

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи



РОСТУНЦОВА Алёна Александровна

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ  
ПРИ УСИЛЕНИИ И ГЕНЕРАЦИИ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ  
В СИСТЕМАХ ТИПА ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК – ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА**

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Рыскин Н.М.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Автомодельное усиление микроволновых импульсов при черенковском взаимодействии электронного пучка с попутной электромагнитной волной.....	17
1.1. Вводные замечания.....	17
1.2. Уравнения нелинейной нестационарной теории .....	19
1.2.1. Уравнения движения электронов .....	20
1.2.2. Уравнение возбуждения .....	22
1.2.3. Конечно-разностная схема для численного интегрирования уравнений .....	22
1.3. Автомодельное усиление импульсов в приближении малого изменения энергии электронов .....	23
1.3.1. Автомодельное решение.....	23
1.3.2. Численное моделирование усиления импульса .....	27
1.4. Автомодельное усиление импульсов в приближении малого изменения скорости электронов .....	30
1.4.1. Автомодельное решение.....	30
1.4.2. Численное моделирование усиления импульса .....	32
1.5. Групповой анализ симметрий Ли.....	34
1.5.1. Основы группового анализа симметрий Ли .....	35
1.5.2. Групповой анализ уравнений нелинейной нестационарной теории черенковского электронно-волнового взаимодействия .....	37
1.5.3. Модификации автомодельного решения .....	41
1.6. Выводы к главе 1.....	45
2. Автомодельная генерация микроволновых импульсов в процессах взаимодействия электронного пучка с обратной электромагнитной волной.....	47
2.1. Вводные замечания.....	47
2.2. Автомодельная генерация импульсов в черенковской лампе обратной волны .....	49
2.2.1. Автомодельное решение.....	49
2.2.2. Численное моделирование генерации импульса.....	51
2.3. Автомодельная генерация импульсов в пространственно-неоднородной лампе обратной волны с профилированием сопротивления связи .....	56
2.3.1. Автомодельные решения.....	57

2.3.2. Численное моделирование генерации импульса.....	60
2.4. Автомодельная генерация импульсов в процессе вынужденного рассеяния излучения на попутном электронном пучке .....	64
2.4.1. Автомодельное решение.....	67
2.4.2. Численное моделирование генерации импульсов .....	69
2.5. Выводы к Главе 2.....	73
3. Генерация последовательности солитоноподобных импульсов при циклотронном резонансном взаимодействии электромагнитной волны со встречным прямолинейным пучком электронов.....	76
3.1. Вводные замечания.....	76
3.2. Модель и основные уравнения .....	78
3.3. Нелинейное дисперсионное соотношение .....	81
3.4. Стационарные решения.....	84
3.4.1. Периодические решения.....	84
3.4.2. Светлые солитоны.....	89
3.4.3. Темные солитоны.....	90
3.4.4. Решения в виде бегущих волн .....	92
3.5. Анализ характера модуляционной неустойчивости.....	93
3.5.1. Нелинейное уравнение Шредингера .....	94
3.5.2. Анализ асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала .....	96
3.6. Результаты численного интегрирования усредненных уравнений.....	100
3.6.1. Верхняя граница полосы непропускания.....	101
3.6.2. Переход от абсолютной МН к конвективной.....	106
3.6.3. Нижняя граница полосы непропускания .....	108
3.7. 3-D PIC моделирование электронно-волнового взаимодействия .....	112
3.8. Выводы к Главе 3 .....	117
Заключение.....	119
Список сокращений.....	123
Список используемых источников .....	124

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования**

Традиционной задачей радиофизики является разработка физических основ генерации и усиления когерентного излучения микроволнового диапазона. В частности, для многих научных и практических приложений, например, в наносекундной радиолокации большой дальности, при диагностике плазмы, в ускорительной технике, биофизических исследованиях представляет интерес генерация мощных ультракоротких импульсов [1-8]. Также для ряда приложений, например, в спектроскопии [9,10], большой интерес представляют генераторы последовательностей когерентных коротких импульсов. Актуальной задачей является повышение пиковой мощности и уменьшение эффективной длительности генерируемых импульсов, что приводит к необходимости поиска оптимальных условий для их формирования.

В основе формирования ультракоротких микроволновых импульсов могут лежать различные механизмы, причём весьма эффективным оказывается подход, основанный на перенесении в классическую электронику методов, хорошо известных в квантовой оптике и физике лазеров. В частности, особое внимание привлекают явления, связанные с резонансным взаимодействием излучения с активными или пассивными средами, например, усиление импульсов света в инвертированных двухуровневых средах [11], квантовый эффект сверхизлучения (СИ) Дикке [12] и оптическое явление самоиндуцированной прозрачности [13]. В классической электронике подобные эффекты можно обнаружить в системах типа электронный поток – электромагнитная (ЭМ) волна [14,15]. Типичными примерами подобных систем являются широко распространенные в СВЧ электронике лампы бегущей и обратной волны (ЛБВ и ЛОВ, соответственно).

Возможность генерации мощных ультракоротких импульсов на начальной стадии переходного процесса в ЛОВ была обнаружена ещё в основополагающих работах [16,17]. Плодотворной оказалась аналогия с квантовым эффектом СИ Дикке, которая позволила обобщить результаты исследований по генерации импульсов в ЛОВ на различные механизмы электронно-волнового взаимодействия. В совместных исследованиях ИПФ РАН (Нижний Новгород), ИЭФ УрО РАН (Екатеринбург) и ИСЭ СО РАН (Томск) продемонстрированы циклотронное СИ, ондуляторное СИ, черенковское СИ (см., например, [18-23]) и на их основе фактически разработан новый класс генераторов импульсного излучения с рекордными характеристиками. В частности, источники одиночных импульсов на основе черенковского СИ в Ка-диапазоне позволяют генерировать субнаносекундные импульсы с гигаваттной пиковой мощностью [24,25]. Дальнейшее увеличение пиковой мощности и сокращение длительности импульсов СИ оказалось возможным при взаимодействии с попутной волной,

например, при взаимодействии черенковского типа в ЛБВ [26,27], что аналогично усилению оптических импульсов в инвертированных средах. Режимы усиления и одновременной компрессии импульсов СИ в ЛБВ также были реализованы экспериментально [28].

Хотя на основе эффекта СИ разработаны источники импульсов с субнаносекундной длительностью и гигаваттной пиковой мощностью, продолжаются исследования, направленные на принципиальное улучшение их характеристик. Например, в работе [29] был предложен метод повышения пиковой мощности импульсов за счёт использования профилированных систем, а в работе [30] — за счёт использования сверхразмерных гофрированных волноводов. Как правило, оптимизация процессов электронно-волнового взаимодействия осуществляется в ходе компьютерных экспериментов на основе моделей различного уровня сложности, что является достаточно трудоемким процессом. Для дальнейшего продвижения в этом направлении актуально использование аналитических подходов, позволяющих выявить универсальные закономерности эволюции импульсов СИ.

Анализ результатов компьютерного моделирования и натуральных экспериментов, представленных в литературе, позволяет сделать вывод, что эволюция импульсов СИ носит отчетливо выраженный автомодельный (самоподобный) характер. В частности, на автомодельный характер генерации импульса СИ в лазере на свободных электронах (ЛСЭ) указывалось ещё в работах [31,32]. В связи с этим перспективным подходом является поиск и анализ автомодельных решений. Такой подход позволяет получить точные решения нелинейных задач в виде усиливающихся и сжимающихся импульсов. Из вида автомодельного решения следуют аналитические законы, по которым основные характеристики импульса меняются во времени и в пространстве. Автомодельные решения действительно были найдены для некоторых простейших моделей электронно-волнового взаимодействия [33], однако, чтобы установить пределы их применимости и выявить оптимальные условия для достижения максимальной пиковой мощности, требуется более подробное исследование, включая детальное сопоставление с результатами численного моделирования. Также очевидный интерес представляет распространение подобного подхода на ряд более сложных моделей.

Аналогия с квантовой электроникой также позволила предсказать явление самоиндуцированной прозрачности при циклотронном резонансном взаимодействии ЭМ волны со встречным, изначально прямолинейным электронным пучком в продольном магнитном поле [34]. На основе этого эффекта была продемонстрирована возможность трансформации излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в когерентную последовательность наносекундных импульсов [35,36], каждый из которых представляет собой солитон самоиндуцированной прозрачности. В численных экспериментах было

показано, что в окрестности частоты циклотронного резонанса, когда ожидается поглощение падающей ЭМ волны, при достаточно высокой мощности входного сигнала происходит нелинейное просветление среды, и гармонический сигнал преобразуется в последовательность солитонов. Актуальной задачей является определение условий реализации такого нестационарного режима.

В теории волн известно явление нелинейного или солитонного туннелирования [37,38]. Оно заключается в том, что сигнал, частота которого лежит в полосе непропускания среды, способен распространяться без затухания, если его интенсивность достаточно велика. Этот эффект обусловлен нелинейным сдвигом критической частоты при увеличении амплитуды волны. Однако распространение сигнала при нелинейном туннелировании носит нестационарный характер: он разбивается на последовательность так называемых щелевых солитонов (gap solitons), т.е. солитонов огибающей, несущая частота которых лежит в линейной полосе непропускания. Образование щелевых солитонов происходит в результате развития модуляционной неустойчивости (МН) [39-46]. Типичным примером является формирование последовательности щелевых солитонов при прохождении плоской ЭМ волны достаточно большой амплитуды через нелинейную брэгговскую диэлектрическую решётку (см., например, [47,48]). Представляется, что имеет место аналогия между солитонным туннелированием и генерацией последовательности солитонов самоиндуцированной прозрачности при циклотронном взаимодействии волны со встречным электронным пучком. Поэтому представляет интерес теоретический анализ поведения системы с позиции теории нелинейных волн с целью получения полной картины возможных динамических режимов и выявления основных закономерностей формирования последовательности ультракоротких импульсов.

В связи с вышесказанным, задача исследования нелинейных волновых процессов при усилении и генерации ультракоротких импульсов в системах типа электронный поток – ЭМ волна является весьма актуальной для современной радиофизики.

### **Цель работы**

Целью диссертационной работы является выявление фундаментальных закономерностей усиления и генерации ультракоротких импульсов микроволнового излучения в нелинейных системах типа электронный поток – электромагнитная волна.

### **Основные задачи**

В рамках диссертационной работы решаются следующие задачи.

1. Поиск и анализ автомодельных решений, описывающих усиление и компрессию импульсов, для различных моделей взаимодействия электронного пучка с прямой или

обратной ЭМ волной. Определение в аналитическом виде законов изменения основных характеристик автомодельного импульса во времени и пространстве.

2. Компьютерное моделирование усиления и генерации коротких импульсов в системах типа электронный поток – ЭМ волна в рамках усредненных уравнений электронно-волнового взаимодействия. Численный расчёт основных характеристик импульсов и их сопоставление с аналитическими законами, полученными для автомодельных решений, анализ областей их применимости.

3. Анализ условий возникновения МН при резонансном циклотронном взаимодействии ЭМ волны со встречным потоком невозбужденных циклотронных электронов-осцилляторов. Поиск точных аналитических решений в виде периодических стационарных нелинейных волн и солитонов. Установление полной картины возможных режимов распространения волны в зависимости от параметров входного сигнала, определение условий генерации последовательности солитоноподобных импульсов.

#### **Методы исследования**

В диссертации широко используются аналитические подходы теории волновых процессов в сочетании с современными методами компьютерного моделирования. Поиск автомодельных решений осуществляется путём нахождения масштабно-инвариантных преобразований, а также с помощью группового анализа симметрий Ли. Анализ характера МН проводится путём исследования асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала. Аналитические результаты верифицируются при помощи численного моделирования на основе хорошо известных моделей нелинейной нестационарной теории взаимодействия электронного потока с прямой или обратной ЭМ волной. Также проводится прямое 3-D моделирование с помощью современного программного пакета CST Studio Suite, в котором реализовано так называемое «полностью электромагнитное» моделирование, основанное на непосредственном численном решении уравнений Максвелла с помощью метода конечных разностей во временной области, а движение заряженных частиц рассчитывается при помощи метода «частиц в ячейке» (“Particle in Cell”, PIC).

