, $[p, q]_+ = \max\{p, q\}$. Положим при $j = \overline{1, n}$ $a_{ij} := \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s} \omega_j^\nu$, $i = \overline{1, l}$; $b_{ij} := \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s} \omega_j^\nu$, $i = \overline{l+1, n}$.

Введём следующие условия

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{1, k+l-n; k+1, n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{k+l-n+1, k}} \neq 0 \quad \text{при } n-k \leq l; \quad (45)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{n-l+1, n}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{1, n-l}} \neq 0 \quad \text{при } n-k \geq l; \quad (46)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{1, l}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{l+1, n}} \neq 0 \quad \text{при } k \leq l; \quad (47)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{k-l+1, k}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{1, k-l; k+1, n}} \neq 0 \quad \text{при } k \geq l. \quad (48)$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.26. Если $[k, n-k]_+ \leq l$ и выполняются условия (45) и (47), то при $m = 2(n-l)$ система корневых функций $L^1(\lambda)$ m -кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum_{i=l+1}^n [m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема 3.27. Если $[k, n-k]_- \geq l$ и выполняются условия (46) и (48), то при $m = 2l$ система корневых функций $L^1(\lambda)$ m -кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_2 := \sum_{i=1}^l [m-1-\varkappa_i]_+$.

Доказательство этих теорем проводится в соответствии с приведенной в разделе 3.3 схемой ДКП с использованием к.п.ф.

В случае $[k, n-k]_- < l < [k, n-k]_+$, который исключен из рассмотрения в теоремах 3.26 и 3.27, использование к.п.ф. не приводит к результату, так как, вообще говоря, к.п.ф. не удовлетворяют условию (α) . В этом случае найдены о.п.ф., удовлетворяющие условию (α) , что позволило реализовать схему ДКП и получить условия кратной полноты к.ф. $L^1(\lambda)$.

Из (44)) следует, что многоугольник M есть четырехугольник $A'B'C'D'$, где $A' = 0$ и $B' = \omega_1 + \dots + \omega_k$ — крайние левая и правая точки, лежащие на вещественной оси, $C' = \omega_1 + \dots + \omega_n$ и $D' = \omega_{k+1} + \dots + \omega_n$, причем прямая $C'D'$ параллельна вещественной прямой, т.е. M есть параллелограмм.

В случае $k \geq n-k$ называем стороны $A'B'$ и $D'C'$ «длинными» сторонами $A'B'C'D'$. Стороны $A'D'$ и $B'C'$ в таком случае будем называть «короткими». В случае $k \leq n-k$ «длинными» сторонами, наоборот, будем называть стороны $A'D'$ и $B'C'$, а «короткими» — стороны $A'B'$ и $A'D'$.

Введём многоугольник M_{n-l} , который является выпуклой оболочкой всевозможных точек множества Ω , являющихся суммами различных характеристик в количестве ровно $n - l$ штук.

Вершины многоугольника M_{n-l} , лежащие на «длинных» сторонах параллелограмма, будем называть *главными вершинами*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.29. *Если $[k, n - k]_- < l < [k, n - k]_+$, $m = [k, n - k]_-$ и х.м. M_Δ о.-ф. $L^1(\lambda)$ содержит главные вершины многоугольника M_{n-l} , то система его к.ф. m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.*

В разделе 3.7 рассматривается дифференциальный оператор L^0 пятого порядка в пространстве $L_2[0, 1]$ вида

$$\ell^0(y) := y^{(5)}(x), \quad U_\nu^0(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1, 5},$$

где $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$, $\nu = \overline{1, 5}$.

Исследуется вопрос о полноте системы к.ф. этого оператора в $L_2[0, 1]$.

Интерес к данному оператору вызван тем, что при соответствующем выборе коэффициентов α_ν и β_ν краевых условий этот оператор может быть и регулярным по Биркгофу и слабо или сильно нерегулярным.

Основной теоремой раздела 3.7 является следующая теорема.

Теорема 3.49. *Предположим, что или $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1, 5}$, или $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1, 5}$. Тогда либо система к.ф. L^0 полна в пространстве $L_2[0, 1]$, либо этот оператор вырожден, то есть, или не имеет вообще с.з., или имеет конечное число с.з., или все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.*

Утверждение теоремы 3.49 есть следствие теоремы 3.50 о кратной полноте в $L_2[0, 1]$ системы к.ф. тесно связанной с оператором L^0 оператор-функции $L^0(\rho) := L^0 + \rho^5 E$, где $\lambda = -\rho^5$, порожденной д.в.

$$\ell^0(y, \rho) := y^{(5)}(x) + \rho^5 y, \quad x \in [0, 1],$$

и теми же самыми краевыми условиями, что и в случае оператора L^0 .