#### **Научная новизна**

Все результаты, включенные в диссертационную работу, являются новыми и получены впервые, в частности:

- Впервые показано, что эволюция короткого импульса, усиливающегося в черенковской ЛБВ, в приближении малого изменения скорости электронов проходит через две автомодельные стадии. На малых временах эволюция параметров импульса соответствует автомодельным законам, полученным в приближении малого изменения энергии электронов. С течением времени изменение энергии электронов становится значительным, и эволюция

импульса выходит на новую автомодельную асимптотику, соответствующую приближению малого изменения скорости электронов.

- Впервые проведён групповой анализ симметрий уравнений нелинейной нестационарной теории черенковского взаимодействия электронного пучка с бегущей ЭМ волной. Показано, что автомодельное решение является следствием одной из базисных симметрий уравнений. На основе проведенного анализа впервые построено обобщенное автомодельное решение, которое описывает усиление частотно-модулированного импульса.
- Впервые исследован автомодельный характер генерации импульса СИ на начальной стадии переходного процесса в черенковской ЛОВ. Путём детального сопоставления с результатами численного моделирования продемонстрировано, что эволюция параметров импульса СИ в процессе распространения хорошо соответствует теоретическим законам, полученным из вида автомодельного решения уравнений нелинейной нестационарной теории черенковского взаимодействия электронного пучка с обратной ЭМ волной.
- Найдены новые автомодельные решения, описывающие генерацию коротких импульсов в ЛСЭ с попутной ЭМ накачкой, когда рассеянное излучение распространяется навстречу электронному потоку.
- Впервые показано, что генерация последовательности солитоноподобных импульсов при циклотронном резонансном взаимодействии гармонической волны со встречным прямолинейным потоком электронов связана с развитием МН. Впервые проведён анализ характера МН. Найдены условия, при которых МН является абсолютной или конвективной, и построена граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала.
- Найдены новые точные аналитические решения, описывающие распространение стационарных периодических волн, светлых и тёмных солитонов при взаимодействии прямолинейного электронного потока со встречной монохроматической волной в условиях циклотронного резонанса.

**Достоверность результатов работы** обоснована использованием широко апробированных и хорошо зарекомендовавших себя моделей электронно-волнового взаимодействия и методов теоретического анализа нелинейных волновых процессов. Результаты численного моделирования, полученные на основе различных подходов (моделирование усреднённых уравнений и 3-D PIC моделирование), согласуются как между собой, так и с теоретическими выводами. Достоверность результатов численного моделирования также подтверждается воспроизведением в качестве тестовых расчётов ряда общепризнанных результатов, известных из литературы.

## Научно-практическая значимость

Результаты диссертации существенно расширяют теоретические представления о нелинейных волновых процессах в системах типа электронный поток — ЭМ волна. В частности, показано, что процессы усиления и компрессии импульсов в подобных системах носят автомодельный характер, и определены основные закономерности их эволюции. Развита теория МН при циклотронном резонансном взаимодействии ЭМ волны со встречным прямолинейным электронным пучком и определены условия генерации солитонов. Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что на их основе могут быть улучшены характеристики усилителей и генераторов наносекундных и субнаносекундных ЭМ импульсов в миллиметровом и сантиметровом диапазонах длин волн, которые находят широкое применение.

## Основные положения, выносимые на защиту

1. В черенковской лампе бегущей волны в условиях малого относительного изменения энергии электронов  $\Delta E/E \ll 1$  импульс, длительность которого мала по сравнению с временем распространения  $l/v_g$  ( $l$  — длина системы,  $v_g$  — групповая скорость волны), с течением времени асимптотически приближается к автомодельному решению, когда его пиковая амплитуда растет линейно с течением времени  $t$ , а ширина сокращается как  $t^{-1/2}$ .

2. В релятивистской лампе бегущей волны процесс усиления импульса на начальном этапе согласуется с автомодельными законами, полученными в приближении малого относительного изменения энергии. По мере увеличения амплитуды импульса это приближение нарушается и происходит переход на новую автомодельную асимптотику, соответствующую малому относительному изменению скорости электронов  $\Delta v/v \ll 1$ , когда пиковая амплитуда растет во времени по линейному закону, а ширина сокращается как  $t^{-2}$ . Переход от одной автомодельной асимптотики к другой происходит тем быстрее, чем больше релятивистский параметр  $v = 2(\gamma_0^2 - 1)C$  ( $\gamma_0$  — релятивистский масс-фактор,  $C$  — параметр усиления Пирса).

3. Процесс генерации коротких импульсов сверхизлучения в черенковской лампе обратной волны носит автомодельный характер, причем законы, по которым амплитуда и ширина импульса изменяются во времени, те же, что и в случае взаимодействия с попутной волной. Существует оптимальное значение длины системы  $l$  ( $\beta Cl \approx 7.0$ ,  $C$  — параметр усиления Пирса,  $\beta$  — постоянная распространения волны), при котором амплитуда выходного импульса принимает максимальное значение. При большей длине системы наблюдается генерация вторичных импульсов, которые начинают формироваться прежде, чем

основной импульс покидает пространство взаимодействия, что ограничивает рост его пиковой амплитуды.

4. При циклотронном резонансном взаимодействии электромагнитной волны со встречным, изначально прямолинейным электронным пучком имеет место модуляционная неустойчивость. В условиях, когда модуляционная неустойчивость является абсолютной, непрерывный входной сигнал с постоянной амплитудой трансформируется в последовательность микроволновых солитонов, распространяющихся вдоль системы. Когда модуляционная неустойчивость является конвективной, модуляционные возмущения сносятся вдоль системы и по окончании переходного процесса устанавливается стационарный режим распространения сигнала.

#### **Апробация результатов и публикации**

Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на международных и всероссийских научных конференциях:

- 23rd International Vacuum Electronics Conference (IVEC), Monterey, CA, USA, 2022;
- 22nd International Vacuum Electronics Conference (IVEC), Rotterdam, Netherlands, 2021;
- 47th IEEE International Conference on Plasma Science (ICOPS-2020), Singapore, 2020;
- XXV, XXVI и XXVIII Международные школы для студентов и молодых ученых по оптике, лазерной физике и биофизике Saratov Fall Meeting. International Symposium “Optics and Biophotonics”, Саратов, 2021, 2022, 2024;
- 16-я Международная научно-техническая конференция "Актуальные проблемы электронного приборостроения", Саратов, 2024;
- XII Международная школа-конференция “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), Саратов, 2019;
- XVII Международная зимняя школа-семинар по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, Саратов, 2018;
- XXIX и XXX Всероссийские научные конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», Саратов, 2021, 2023;
- XIV–XVII, XIX Всероссийские конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов, 2019- 2022, 2024;
- XIX-XXI научные школы «Нелинейные волны», Нижний Новгород, 2020, 2022, 2024;
- V Школа для молодых учёных «Актуальные проблемы мощной вакуумной электроники СВЧ: источники и приложения», Нижний Новгород, 2023.

Результаты диссертации получены при выполнении научно-исследовательских работ, поддержанных грантами Российского научного фонда (проекты №19-72-10119 и №23-12-00291), а также в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

По результатам диссертации опубликовано 23 работы, из которых

- 5 статей в реферируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук или индексируемых в реферативных базах данных и системах цитирования Web of Science и/или Scopus [91-95];
- 4 статьи в материалах международных конференций, индексируемых в базах данных Web of Science и/или Scopus [96-99];
- 14 тезисов докладов в сборниках трудов всероссийских и международных конференций [100-113], 10 из которых индексируются в РИНЦ.

#### **Личный вклад автора**

Все результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены соискателем лично: теоретический анализ моделей электронно-волнового взаимодействия, проведение численных экспериментов и анализ полученных результатов. Постановка задач, планирование проведения исследования, обсуждение и интерпретация результатов осуществлялись совместно с научным руководителем и с соавторами опубликованных работ.

#### **Структура и объем диссертационной работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 132 страницы, включая 61 рисунок и 2 таблицы. Список литературы состоит из 113 наименований на 9 страницах.

#### **Краткое содержание диссертационной работы**

Во **Введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и основные задачи работы, перечислены методы исследования, указана научная новизна, научно-практическая значимость и достоверность полученных результатов, приведены основные положения, выносимые на защиту, сведения об апробации работы и публикациях автора.

**Глава 1** посвящена анализу автомодельных процессов усиления и компрессии импульсов при черенковском взаимодействии электронного потока с попутной ЭМ волной.

В разделе 1.1 сформулированы физические принципы, лежащие в основе усиления коротких импульсов в черенковской ЛБВ. Выдвинута гипотеза о том, что эволюция импульса на больших временах приобретает автомодельный характер. Дано определение автомодельного решения и перечислены основные подходы к его теоретическому анализу. В разделе 1.2 приведены основные уравнения одномерной нестационарной теории

черенковского взаимодействия электронного пучка с бегущей ЭМ волной, включая уравнения движения электронов в двух приближениях (в приближении малого изменения скорости и в приближении малого изменения энергии электронов) и уравнение возбуждения ЭМ волны. Сформулированы начальные и граничные условия для решения уравнений, а также изложена методика численного интегрирования и используемая конечно-разностная схема.

В разделе 1.3 проводится анализ автомодельного усиления импульсов в черенковской ЛБВ в приближении малого изменения энергии электронов. Исследовано автомодельное решение уравнений электронно-волнового взаимодействия (п. 1.3.1). Найдена автомодельная подстановка, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельное решение, и представлены результаты её численного интегрирования. Показано, что автомодельное решение имеет вид импульса, который усиливается и сжимается в процессе движения вдоль электронного потока. Определены законы эволюции во времени основных параметров автомодельного импульса, включая пиковую амплитуду, длительность и положение в пространстве. Проведено численное моделирование распространения короткого входного импульса в ЛБВ в приближении малого изменения энергии (п. 1.3.2). Выполнено детальное сопоставление зависимостей основных характеристик импульса от времени с теоретическими законами, полученными из вида автомодельного решения. Показано, что после короткого переходного процесса эволюция импульса выходит на автомодельную стадию.

В разделе 1.4 анализ автомодельного усиления импульсов в черенковской ЛБВ проводится в приближении малого изменения скорости электронов, которое представляет наибольший интерес с точки зрения получения высоких коэффициентов конверсии мощности. Найдено автомодельное решение уравнений электронно-волнового взаимодействия, которое, как и в приближении малого изменения энергии, описывает усиление и компрессию импульса, однако законы эволюции параметров автомодельного импульса имеют иную асимптотику (п. 1.4.1). Полученное решение сравнивается с результатами численного моделирования усиления импульса на основе усреднённых уравнений (п. 1.4.2). Показано, что на малых временах поведение импульса соответствует автомодельным законам, полученным в приближении малого изменения энергии электронов, но с течением времени эволюция импульса выходит на новую автомодельную асимптотику, соответствующую приближению малого изменения скорости. Определено оптимальное значение релятивистского параметра, при котором достигается максимум коэффициента конверсии мощности

В разделе 1.5 представлены результаты группового анализа симметрий уравнений черенковского электронно-волнового взаимодействия в приближении малого изменения энергии электронов. Изложены основные идеи, лежащие в основе группового анализа

дифференциальных уравнений (*п. 1.5.1*). С помощью группового анализа определены базисные симметрии уравнений взаимодействия в черенковской ЛБВ и установлен их физический смысл, в частности, показано, что одна из базисных симметрий соответствует автомодельному решению, которое было найдено в разделе 1.3 (*п. 1.5.2*). Продемонстрировано, что базисные симметрии образуют алгебру Ли, что позволяет формировать их комбинации и получать новые симметрии исследуемых уравнений. С помощью такого подхода получено известное решение в виде бегущих волн, решение, соответствующее усилению гармонического входного сигнала, а также рассмотрена модификация автомодельного решения, которая описывает усиление импульса с частотной модуляцией (*п. 1.5.3*). Найденная модификация указывает на потенциальную возможность повышения пиковой мощности импульсов, что подтверждено в численном моделировании усиления короткого входного импульса с частотой, сдвинутой относительно точки синхронизма.

В *разделе 1.6* представлены основные выводы к главе 1.

В **Главе 2** представлены результаты исследования автомодельного характера генерации коротких импульсов в процессах взаимодействия электронного пучка с обратной ЭМ волной.

В *разделе 2.1* изложены физические принципы, лежащие в основе генерации мощного короткого импульса СИ на начальной стадии процесса установления колебаний в черенковской ЛОВ. Указана аналогия, проводимая между явлением СИ в квантовой физике и фазировкой и коллективным излучением осциллирующих электронов под действием собственного поля в СВЧ-электронике. Представлены уравнения нелинейной нестационарной теории черенковского взаимодействия электронов со встречной ЭМ волной в приближении малого изменения энергии электронов. Сформулированы начальные и граничные условия, необходимые для моделирования генерации короткого импульса.

В *разделе 2.2* автомодельное решение, найденное в разделе 1.3 для случая взаимодействия электронов с попутной волной, обобщено на случай взаимодействия с обратной волной (*п. 2.2.1*). Показано, что это решение описывает усиление и компрессию импульса, который движется навстречу электронам, и определены законы пространственно-временной эволюции его основных параметров. Представлены результаты детального сопоставления результатов численного моделирования генерации импульса в ЛОВ и найденного автомодельного решения (*п. 2.2.2*). Показано, что после некоторого переходного процесса решение выходит на автомодельную стадию, на которой основные параметры сформировавшегося импульса ведут себя в соответствии с автомодельными законами. В отличие от усиления при взаимодействии с попутной волной (глава 1), где рассматривалась по

существо полубезграничная система, в данном случае система имеет конечную длину и граничные условия для электронов и поля ставятся на разных ее концах. Это существенно влияет на картину эволюции импульса. Обнаружена оптимальная длина пространства взаимодействия, при которой выходная амплитуда импульса достигает максимального значения. Показано, что данный эффект обусловлен генерацией вторичных импульсов. Если длина пространства взаимодействия больше оптимальной, вторичные импульсы начинают формироваться прежде, чем основной импульс покидает систему, и, тем самым, ограничивают его амплитуду.

В разделе 2.3 рассмотрен вопрос об автомоделной эволюции импульсов в ЛОВ с профилированием сопротивлением связи. В частности, в литературе предлагалась идея повышения пиковой амплитуды импульсов, генерирующихся в ЛОВ, за счёт профилирования сопротивления связи таким образом, чтобы имел место так называемый режим пространственного накопления энергии [29]. Анализ уравнений электронно-волнового взаимодействия показал существование двух возможных законов профилирования сопротивления связи, при которых существуют автомоделные решения (*n. 2.3.1*). Из вида автомоделных подстановок сделан вывод, что только один из них является практически интересным в рамках задачи о генерации высокоомощного короткого импульса, причём он совпадает с законом, при котором реализуется режим пространственного накопления энергии. При этом в соответствии с автомоделными законами пиковая мощность импульса действительно растёт линейно по мере его пробега по системе. Проведено моделирование генерации импульсов в ЛОВ, состоящей из однородного участка вблизи правой границы системы, который дополнен секцией с сопротивлением связи, профилированным по найденному закону (*n. 2.3.2*). Показано, что движение импульса по неоднородной секции является автомоделным. Найдено соотношение между длинами секций, при котором достигается максимальная пиковая амплитуда выходного импульса.

Раздел 2.4 посвящён исследованию генерации импульсов в ЛСЭ с попутной ЭМ накачкой, когда рассеянное излучение распространяется навстречу электронному пучку. Изложены основные принципы работы ЛСЭ и отмечена аналогия между процессом генерации ультракоротких импульсов в ЛСЭ с попутной накачкой и в ЛОВ. Выдвинута гипотеза, что по аналогии с эволюцией импульса в ЛОВ, генерация импульса в ЛСЭ также носит автомоделный характер. Представлены уравнения нестационарного взаимодействия электронного потока с попутной волной накачки и встречной рассеянной волной, включая начальные и граничные условия, и найдено их автомоделное решение (*n. 2.4.1*). Показано, что для рассеянной волны оно представляет собой импульс, который усиливается и сжимается в процессе распространения. Гипотеза о том, что процесс генерации импульса в ЛСЭ носит

автомодельный характер и описывается найденным автомодельным решением, подтверждена при помощи численного моделирования (*n. 2.4.2*). Обнаружено, что эволюция импульса проходит через две автомодельные стадии: на малых временах, когда истощение накачки не существенно, поведение основных параметров импульса соответствует автомодельному решению уравнений ЛОВ, но с течением времени решение выходит на другую автомодельную асимптотику, соответствующую автомодельному решению уравнений ЛСЭ.

В *разделе 2.5* представлены основные выводы к главе 2.

В **Главе 3** рассматривается задача о генерации последовательности коротких солитоноподобных импульсов при взаимодействии изначально прямолинейного электронного потока со встречной ЭМ волной в условиях циклотронного резонанса.

В *разделе 3.1* изложено понятие МН и указаны основные эффекты, к которым может приводить её развитие. Отмечена аналогия между МН и другим нелинейным явлением – самоиндуцированной прозрачностью. Сформулированы физические принципы, лежащие в основе образования солитонов самоиндуцированной прозрачности при взаимодействии ЭМ волны со встречным прямолинейным потоком электронов в условиях циклотронного резонанса. Выдвинуто предположение, что данный эффект следует трактовать как результат развития МН.

В *разделе 3.2* представлены основные уравнения, описывающие циклотронное резонансное взаимодействие прямолинейного потока электронов со встречной ЭМ волной. В *разделе 3.3* для решений в виде монохроматических волн получено нелинейное дисперсионное соотношение. Его анализ показал, что границы полосы не пропускания, образующейся за счет циклотронного поглощения, сдвигаются вниз по частоте с ростом амплитуды волны. С помощью критерия Лайтхилла показано, что на верхней ветви дисперсионной характеристики имеет место МН.

*Раздел 3.4* посвящён поиску решений в виде стационарных волн. Исходная система уравнений сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решения которого можно уподобить колебаниям осциллятора в потенциальной яме (*n. 3.4.1*). С помощью фазовых портретов проанализировано поведение осциллятора при различных параметрах системы и для всех возможных случаев найдены точные аналитические решения, выраженные через эллиптические функции Якоби. Когда период решений стремится к бесконечности, они трансформируются в солитонные решения, включая светлые (*n. 3.4.2*) и тёмные (*n. 3.4.3*) солитоны. Найденные стационарные решения обобщены на случай стационарных бегущих волн (*n. 3.4.4*).

В *разделе 3.5* проводится анализ характера МН (конвективная или абсолютная). В *n. 3.5.1* представлены результаты приближенного анализа в окрестности верхней границы

полосы непропускания. Для описания этой ситуации получено НУШ, для которого найдена приближенная граница смены характера неустойчивости на плоскости параметров входного сигнала. В п. 3.5.2 условия абсолютной/конвективной МН уточняются с помощью более строгого анализа асимптотической формы неустойчивых модуляционных возмущений, вычисленной методом перевала. Показано, что при малых амплитудах сигнала границы смены характера МН, полученные на основе различных подходов, хорошо согласуются друг с другом.

В разделе 3.6 представлены результаты численного моделирования циклотронного резонансного взаимодействия гармонического сигнала со встречным, изначально прямолинейным электронным пучком на основе усреднённых уравнений. Получено разбиение плоскости параметров входного сигнала на области с различными режимами распространения волны, которое демонстрирует хорошее качественное соответствие с теоретическими выводами. Показано, что, когда амплитуда входного сигнала превышает амплитуду светлого неподвижного солитона, возможно распространение волны, причём сигнал разбивается на последовательность бегущих солитонов (п. 3.6.1). При этом МН является абсолютной. С увеличением частоты входного сигнала МН становится конвективной и нестационарные автомодуляционные режимы сменяются стационарным одночастотным распространением сигнала (п. 3.6.2). Обнаружено, что граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала зависит от длины системы, что связано с наличием отражений. Однако при моделировании системы, согласованной на границе (в численном эксперименте согласование обеспечивалось плавным нарастанием магнитного поля), наблюдается хорошее соответствие с теоретической зависимостью. Введён критерий определения нижней границы полосы непропускания, согласно которому она соответствует формированию в системе тёмного неподвижного солитона (п. 3.6.3).

В разделе 3.7 представлены результаты 3-D PIC моделирования взаимодействия прямолинейного электронного потока со встречной ЭМ волной в условиях циклотронного резонанса. Приведена схема модели, разработанная в программе CST Studio Suite, и указаны параметры модели, соответствующие частоте циклотронного резонанса около 240 ГГц. Представлены результаты численных экспериментов, которые подтверждают теоретические выводы о переходе между различными динамическими режимами с ростом частоты падающей волны. Показана возможность генерации периодической последовательности наносекундных импульсов, пиковая мощность которых превышает мощность входного сигнала.

В разделе 3.8 представлены основные выводы к главе 3.

В **Заключении** приведены основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

# 1. АВТОМОДЕЛЬНОЕ УСИЛЕНИЕ МИКРОВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ЧЕРЕНКОВСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПОПУТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

## 1.1. Вводные замечания

В данной главе рассматривается усиление короткого ЭМ импульса при взаимодействии с прямолинейным электронным потоком. Подобное взаимодействие имеет место в ЛБВ, где электронный поток, направляемый магнитным полем, движется прямолинейно вдоль замедляющей системы и взаимодействует с синхронной пространственной гармоникой бегущей волны в условиях черенковского синхронизма, когда фазовая скорость волны близка к скорости поступательного движения электронов  $v_0$ :

$$\omega = v_0 h, \quad (1.1)$$

где  $\omega$  — частота входного сигнала,  $h$  — продольное волновое число [49,50]. Когда длительность входного импульса мала по сравнению с длиной его смещения (проскальзывания) относительно частиц за характерное время развития неустойчивостей (так называемая, кооперативная длина [28]), возникают качественные отличия от традиционных механизмов усиления стационарных монохроматических сигналов в ЛБВ.

Особенности физики процесса усиления короткого импульса заключаются в следующем [26,27]. Предполагается, что электронный пучок изначально не модулирован ни по плотности, ни по скорости (с точностью до собственных шумов). Как правило, в ЛБВ групповая скорость волны  $v_g$  меньше скорости пучка  $v_0$ . Поэтому задний фронт импульса постоянно догоняют электроны, которые до этого не участвовали в процессе взаимодействия (см. рис. 1.1). Поскольку выполнены условия фазового синхронизма (1.1), электроны отдают энергию импульсу, и в области заднего фронта имеет место нарастание амплитуды сигнала. Поскольку  $v_0 > v_g$ , электроны, отдав часть своей энергии, обгоняют фронт импульса, а на их место поступают новые фракции электронного пучка, не модулированные ни по скорости, ни по плотности. Фактически импульс аккумулирует энергию, отданную электронами, на всем протяжении своего распространения, причем обмен энергией происходит в основном в области заднего фронта. В остальной части падающего импульса имеет место обмен энергией с электронами, уже участвовавшими во взаимодействии, и нарастание амплитуды сигнала ограничено эффектами, характерными для усиления стационарных сигналов (смещение электронов в ускоряющую фазу поля и др.) [50]. Поэтому происходит формирование короткого мощного импульса с протяженным передним фронтом, который представляет

собой нерегулярную последовательность осцилляций с постепенно нарастающей амплитудой (см. рис. 1.1).

Таким образом, распространение импульса в ЛБВ сопровождается увеличением пиковой мощности и уменьшением его эффективной длительности, что подтверждается как компьютерным моделированием, так и экспериментальными результатами [26-28].

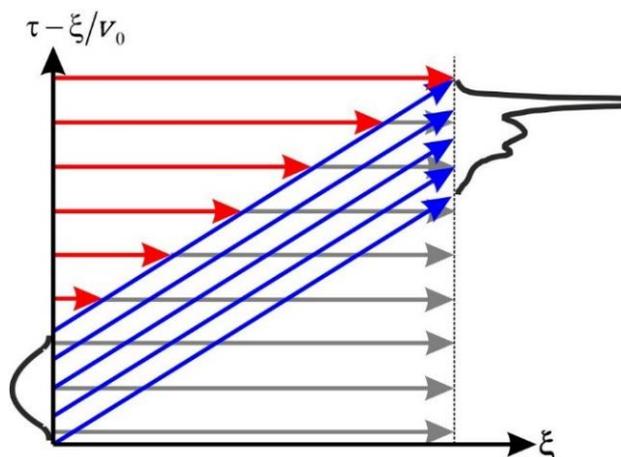


Рис. 1.1. Пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая процесс усиления короткого ЭМ импульса в черенковской ЛБВ,  $\tau$  и  $\xi$  — время и координата соответственно. Горизонтальные линии — характеристики электронного пучка, наклонные линии — характеристики импульса.