Доказательство теоремы 3.50 проводится в соответствии со схемой ДКП системы к.ф. с существенным использованием нетривиально построенных обобщённых п.ф. и теории, изложенной в разделах 3.2, 3.3 и 3.4.

Случай дифференциального оператора L^0 произвольного нечетного порядка $n \geq 7$ также исследован автором диссертации¹⁰³. Но главные трудности общего случая возникают уже при $n = 5$.

В **приложении А** приведены вспомогательные результаты — сведения из книги Б. Я. Левина¹¹⁷ о сопряженной диаграмме целой функции экспоненциального типа и ее связи с индикаторной диаграммой, даваемой теоремой Д. Пойа (D. Pólya).

В **заключении** излагаются итоги выполненного исследования, рекомендации по использованию полученных результатов и перспективы дальнейшего развития темы.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору Августу Петровичу Хромову за полезные обсуждения содержания диссертации, постоянную поддержку и ценные советы.

Публикации автора по теме диссертации

Основные публикации в журналах Web of Science, Scopus, RSCI и включенных в Перечень ВАК РФ:

1. Rykhlov V. S. On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -st derivative // Soviet Math. Dokl. — 1984. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 777–779.
2. Rykhlov V. S. Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n - 1)$ -th derivative // Differential Equations. — 1990. — Vol. 26, no. 6. — Pp. 704–715.
3. Rykhlov V. S. Completeness of eigenfunctions of quadratic pencils of ordinary differential operators // Russian Math. (Iz. VUZ)ю — 1992. — Vol. 36, no. 3. — Pp. 33–42.
4. Rykhlov V. S. Asymptotics of the system of solutions of a general differential equation with parameter // Ukr. Math. J. — 1996. — Vol. 48, no. 1. — Pp. 108–121.
5. Rykhlov V. S. Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators // Mat. Fiz. Anal. Geom. — 1996. — Vol. 3, no. 3/4. — Pp. 406–411.
6. Rykhlov V. S. Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators // Res. Math. — 1996. — Vol. 29. — Pp. 153–168.
7. Rykhlov V. S. On the completeness of eigenfunctions of differential pencils of operators // Russian Math. Surveys. — 1996. — Vol. 51, no. 5. — Pp. 926–927.
8. Rykhlov V. S. Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Res. Math. — 1999. — Vol. 36. — Pp. 342–353.
9. Rykhlov V. S. Completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients // Russian Math. (Iz. VUZ). — 2009. — Vol. 53, no. 6. — Pp. 33–43.
10. Rykhlov V. S. Completeness of root functions of the simplest strongly irregular differential operators with two-point two-term boundary conditions // Doklady Mathematics. — 2009. — Vol. 80, no. 2. — Pp. 762–764.
11. Рыхлов В. С. О свойствах собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. — 2009. — Т. 9, № 1. — С. 31–44.
12. Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. — 2010. — Т. 10, № 2. — С. 24–34.
13. Рыхлов В. С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. — 2013. — Т. 13, № 1. — С. 21–26.

14. Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients // Res. Math. — 2015. — Vol. 68, no. 3–4. — Pp. 427–440.

15. Рыхлов В. С. Разложение по корневым функциям сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов второго порядка с кратными характеристиками // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 165–174.

16. Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions for a certain class of ordinary differential pencils with constant coefficients // Lobachevskii J. Math. — 2017. — Vol. 38, no. 4. — Pp. 730–740.

17. Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients // Res. Math. — 2017. — Vol. 72, no. 1–2. — Pp. 281–301.

18. Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 134–151.

19. Rykhlov V. S. On multiple completeness of root functions for ordinary differential polynomial pencils with constant coefficients // J. Math. Sci. — 2020. — Vol. 250, no. 4. — Pp. 340–361.

20. Rykhlov V. S. On eigenfunction expansions for a class of irregular quadratic pencils of second-order differential operators // Lobachevskii J. Math. — 2021. — Vol. 42, no. 5. — Pp. 1014–1026.

21. Rykhlov V. S. On the completeness of eigenfunctions of one 5th-order differential operator // J. Math. Sci. — 2024. — Vol. 282, no. 2. — Pp. 254–291.

Иные публикации:

22. Рыхлов В. С. О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегр. преобр. и спец. функции: Информ. бюллетень. — 2001. — Т. 2, № 1. — С. 85–103.

23. Рыхлов В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ. — 2015. — № 1(26). — С. 69–86.

24. Рыхлов В. С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза // ТВИМ. — 2015. — № 3(28). — С. 62–81.

25. Рыхлов В. С. Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов третьего порядка // ТВИМ. — 2016. — № 2(31). — С. 87–103.

26. Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // ТВИМ. — 2018. — № 4(41). — С. 90–112.