При исследовании систем нелинейных дифференциальных уравнений возникает задача аналитического поиска их точных решений. Одним из подходов к этой проблеме является нахождение различных симметрий исходных уравнений, которые определяют решения, инвариантные относительно определенной группы преобразований. Некоторые виды симметрий позволяют перейти к новым переменным, число которых меньше числа исходных, что приводит исследуемую систему к более простому виду. В частности, в случае двух независимых переменных нахождение связи между ними позволяет перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Подобная редукция исходной системы дает возможность определить класс точных решений, обладающих некоторыми специальными свойствами.

В контексте задачи об усилении и одновременной компрессии импульсов интерес представляет класс автомодельных решений. Согласно [51], явление называется автомодельным, если в различные моменты времени распределения его характеристик получаются одно из другого преобразованием подобия. В случае дифференциального уравнения с двумя независимыми переменными  $\xi$  и  $\tau$  это означает, что в автомодельное

решение  $u(\xi, \tau)$  эти переменные входят не произвольным образом, а в определенной комбинации  $\eta = \eta(\xi, \tau)$ . Наиболее распространен следующий вид автомодельных решений:

$$u(\xi, \tau) = \tau^a U(\eta), \quad \eta = \xi \tau^b. \quad (1.2)$$

Найти автомодельные комбинации переменных (а также другие симметрии дифференциальных уравнений) можно строго с помощью группового анализа, который основан на теории непрерывных групп Ли [52-55]. Этот подход является полностью алгоритмическим, однако, как правило, включает в себя много громоздких вычислений. В ряде случаев достаточно использовать более простые методы, например, нахождение масштабно-инвариантных преобразований, которые оставляют исходные уравнения неизменными [56], или соображения анализа размерности [57].

В работе [33] масштабно-инвариантные преобразования были найдены для некоторых механизмов электронно-волнового взаимодействия. Кроме того, в работе [58] был проведен групповой анализ симметрий Ли уравнений мазера на циклотронном резонансе с аномальным эффектом Доплера. Однако гипотеза о том, что эволюция ультракоротких импульсов в системе типа электронный поток – ЭМ волна на больших временах приобретает автомодельный характер, требует доказательства, включая детальное сопоставление с результатами численного моделирования.

В данной главе проводится анализ автомодельного характера эволюции импульса, усиливающегося в черенковской ЛБВ.

## 1.2. Уравнения нелинейной нестационарной теории

Будем исследовать уравнения одномерной нестационарной теории черенковского взаимодействия электронного пучка с бегущей ЭМ волной, хорошо известные из литературы (см., например, [16,17,49]). Они представляют собой систему из уравнений движения электронов в поле синхронной волны и уравнения возбуждения замедляющей системы конвекционным током. Уравнения справедливы при следующих приближениях:

- рассматривается одномерная модель, не учитывающая поперечные движения электронов и расслоение пучка в поперечном направлении;
- спектр сигнала считается узким, вследствие чего ВЧ поле можно представить в виде квазигармонического волнового пакета с медленно меняющейся амплитудой;
- также вследствие узости спектра сигнала можно пренебречь частотной зависимостью групповой скорости, сопротивления связи и других параметров;
- учитывается взаимодействие только с одной пространственной гармоникой ВЧ поля;

- пренебрегается влиянием пространственного заряда, затуханием и отражениями на концах системы.

### 1.2.1. Уравнения движения электронов

Будем рассматривать продольную компоненту ВЧ поля замедленной волны как квазигармоническую волну вида  $E(z, t) = \text{Re}[E(z, t)\exp(i\theta)]$ , где  $E(z, t)$  — медленно меняющаяся в пространстве и во времени комплексная амплитуда поля,  $\theta = \omega_0(t - z/v_0)$  — фаза электрона относительно волны,  $\omega_0$  — круговая частота синхронизма, которая определяется из условия равенства фазовой скорости волны  $v_\phi(\omega_0)$  и невозмущённой скорости движения электронов  $v_0$ . Условие медленности изменения амплитуды означает, что

$$|\partial E/\partial t| \ll |i\omega_0 E|, \quad |\partial E/\partial z| \ll |ih_0 E|, \quad (1.3)$$

где  $h_0$  — продольное волновое число. Уравнение движения электрона в поле синхронной волны имеет вид

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{e}{m_0 c^2} \text{Re}(E e^{i\theta}), \quad (1.4)$$

где  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  — релятивистский масс-фактор,  $v$ ,  $m_0$  и  $e$  — скорость, масса покоя и заряд электрона, соответственно,  $c$  — скорость света в вакууме.

Введём безразмерную координату  $\xi = \beta_0 C z$ , где

$$C = \sqrt[3]{\frac{I_0 R_c}{2V_0 \gamma_0 (\gamma_0 + 1)}} \quad (1.5)$$

— параметр усиления Пирса,  $I_0$  — постоянный ток электронного пучка,  $V_0 = m_0 c^2 (\gamma_0 - 1)/e$  — ускоряющее напряжение,  $R_c$  — сопротивление связи,  $\beta_0 = \omega_0/v_0$  — постоянная распространения электронов,  $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ . Из определения переменной  $\theta$  следует, что

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1 + C\theta_\xi}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\theta_\xi \equiv \partial\theta/\partial\xi$ . Будем считать, что скорость электронов в процессе взаимодействия меняется мало, т.е.  $C\theta_\xi \ll 1$ . Тогда уравнение (1.6) принимает вид

$$\frac{v}{v_0} \approx 1 - C\theta_\xi. \quad (1.7)$$

Запишем выражение для нормированной энергии электрона

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\gamma_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + v\theta_\xi}}, \quad (1.8)$$

где  $v = 2(\gamma_0^2 - 1)C$  — безразмерный параметр. Заметим, что при релятивистских скоростях изменение энергии электрона может быть значительным, несмотря на малое изменение скорости. Действительно, несмотря на то, что параметр Пирса достаточно мал,  $C \ll 1$ , в случае релятивистских скоростей параметр  $v$  может быть любого порядка.

Подставляя (1.7) и (1.8) в уравнение движения (1.4), получим

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = - \left( 1 + v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^{3/2} \operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \quad (1.9)$$

где

$$F = \frac{E}{\gamma_0 (\gamma_0 + 1) \beta_0 V_0 C^2} \quad (1.10)$$

— безразмерная амплитуда поля. Уравнение (1.9) также можно переписать в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} &= \frac{v}{2} \operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \\ v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{1}{\varepsilon^2} - 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.9) и (1.11) описывают движение электрона в поле синхронной ЭМ волны в приближении малого изменения скорости электронов.

Дальнейшее упрощение уравнений движения возможно при условии  $v\theta_\xi \ll 1$ , которое означает малое изменение не только скорости, но и энергии электронов. В таком случае (1.8) и (1.9) преобразуются к виду

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{v\theta_\xi}{2} \quad (1.12)$$

и

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = - \operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \quad (1.13)$$

соответственно. Уравнения (1.12) и (1.13) описывают движение электрона в поле синхронной волны в приближении малого изменения энергии электронов.

Уравнения (1.9) и (1.13) решаются при граничных условиях

$$\theta(\xi = 0) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi = 0) = 0, \quad (1.14)$$

где  $\theta_0 = \theta(\xi = 0)$  — начальные фазы электронов ( $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ ). Условия (1.14) соответствуют тому, что на вход волноведущей системы поступает невозмущённый пучок электронов, который не модулирован ни по плотности, ни по скорости.

### 1.2.2. Уравнение возбуждения

Нестационарное уравнение возбуждения замедленной ЭМ волны током с медленно меняющейся амплитудой имеет вид [16,17,49]

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = -I, \quad (1.15)$$

где

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0 \quad (1.16)$$

— нормированная комплексная амплитуда основной ВЧ гармоники тока,

$$\tau = \beta_0 C \frac{t - z/v_0}{1/v_g - 1/v_0} \quad (1.17)$$

— безразмерное время,  $v_g$  — групповая скорость волны. Из (1.17) видно, что уравнение (1.15) справедливо при условии  $v_0 > v_g$ .

Будем рассматривать усиление импульса с огибающей колоколообразной формы. Для определенности выберем форму начального импульса в виде

$$F(\xi, \tau = 0) = \begin{cases} F_0 \sin^2(\pi\xi/L_0), & 0 \leq \xi \leq L_0, \\ 0, & L_0 \leq \xi \leq L, \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $F_0$  и  $L_0$  — пиковая амплитуда и длина входного импульса, соответственно,  $L = \beta_0 Cl$  — безразмерная длина системы,  $l$  — длина пространства взаимодействия. При  $\tau > 0$  входной сигнал отсутствует, т.е.

$$F(\xi = 0, \tau > 0) = 0. \quad (1.19)$$

Предполагается, что несущая частота импульса в точности совпадает с частотой синхронизма. Отметим, что если длина и пиковая амплитуда импульса достаточно малы ( $L_0 \ll L$ ,  $F_0 \ll 1$ ), то его форма в начальный момент времени не оказывает существенного влияния на процесс эволюции после выхода на автомодельную стадию.

### 1.2.3. Конечно-разностная схема для численного интегрирования уравнений

Используемая конечно-разностная схема аналогична представленной в [59] (см. также [60]). Уравнения движения (1.9) и (1.13) можно представить в общем виде как

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = W(F, \theta). \quad (1.20)$$

Удобно ввести новые переменные

$$Z = e^{i\theta}, \quad V = \theta_\xi. \quad (1.21)$$

Заметим, что  $|Z| = 1$ . Тогда уравнение (1.20) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = iZV, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = W(F, Z, V). \quad (1.22)$$

При численном интегрировании вместо непрерывного распределения электронов по начальным фазам рассматривается дискретный набор из конечного числа частиц  $K$ , фазы которых на входе в пространство взаимодействия равномерно распределены в диапазоне от 0 до  $2\pi$ :

$$Z_k(\xi = 0) = \exp(2\pi i k / K), \quad V_k(\xi = 0) = 0. \quad (1.23)$$

Таким образом, каждая из частиц аппроксимирует группу электронов с близкими, но несколько отличающимися начальными условиями (так называемый, метод «крупных» частиц). Тогда уравнения движения (1.22) представляют собой систему из  $2K$  дифференциальных уравнений, которые можно численно интегрировать с помощью метода «предиктор-корректор», основанного на схеме Рунге-Кутты 2-го порядка [61].

Для решения уравнения возбуждения (1.15) используется явная конечно-разностная схема Лакса–Вендроффа 2-го порядка. Когда шаг по времени  $\Delta\tau$  и шаг по координате  $\Delta\xi$  связаны соотношением  $\Delta\tau = \Delta\xi/2$ , разностная схема устойчива. Следуя [59,60], при численном интегрировании выбирались следующие параметры разностной схемы:  $K = 64$ ,  $\Delta\xi = 0.01$ ,  $\Delta\tau = 0.005$ .

### 1.3. Автомодельное усиление импульсов в приближении малого изменения энергии электронов

#### 1.3.1. Автомодельное решение

Рассмотрим приближение малого изменения энергии электронов (1.12), когда электронно-волновое взаимодействие описывается уравнениями (1.13) и (1.15). Перепишем уравнение движения (1.13) в новых переменных (1.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \xi} &= iZV, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} &= -\operatorname{Re}(FZ) = -\frac{1}{2}(FZ + F^*Z^*), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где знак «\*» означает комплексное сопряжение. Также перейдем в движущуюся систему координат, сделав замену переменных

$$\xi' = \xi - \tau, \quad \tau' = \tau. \quad (1.25)$$

При этом уравнения (1.13) не изменятся, в то время как уравнение (1.15) примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \tau'} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z^* d\theta_0. \quad (1.26)$$

Зададим преобразования растяжения переменных

$$F \rightarrow \mu^q F, \quad V \rightarrow \mu^r V, \quad \xi' \rightarrow \mu^s \xi', \quad \tau' \rightarrow \mu \tau', \quad (1.27)$$

где  $\mu$  — свободный параметр, а  $q, r, s$  — некоторые константы. Поскольку в соответствии с определением (1.21)  $|Z|=1$ , то применять преобразование растяжения к переменной  $Z$  не имеет смысла. После преобразований (1.27) уравнения (1.24) и (1.26) принимают вид

$$\begin{aligned} \mu^{r-s} \frac{\partial V}{\partial \xi'} &= -\frac{1}{2} \mu^q (FZ + F^* Z^*), \\ \mu^{-s} \frac{\partial Z}{\partial \xi'} &= i \mu^r ZV, \\ \mu^{q-1} \frac{\partial F}{\partial \tau'} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z^* d\theta_0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Множители, содержащие параметр  $\mu$ , сократятся, если положить  $q=1$ ,  $r=1/2$ ,  $s=-1/2$ . Поэтому уравнения инварианты относительно преобразования

$$F \rightarrow \mu F, \quad V \rightarrow \mu^{1/2} V, \quad \xi' \rightarrow \mu^{-1/2} \xi', \quad \tau' \rightarrow \mu \tau'. \quad (1.29)$$

Комбинация независимых переменных  $\eta = \sqrt{\tau'} \xi'$  инварианта относительно преобразования (1.29), поэтому может быть выбрана в качестве автомодельной переменной [см. (1.2)]. Таким образом, из (1.29) следует, что уравнения (1.24), (1.26) допускают автомодельную подстановку вида

$$\eta = \sqrt{\tau'} \xi', \quad F(\xi', \tau') = \tau' A(\eta), \quad Z(\xi', \tau') = z(\eta), \quad V(\xi', \tau') = \sqrt{\tau'} U(\eta). \quad (1.30)$$

Переходя от  $\xi'$ ,  $\tau'$ ,  $Z$  и  $V$  к исходным переменным  $\xi$ ,  $\tau$  и  $\theta$  [см. (1.21), (1.25)], получим

$$\eta = \sqrt{\tau} (\xi - \tau), \quad F(\xi, \tau) = \tau A(\eta), \quad \theta(\xi, \tau) = \vartheta(\eta). \quad (1.31)$$

Подставляя (1.30) в (1.24) и (1.26), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает автомодельное решение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} &= -\operatorname{Re}(Ae^{i\vartheta}), \\ \frac{dA}{d\eta} &= -\frac{2}{\eta} \left( A + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} d\vartheta_0 \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Уравнения (1.32) необходимо дополнить граничными условиями, которые можно выбрать, исходя из требования устранения сингулярности при  $\eta = 0$  в правой части второго уравнения системы:

$$A(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta(0)} d\vartheta_0. \quad (1.33)$$

Для получения нетривиального решения необходимо, чтобы  $A(0) \neq 0$ . Следуя [24,26,27], зададим малую начальную модуляцию электронов по фазам, которую в силу малости можно считать гармонической

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 + A_0 \sin(\vartheta_0), \quad \frac{d\vartheta(0)}{d\eta} = 0, \quad (1.34)$$

где  $A_0 \ll 1$ ,  $\vartheta_0 \in [0, 2\pi]$ . Граничное условие (1.33) примет вид

$$A(0) = -2J_1(A_0) \approx -A_0, \quad (1.35)$$

где  $J_1$  — функция Бесселя первого рода 1-го порядка.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.32) с граничными условиями (1.34), (1.35) решалась численно при помощи системы компьютерной математики Wolfram Mathematica. На рис. 1.2(а) представлены решения  $|A(\eta)|$  при различных значениях амплитуды начального возмущения  $A_0$ . Решение представляет собой импульс, за которым тянется хвост в виде затухающих осцилляций. Отметим, что с ростом начального возмущения  $A_0$  пиковая амплитуда импульса и крутизна его переднего фронта также растут, но качественный вид решения не меняется.

На рис. 1.2(б) представлены решения  $\vartheta(\eta)$  для электронов с различными начальными фазами  $\vartheta_0$ , и проиллюстрирован процесс группировки частиц. Также на рис. 1.2(б) изображен профиль основной компоненты сгруппированного тока

$$I(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta(\eta)} d\vartheta_0. \quad (1.36)$$

Видно, что максимумы  $I$  соответствуют областям наиболее плотной группировки частиц.

На рис. 1.3 автомодельное решение перестроено в исходных переменных  $F(\xi, \tau)$  и  $I(\xi, \tau)$ . Наглядно видно, что решение описывает усиление и компрессию импульса в процессе его распространения вдоль системы.

В соответствии с видом автомодельной подстановки (1.31) пиковая амплитуда импульса растёт линейно с увеличением  $\tau$ , а ширина импульса сокращается пропорционально  $\tau^{-1/2}$ . Положение максимума импульса  $\xi_{\max}$  изменяется по закону

$$\xi_{\max} = \xi_0 + \tau + \frac{\eta_0}{\sqrt{\tau}}, \quad (1.37)$$

где  $\xi_0$  и  $\eta_0$  — некоторые константы.

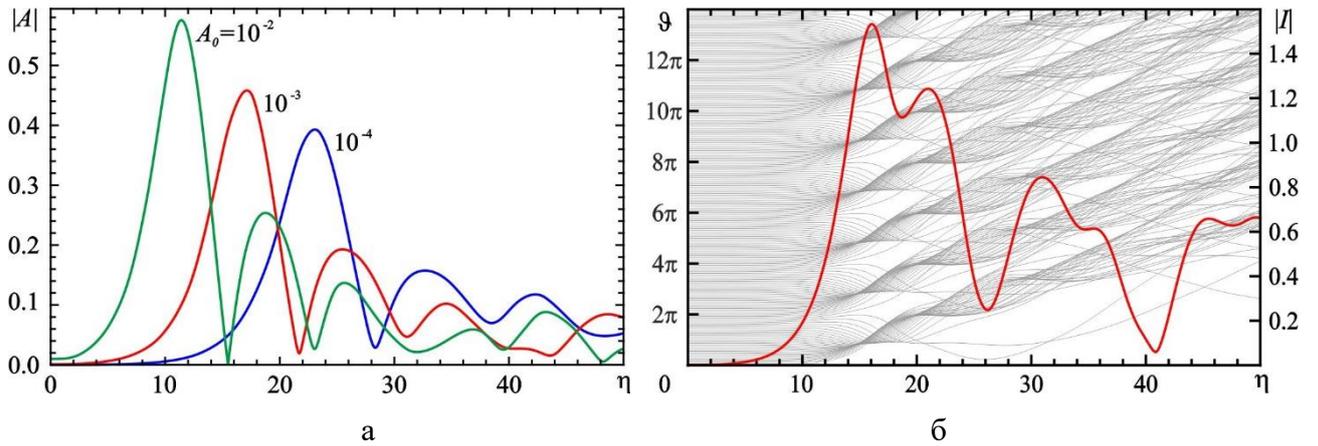


Рис. 1.2. Профили автомодельного решения  $|A(\eta)|$  при различных значениях амплитуды начального возмущения  $A_0$  (а), профили решений  $\vartheta(\eta)$  и  $|I(\eta)|$  при  $A_0 = 10^{-3}$  (б).

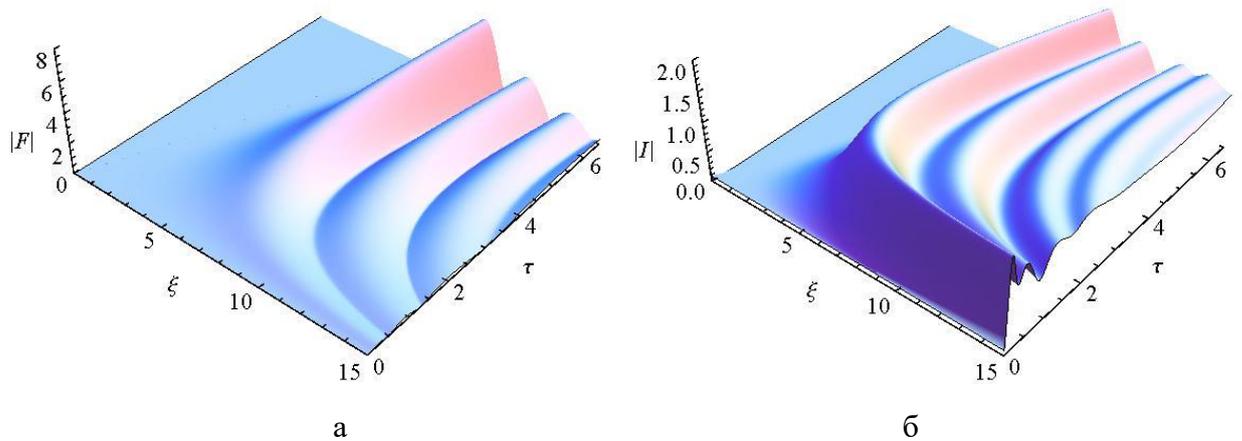


Рис. 1.3. Пространственно-временные распределения амплитуды поля (а) и основной гармоники тока (б) автомодельного решения при  $A_0 = 0.1$ .

### 1.3.2. Численное моделирование усиления импульса

Автомодельное решение соответствует некоторому классу частных решений исходной системы дифференциальных уравнений (1.13) и (1.15). Вообще говоря, неизвестно, будет ли оно возникать в процессе эволюции произвольных начальных возмущений. Сравним найденное в п. 1.3.1 решение с численным моделированием распространения короткого входного импульса (1.18). Заметим, что начальные и граничные условия (1.14), (1.18) и (1.19) для исходной системы уравнений в частных производных в общем случае не совпадают с граничными условиями (1.34) и (1.35), заданными для автомодельного решения. Поэтому может иметь место некоторый переходный процесс, прежде чем решение выйдет на автомодельную стадию.

На рис. 1.4 представлены пространственно-временные диаграммы амплитуды поля при достаточно малой пиковой амплитуде входного импульса  $F_0$  и двух различных значениях его длительности  $L_0$ . В обоих случаях решение выходит на стадию, которая качественно демонстрирует хорошее соответствие с видом автомодельного решения, представленным на рис. 1.3(а).

Когда входной импульс достаточно короткий по сравнению с длиной системы,  $L_0 \ll L$ , он не успевает испытать существенного воздействия со стороны электронов в силу малой мощности и короткой длительности. В то же время, он задаёт начальную модуляцию электронного пучка. Двигаясь вдоль системы, эта промодулированная фракция пучка возбуждает импульс ВЧ поля, ширина которого значительно больше, чем у входного импульса. Этот импульс усиливается и сжимается с течением времени [см. рис. 1.4(а)], причем механизм усиления соответствует описанному в разделе 1.1. При этом исходный короткий входной импульс продолжает движение по пространству взаимодействия, практически не меняя своей формы.

В случае, когда длительность начального импульса сравнима с длиной пространства взаимодействия,  $L_0 \approx L$ , начальная стадия его эволюции несколько отличается. Непосредственно задний фронт широкого импульса начинает аккумулировать энергию, отданную электронами, что приводит к его компрессии и усилению [см. рис. 1.4(б)].

Сравнение пространственно-временных диаграмм, представленных на рис. 1.4, показывает, что поведение системы при различных длительностях входного сигнала отличается только на начальной стадии (в данном случае примерно при  $\tau < 1$ ). С течением времени эволюция амплитуды поля в обоих случаях становится практически идентичной и качественно совпадает с видом автомодельного решения [см. рис. 1.3(а)]. Длительность переходного процесса, в течение которого поведение усиливающегося импульса выходит на

автомодельную стадию, тем меньше, чем короче входной импульс по сравнению с длиной системы [рис. 1.4(a)]. В связи с этим далее при более детальном исследовании автомодельного характера эволюции импульса для наглядности будем рассматривать ситуацию, когда  $L_0 \ll L$ .

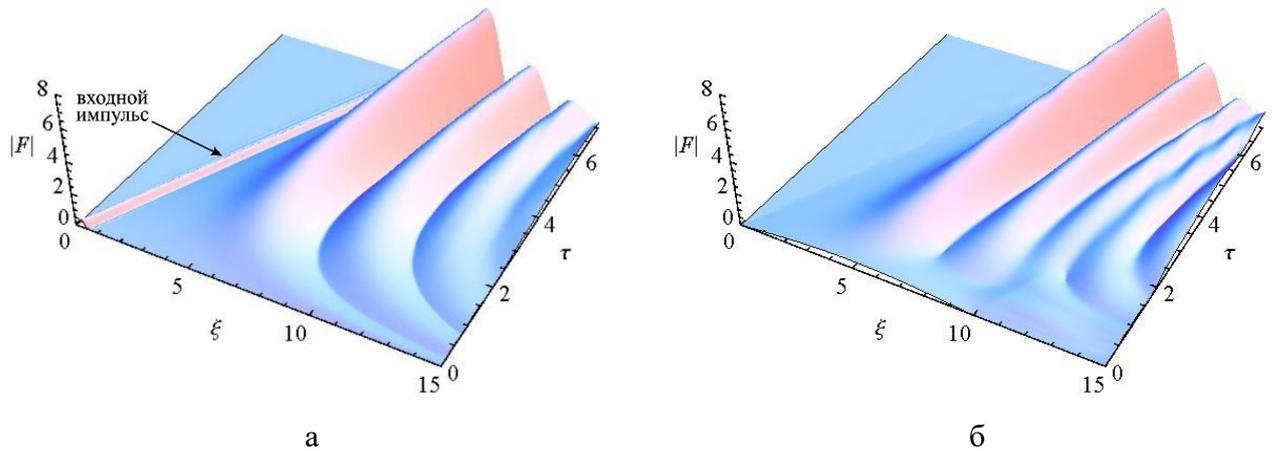


Рис. 1.4. Пространственно-временные распределения амплитуды поля, полученные в численном моделировании. Параметры входного импульса: (а) —  $F_0 = 0.5$  и  $L_0 = 0.5$ , (б) —  $F_0 = 0.5$  и  $L_0 = 10$ . Длина пространства взаимодействия  $L = 15$ .

Были подробно исследованы зависимости характеристик усиливающегося импульса от начальной амплитуды  $F_0$ . На рис. 1.5(а) изображены зависимости пиковой амплитуды импульса  $A_{peak}$  от времени  $\tau$  при различных значениях  $F_0$ . Численные данные, показанные кружками, хорошо аппроксимируются линейными функциями (сплошные линии), т.е.  $A_{peak} \sim \tau$ , что находится в соответствии с автомодельной подстановкой (1.31). Таким образом, пиковая амплитуда импульса растет линейно с течением времени, причем скорость роста тем выше, чем больше  $F_0$ .

Как следует из определения автомодельной переменной  $\eta$  в (1.31), ширина импульса  $\Delta$  зависит от нормированного времени как  $\Delta \sim 1/\sqrt{\tau}$ , следовательно,  $1/\Delta^2 \sim \tau$ . Соответствующие зависимости обратного квадрата ширины импульса  $1/\Delta^2$  от времени  $\tau$ , построенные по результатам численного интегрирования, также оказались линейными [см. рис. 1.5(б)]. В численных расчетах ширина импульса  $\Delta$  определялась по уровню  $|F| = A_{peak}/\sqrt{2}$ . На рис. 1.5(в) показано положение максимума импульса на плоскости  $(\xi, \tau)$ . Зависимости хорошо аппроксимируются кривыми вида (1.37) при соответствующем выборе констант  $\xi_0$  и  $\eta_0$ .

Таким образом, результаты прямого численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений (1.13) и (1.15) с начальными и граничными условиями (1.14), (1.18), (1.19) показывают, что после некоторого переходного процесса решение начинает демонстрировать автомодельное поведение, согласующееся с подстановкой (1.31), т.е. эволюция импульса, усиливающегося в ЛБВ, носит автомодельный характер.

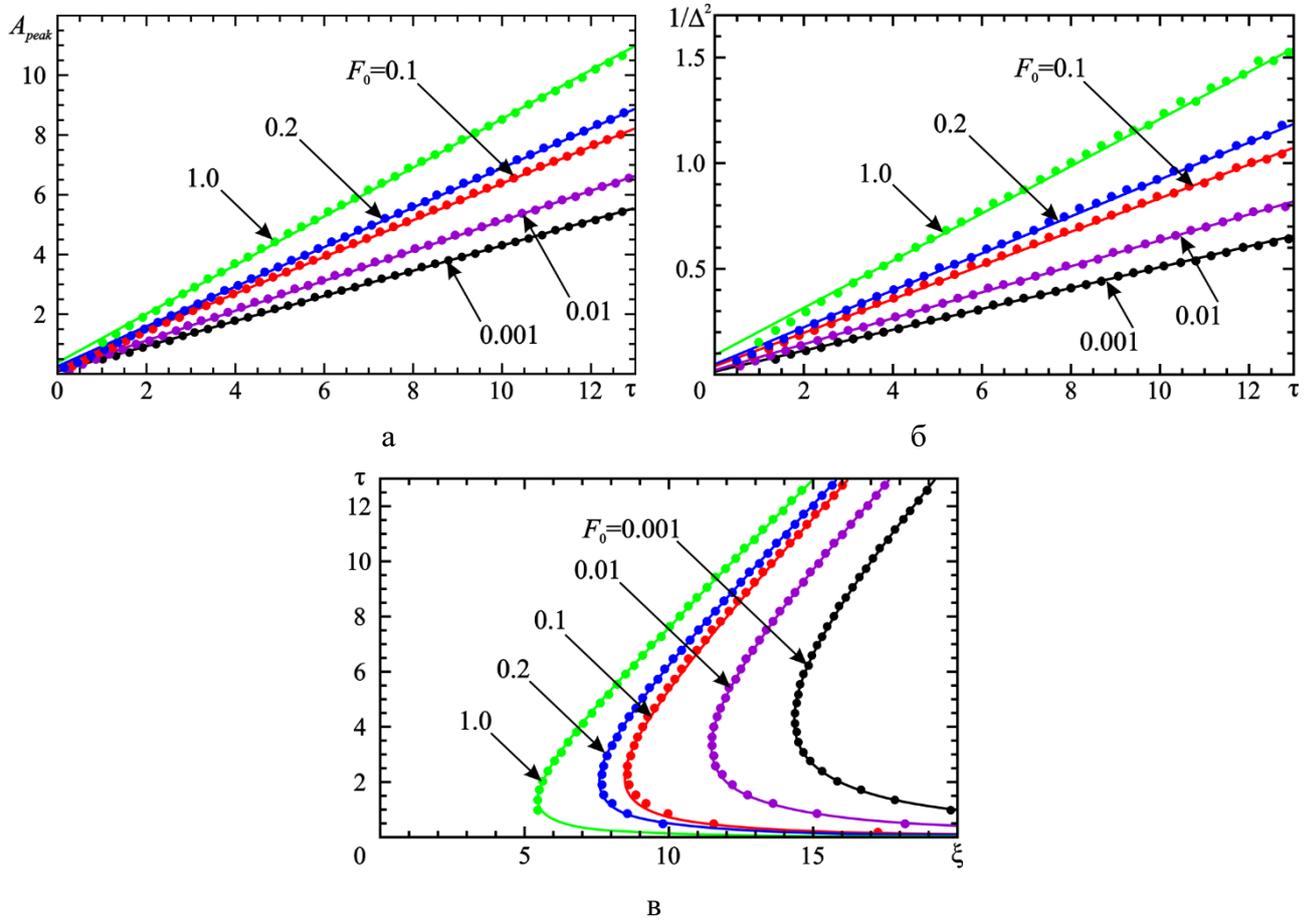


Рис. 1.5. Зависимости пиковой амплитуды импульса  $A_{peak}$  (а), обратного квадрата ширины импульса  $1/\Delta^2$  (б) и положения максимума импульса  $\xi_{max}$  (в) от времени  $\tau$  при  $L_0 = 0.5$  и различных значениях амплитуды входного импульса  $F_0$ . Численные данные и теоретические зависимости представлены кружками и сплошными линиями, соответственно.

Отметим, что рассматриваемая модель ЛБВ является полубесконечной, поскольку граничные условия (1.14), (1.19) ставятся на входе в систему ( $\xi = 0$ ). Поэтому результаты моделирования не зависят существенным образом от длины системы  $L$ . Это проиллюстрировано на рис. 1.6, где изображены зависимости  $A_{peak}(\tau)$ , полученные при различных  $L$ . Они в точности совпадают до момента, когда импульс покидает систему через

правую границу, чему соответствуют участки быстрого спада  $A_{peak}$ . Это значит, что пиковая амплитуда выходного импульса возрастает прямо пропорционально  $L$ . Однако длина реальных ЛБВ-усилителей ограничена, в частности, требованием устойчивости усиления по отношению к паразитному самовозбуждению при наличии отражений [62,63]. Ещё одним фактором, ограничивающим нарастание амплитуды импульса в реальных приборах, может быть шумовая модуляция электронного пучка [26,27].

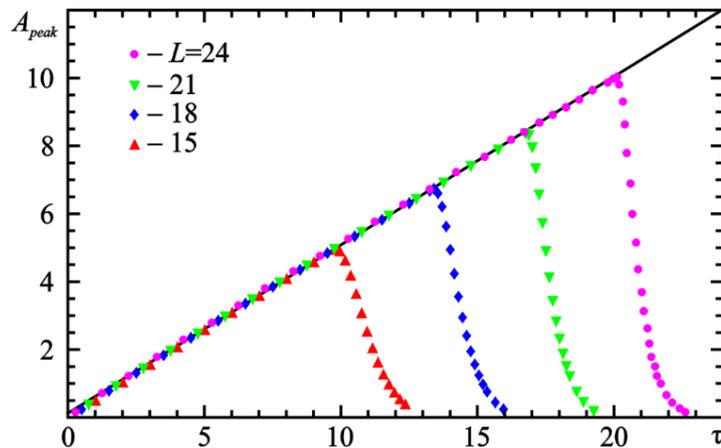


Рис. 1.6. Зависимости пиковой амплитуды импульса  $A_{peak}$  от времени  $\tau$  при различных значениях нормированной длины  $L$  ( $F_0 = 0.01$  и  $L_0 = 0.5$ ).

#### 1.4. Автомоделное усиление импульсов в приближении малого изменения скорости электронов

##### 1.4.1. Автомоделное решение

В случае малого изменения энергии электронов КПД электронно-волнового взаимодействия также мал. С этой точки зрения больший интерес представляет приближение малого изменения скорости электронов, при котором изменение энергии в процессе электронно-волнового взаимодействия может быть существенным. В этом случае движение электронов описывается уравнениями (1.9) или (1.11). В уравнениях появляется дополнительный управляющий параметр  $v$  (см. раздел 1.2.1).

Как и в разделе 1.3, перейдем в движущуюся систему отсчета, сделав замену переменных (1.25). Далее удобно ввести новые переменные

$$\theta = \tilde{\theta} - \frac{1}{v} \xi', \quad F = F \exp\left(i \frac{1}{v} \xi'\right). \quad (1.38)$$

Система уравнений (1.11) и (1.15) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi'} &= \frac{\nu}{2} \operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \\
\nu \frac{\partial \theta}{\partial \xi'} &= \frac{1}{\varepsilon^2}, \\
\frac{\partial F}{\partial \tau'} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

По аналогии с методом, который был использован в разделе 1.3.1, можно показать, что система уравнений (1.39) допускает автомодельную подстановку

$$\eta = (\tau')^2 \xi', \quad F(\xi', \tau') = \tau' A(\eta), \quad \theta(\xi', \tau') = \vartheta(\eta), \quad \varepsilon(\xi', \tau') = E(\eta)/\tau'. \tag{1.40}$$

В исходных переменных  $F$ ,  $\theta$ ,  $\xi$ , and  $\tau$  подстановка (1.40) имеет вид

$$\begin{aligned}
\eta &= \tau^2 (\xi - \tau), \\
F(\xi, \tau) &= \tau A(\eta) \exp\left[ i \frac{1}{\nu} (\xi - \tau) \right], \\
\theta(\xi, \tau) &= \vartheta(\eta) - \frac{1}{\nu} (\xi - \tau), \\
\varepsilon(\xi, \tau) &= E(\eta)/\tau.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Преобразование переменных (1.40) приводит (1.39) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельное решение:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{d\eta} &= \frac{\nu}{2} \operatorname{Re}(A e^{i\vartheta}), \\
\nu \frac{d\vartheta}{d\eta} &= 1/E^2, \\
\frac{dA}{d\eta} &= -\frac{1}{2\eta} \left[ A + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} d\vartheta_0 \right].
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Граничные условия для системы (1.42) ставятся из тех же соображений, что и в случае малого изменения энергии, т.е. в виде

$$\begin{aligned}
\vartheta(0) &= \vartheta_0 + A_0 \sin(\vartheta_0), \\
A(0) &= -2J_1(A_0) \approx -A_0, \\
E(0) &= 1,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

где  $A_0 \ll 1$ ,  $\vartheta_0 \in [0, 2\pi]$  [см. (1.34), (1.35)].

На рис. 1.7. представлен пример автомодельного решения. Качественно оно имеет тот же вид, что и в случае малого изменения энергии электронов [см. рис. 1.3(а)], и представляет собой импульс с осциллирующим хвостом. Согласно (1.41) пиковая амплитуда импульса также растет линейно с течением времени  $\tau$ , но ширина в этом случае сокращается по другому закону — пропорционально  $\tau^{-2}$ .

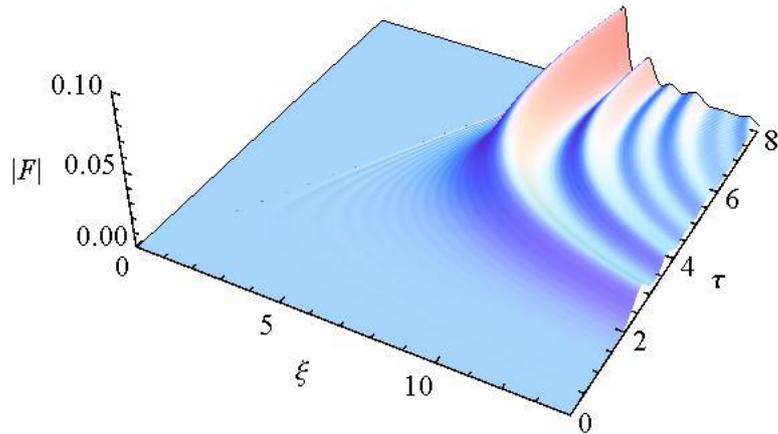


Рис. 1.7. Пространственно-временное распределение амплитуды поля автомодельного решения при  $A_0 = 10^{-4}$  и  $v = 0.6$ .

#### 1.4.2. Численное моделирование усиления импульса

Как и в разделе 1.3.2, сравним найденное автомодельное решение с результатами численного моделирования усиления импульса. Решались уравнения (1.11), (1.15) с граничными условиями (1.14) и начальным условием (1.18).

На рис. 1.8(a) представлены зависимости пиковой амплитуды импульса  $A_{peak}$  от времени  $\tau$ , построенные при различных значениях релятивистского параметра  $v$ . Амплитуда и длительность входного импульса заданы равными  $F_0 = 0.1$  и  $L_0 = 0.5$ , соответственно. Поскольку у электронов отсутствует начальная модуляция по скорости, т.е.  $\theta_\xi(\xi = 0) = 0$  [см. граничное условие (1.14)], то при малых временах  $\tau$  выполняется условие  $v\theta_\xi \ll 1$ . Поэтому на начальной стадии эволюции импульса уравнение движения (1.9) приблизительно эквивалентно уравнению (1.13), и основные параметры импульса почти не зависят от  $v$  и ведут себя так же, как в случае  $v = 0$ . Отметим, что зависимость  $A_{peak}(\tau)$  при  $v = 0$  является линейной и соответствует приближению малого изменения энергии электронов, рассмотренному в разделе 1.3. Однако при  $v \neq 0$  на больших временах изменение энергии электрона становится значительным, и кривые  $A_{peak}(\tau)$  начинают отклоняться от прямой линии. После некоторого переходного процесса, длительность которого  $\tau \approx 12$ , зависимости  $A_{peak}(\tau)$  снова выходят на линейную стадию, но наклон прямых теперь зависит от  $v$ . Это означает, что решение достигло автомодельной стадии, когда распространение импульса характеризуется соотношениями, найденными из автомодельной подстановки (1.41).

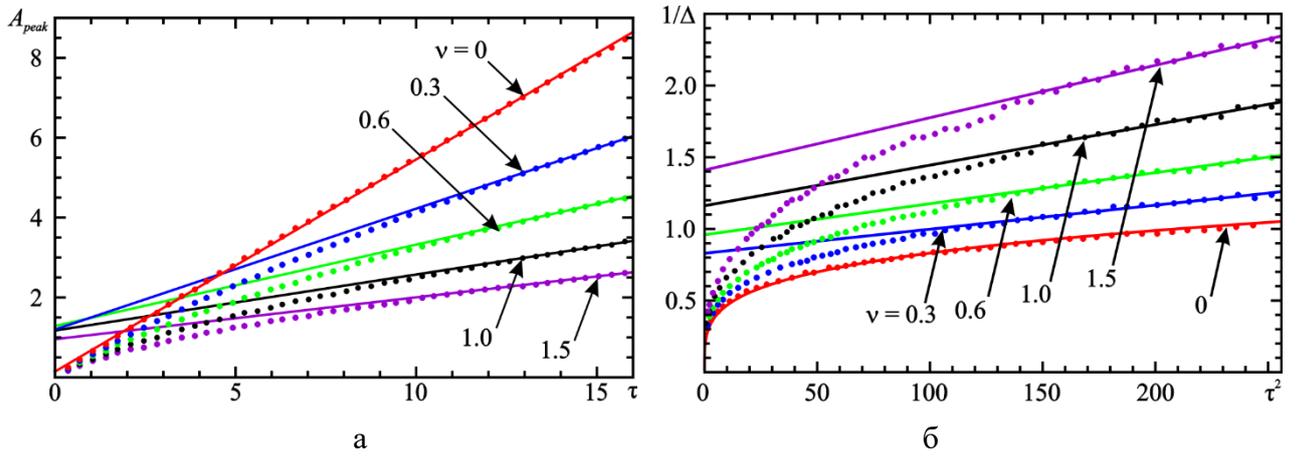


Рис. 1.8. Зависимости  $A_{peak}(\tau)$  (а) и  $1/\Delta(\tau^2)$  (б) при  $F_0 = 0.1$ ,  $L_0 = 0.5$ , и различных значениях релятивистского параметра  $\nu$ . Результаты численного моделирования и теоретические зависимости представлены кружками и сплошными линиями, соответственно.

В соответствии с видом автомодельной переменной  $\eta$  в подстановке (1.41) ширина импульса  $\Delta$  уменьшается пропорционально  $\tau^{-2}$ . На рис. 1.8(б) изображены зависимости обратной ширины импульса  $1/\Delta$  от квадрата времени  $\tau^2$ . На автомодельной стадии распространения импульса ( $\tau > 12$ ) результаты моделирования хорошо аппроксимируются прямыми линиями. При больших  $\tau$  и  $\nu$  усиливающийся импульс становится очень коротким, что увеличивает численную погрешность при определении его ширины  $\Delta$ . Это приводит к широкому разбросу точек вокруг аппроксимирующих кривых на рис. 1.8(б). Отметим, что чем больше  $\nu$ , тем меньше ширина импульса  $\Delta$ . При  $\nu = 0$ , т.е. в приближении малого изменения энергии электронов, зависимость хорошо аппроксимируется кривой  $(1/\Delta) \sim 0.26\tau^{1/2}$ .

Из рис. 1.8(а) видно, что чем меньше  $\nu$ , тем больше пиковая амплитуда импульса  $A_{peak}$  и тем быстрее она растёт с течением времени. Однако это не значит, что более высокие уровни мощности достигаются при меньших значениях  $\nu$ , поскольку коэффициент конверсии  $K = P_{peak}/P_{beam}$ , т.е. отношение пиковой мощности импульса  $P_{peak}$  и мощности электронного пучка  $P_{beam}$ , вычисляется как (см., например, [27])

$$K = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \cdot \frac{\nu A_{peak}^2}{8}. \quad (1.44)$$

Следовательно, максимально достижимое значение коэффициента конверсии  $K$  зависит от соотношения между  $\gamma_0$  и  $\nu$ . Для примера на рис. 1.9 представлены зависимости  $K$  от  $\tau$ , построенные при  $\gamma_0 = 1.6$  и различных значениях параметра  $\nu$ . При больших  $\tau$ , т.е., когда

система достаточно длинная, коэффициент конверсии может быть высоким, порядка  $K \sim 3-4$ , что находится в хорошем соответствии с результатами, представленными в работе [27]. Наибольшее значение  $K$  достигается при  $v \approx 0.6$ .

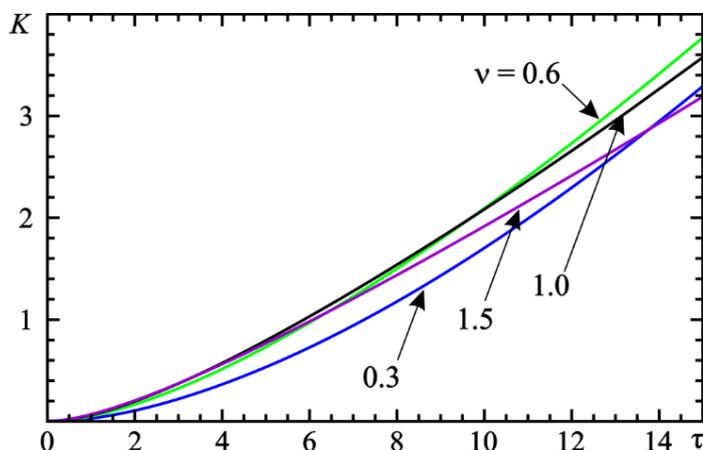


Рис. 1.9. Коэффициент конверсии при различных значениях релятивистского параметра  $v$  ( $\gamma_0 = 1.6$ ,  $F_0 = 0.1$ ,  $L_0 = 0.5$ ).

Таким образом, численное интегрирование уравнений (1.11) и (1.15) подтверждает, что после некоторого переходного процесса решение выходит на автомодельную стадию усиления и компрессии импульса. На этой стадии основные параметры импульса эволюционируют в соответствии с законами, предсказанными из вида автомодельной подстановки (1.41).

### 1.5. Групповой анализ симметрий Ли

В разделах 1.3.1 и 1.4.1 поиск автомодельных решений осуществлялся методом подобия. Однако он не позволяет найти все возможные автомодельные комбинации. Более универсальным инструментом является групповой анализ дифференциальных уравнений [52-55], который дает возможность найти базисные симметрии системы, с помощью линейных комбинаций из которых можно получить все инвариантные решения исследуемых уравнений. Например, в работе [58] применение такого подхода было продемонстрировано на примере циклотронного лазера на аномальном эффекте Доплера.

Начала группового анализа дифференциальных уравнений были положены в работах Софуса Ли и его учеников [52]. Первоначальной целью было решение вопроса о разрешимости уравнений в квадратурах. Разработанная теория оказалась эффективной для аналитического нахождения точных решений дифференциальных уравнений, получения консервативных величин и определения общих свойств уравнений, допускающих инвариантные решения одного типа. В частности, стоит отметить работы Л.В. Овсянникова [53], который

продемонстрировал широкие возможности методов анализа симметрий при нахождении решений задач математической физики.

В данном разделе проводится групповой анализ уравнений нелинейной нестационарной теории черенковской ЛБВ в приближении малого изменения энергии (1.13), (1.15). Автомодельное решение, найденное в разделе 1.3.1, является следствием одной из симметрий рассматриваемых уравнений. Его модификации и обобщения можно получить путем комбинирования с другими инвариантными решениями, найденными с помощью группового анализа.

### 1.5.1. Основы группового анализа симметрий Ли

Следуя работам [54,55], кратко изложим основные идеи, лежащие в основе группового анализа дифференциальных уравнений.

Под симметрией понимают инвариантность уравнения относительно некоторой однопараметрической группы преобразований. В общем случае, это точечные преобразования вектора независимых переменных  $\bar{x}$  и вектора функций  $\bar{y}(\bar{x})$  вида

$$\bar{x} \rightarrow \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, a), \quad \bar{y} \rightarrow \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, a) \quad (1.45)$$

где  $a$  – вещественный параметр, причем при  $a = 0$  точка в пространстве  $(\bar{x}, \bar{y})$  переходит сама в себя. Основное требование к векторам  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\psi}$  состоит в том, что последовательное применение двух преобразований с параметрами  $a$  и  $b$  должно быть равносильно применению третьего преобразования того же вида (1.45) с параметром  $c = F(a, b)$ , где  $F(a, b)$  — некоторая функциональная зависимость [54,55]. Другими словами,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}[\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, a), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, a), b] &= \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, c), \\ \bar{\psi}[\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, a), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, a), b] &= \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, c). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Раскладывая  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\psi}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $a = 0$ , можно записать инфинитезимальное (бесконечное малое) преобразование:

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \left. \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, a)}{\partial a} \right|_{a=0} a = \bar{x} + \bar{\mu}(\bar{x}, \bar{y})a, \quad (1.47)$$

$$\bar{y} \rightarrow \bar{y} + \left. \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, a)}{\partial a} \right|_{a=0} a = \bar{y} + \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{y})a, \quad (1.48)$$

где  $(\bar{\mu}, \bar{\eta})$  — касательное векторное поле группы. Преобразование (1.45) восстанавливается по касательному полю  $(\bar{\mu}, \bar{\eta})$  путем решения уравнений Ли:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\varphi}}{da} = \bar{\mu}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), & \bar{\varphi}'(a=0) = \bar{x}, \\ \frac{d\bar{\psi}}{da} = \bar{\eta}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), & \bar{\psi}'(a=0) = \bar{y}. \end{cases} \quad (1.49)$$

Таким образом, группа преобразований полностью определяется инфинитезимальным оператором

$$X = \sum_i \mu_i(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_j \eta_j(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (1.50)$$

где нижними индексами обозначены компоненты векторов (здесь и далее, если не указано иное, суммирование вводится по всем возможным индексам). Групповой анализ позволяет найти вид инфинитезимальных операторов групп преобразований, относительно которых уравнения инвариантны.

Если речь идет о преобразованиях системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, то также необходимо определить вид замены входящих в систему производных  $\partial y_m / \partial x_n$ . При этом удобно рассматривать преобразование точки в более широком пространстве, состоящем не только из аргументов  $\bar{x}$  и функций  $\bar{y}$ , но и производных, содержащихся в исследуемых уравнениях. Можно определить продолженный инфинитезимальный оператор группы

$$X_1 = X + \sum_{i,j} \zeta_{ij} \frac{\partial}{\partial (\partial y_i / \partial x_j)}, \quad (1.51)$$

где суммирование ведется только по индексам, соответствующим производным, которые в явном виде входят в исходную систему уравнений. Коэффициенты  $\zeta_{ij}$  определяются по формулам продолжения

$$\zeta_{ij} = D_j(\eta_i) - \sum_k \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} D_j(\mu_k), \quad (1.52)$$

где введены операторы полного дифференцирования

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_w \frac{\partial y_w}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_w}. \quad (1.53)$$

В теории группового анализа доказывается, что необходимым и достаточным условием того, что система дифференциальных уравнений

$$\bar{G}\left(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_n}, \dots\right) = 0 \quad (1.54)$$

инвариантна относительно группы преобразований с инфинитезимальным оператором  $X$  (допускает её), является

$$X_1 [\bar{G}]|_{\bar{G}=0} = 0. \quad (1.55)$$

Уравнения (1.55) называются определяющими уравнениями. При их решении все функции  $\bar{y}$  и их производные следует рассматривать в качестве независимых переменных. Определяющие уравнения расщепляются на несколько независимых дифференциальных уравнений относительно  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\eta}$ , образуя переопределенную систему. Решив её, можно найти все операторы, допускаемые исходными уравнениями, а затем, путем решения уравнений Ли, определить соответствующие преобразования.

Операторы  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , найденные в результате решения определяющих уравнений, являются линейно независимыми и образуют базис пространства  $L_N$ . Если в это пространство также входят их коммутаторы  $[X_i, X_j]$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ , которые вычисляются как

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i, \quad (1.56)$$

то говорят, что множество операторов формирует алгебру Ли [54,55]. Любая линейная комбинация базисных операторов  $X_i$ , образующих алгебру Ли, также будет определять группу преобразований, относительно которых уравнения инварианты. Отметим, что если  $[X_i, X_j] = 0$ , то операторы коммутируют, т.е. результат последовательного действия операторов  $X_i$  и  $X_j$  не зависит от порядка их применения.

Найденные с помощью группового анализа преобразования позволяют определить инвариантные решения уравнений. Из уравнений характеристик

$$\frac{dx_1}{\mu_1} = \frac{dx_2}{\mu_2} = \dots = \frac{dx_{N_x}}{\mu_{N_x}} = \frac{dy_1}{\eta_1} = \frac{dy_2}{\eta_2} = \dots = \frac{dy_{N_y}}{\eta_{N_y}}, \quad (1.57)$$

где  $N_x$  – размерность вектора  $\bar{x}$ , а  $N_y$  – размерность вектора  $\bar{y}$ , зная  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\eta}$ , можно найти базис из  $N_x + N_y - 1$  функционально-независимых инвариантов. Рассматривая один из этих инвариантов в качестве независимой переменной, можно сократить число независимых переменных исследуемой системы, что позволяет получить уравнения в более простом виде.

### 1.5.2. Групповой анализ уравнений нелинейной нестационарной теории черенковского электронно-волнового взаимодействия

Перейдем к групповому анализу уравнений, описывающих черенковское взаимодействие электронного пучка с бегущей ЭМ волной. Рассмотрим уравнение возбуждения (1.15) и уравнения движения электронов (1.24). Перейдем в движущуюся систему отсчёта (1.25) и перепишем систему в более компактном виде:

$$\begin{aligned}
F_{\tau'} &= -\langle Z^* \rangle, \\
Z_{\xi'} &= iVZ, \\
V_{\xi'} &= -\frac{1}{2}(FZ + F^*Z^*),
\end{aligned} \tag{1.58}$$

где нижними индексами обозначены соответствующие частные производные, символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по начальным фазам электронов  $\theta_0$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ , а знак «\*» соответствует операции комплексного сопряжения.

Следует учитывать, что  $F$  и  $Z$  являются комплексными величинами, в то время как  $V$  действительна. Векторы независимых переменных и функций в данном случае имеют вид

$$\bar{x} = (\xi', \tau'), \quad \bar{y} = (F, F^*, Z, Z^*, V). \tag{1.59}$$

Отметим, что также присутствует неявная зависимость переменных, характеризующих электроны ( $Z$  и  $V$ ), от начальной фазы  $\theta_0$ . Очевидно, что, как минимум, имеется тривиальная симметрия относительно сдвига  $\theta_0$  на произвольную константу. Из эвристических соображений мы предполагаем, что такая тривиальная симметрия не может дать новые, практически интересные решения в комбинации с автомодельным, поэтому при групповом анализе зависимость от начальных фаз электронов для простоты не учитывалась.

Согласно (1.50) и (1.51), инфинитезимальный оператор и его продолжение имеют вид

$$\begin{aligned}
X &= \mu_{\xi'} \frac{\partial}{\partial \xi'} + \mu_{\tau'} \frac{\partial}{\partial \tau'} + \eta_F \frac{\partial}{\partial F} + \eta_F^* \frac{\partial}{\partial F^*} + \eta_Z \frac{\partial}{\partial Z} + \eta_Z^* \frac{\partial}{\partial Z^*} + \eta_V \frac{\partial}{\partial V}, \\
X_1 &= X + \zeta_{F\tau'} \frac{\partial}{\partial F_{\tau'}} + \zeta_{F\tau'}^* \frac{\partial}{\partial F_{\tau'}^*} + \zeta_{Z\xi'} \frac{\partial}{\partial Z_{\xi'}} + \zeta_{Z\xi'}^* \frac{\partial}{\partial Z_{\xi'}^*} + \zeta_{V\xi'} \frac{\partial}{\partial V_{\xi'}}.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

где компоненты векторов  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\eta}$  являются функциями от  $\xi'$ ,  $\tau'$ ,  $F$ ,  $F^*$ ,  $Z$ ,  $Z^*$  и  $V$ . Здесь в соответствии с (1.52)

$$\begin{aligned}
\zeta_{F\tau'} &= D_{\tau'}(\eta_F) - F_{\tau'} D_{\tau'}(\mu_{\tau'}) - F_{\xi'} D_{\tau'}(\mu_{\xi'}), \\
\zeta_{Z\xi'} &= D_{\xi'}(\eta_Z) - Z_{\tau'} D_{\xi'}(\mu_{\tau'}) - Z_{\xi'} D_{\xi'}(\mu_{\xi'}), \\
\zeta_{V\xi'} &= D_{\xi'}(\eta_V) - V_{\tau'} D_{\xi'}(\mu_{\tau'}) - V_{\xi'} D_{\xi'}(\mu_{\xi'}),
\end{aligned} \tag{1.61}$$

где операторы полного дифференцирования [см. (1.53)]

$$\begin{aligned}
D_{\tau'} &= \frac{\partial}{\partial \tau'} + Z_{\tau'} \frac{\partial}{\partial Z} + Z_{\tau'}^* \frac{\partial}{\partial Z^*} + V_{\tau'} \frac{\partial}{\partial V} + F_{\tau'} \frac{\partial}{\partial F} + F_{\tau'}^* \frac{\partial}{\partial F^*}, \\
D_{\xi'} &= \frac{\partial}{\partial \xi'} + Z_{\xi'} \frac{\partial}{\partial Z} + Z_{\xi'}^* \frac{\partial}{\partial Z^*} + V_{\xi'} \frac{\partial}{\partial V} + F_{\xi'} \frac{\partial}{\partial F} + F_{\xi'}^* \frac{\partial}{\partial F^*}.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Действуя оператором  $X_1$  на систему (1.58), получим определяющие уравнения

$$\begin{aligned}
\zeta_{F\tau'} &= -\langle \eta_Z^* \rangle, \\
\zeta_{Z\xi'} &= iV\eta_Z + i\eta_V Z, \\
\zeta_{V\xi'} &= -\frac{1}{2}(\eta_F Z + F\eta_Z + \eta_F^* Z^* + F^* \eta_Z^*).
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Систему (1.63) необходимо дополнить условием нерастяжимости комплексной экспоненты  $Z$ . Чтобы его получить, подействуем оператором  $X$  на уравнение  $ZZ^* = 1$ , откуда получим ещё одно определяющее уравнение

$$Z\eta_Z^* + Z^*\eta_Z = 0. \tag{1.64}$$

В (1.63) необходимо подставить выражения (1.61), преобразованные с учётом вида операторов полного дифференцирования (1.62). Также требуется осуществить спуск на многообразие, заданное исследуемой системой, т.е. производные  $F_{\tau'}$ ,  $Z_{\xi'}$  и  $V_{\xi'}$  заменить выражениями, полученными из исходных уравнений (1.58). Определяющие уравнения (1.63), полученные после подстановок, имеют вид приравненных к нулю полиномов относительно производных  $F_{\xi'}$ ,  $F_{\xi'}^*$ ,  $Z_{\tau'}$ ,  $Z_{\tau'}^*$ ,  $V_{\tau'}$ . Следуя [54,55], необходимо приравнять к нулю коэффициенты при производных и их произведениях и получить переопределённую систему более простых дифференциальных уравнений относительно компонент векторов  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\eta}$ . Опуская математические преобразования, приведём решение этой системы с учётом (1.64):

$$\begin{aligned}
\mu_{\tau'} &= k_1 + k_2\tau', \\
\mu_{\xi'} &= k_3 - \frac{1}{2}k_2\xi', \\
\eta_F &= k_2F + ik_5F + ik_4\xi'F, & \eta_F^* &= k_2F^* - ik_5F^* - ik_4\xi'F^*, \\
\eta_Z &= -ik_5Z - ik_4\xi'Z, & \eta_Z^* &= ik_5Z^* + ik_4\xi'Z^*, \\
\eta_V &= -k_4 + \frac{1}{2}Vk_2,
\end{aligned} \tag{1.65}$$

где  $k_i$ ,  $i = 1..5$  – произвольные действительные постоянные.

Таким образом, общий вид инфинитезимального оператора  $X$  (1.60) есть

$$\begin{aligned}
X &= (k_1 + k_2\tau')\frac{\partial}{\partial\tau'} + \left(k_3 - \frac{1}{2}k_2\xi'\right)\frac{\partial}{\partial\xi'} + (k_2F + ik_5F + ik_4\xi'F)\frac{\partial}{\partial F} \\
&+ (k_2F^* - ik_5F^* - ik_4\xi'F^*)\frac{\partial}{\partial F^*} + (-ik_5Z - ik_4\xi'Z)\frac{\partial}{\partial Z} \\
&+ (ik_5Z^* + ik_4\xi'Z^*)\frac{\partial}{\partial Z^*} + \left(-k_4 + \frac{1}{2}Vk_2\right)\frac{\partial}{\partial V}.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Поскольку в (1.66) входит 5 произвольных констант, пространство найденных решений пятимерно. Обозначим его  $L_5$ . Определить базис пространства  $L_5$  можно, считая поочередно

каждую из постоянных равной единице, а все остальные – нулю. Таким образом, получаем следующие базисные операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau'}, \quad (1.67)$$

$$X_2 = \tau' \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{1}{2} \xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} + F \frac{\partial}{\partial F} + F^* \frac{\partial}{\partial F^*} + \frac{1}{2} V \frac{\partial}{\partial V}, \quad (1.68)$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \xi'}, \quad (1.69)$$

$$X_4 = i\xi F \frac{\partial}{\partial F} - i\xi F^* \frac{\partial}{\partial F^*} - i\xi Z \frac{\partial}{\partial Z} + i\xi Z^* \frac{\partial}{\partial Z^*} - \frac{\partial}{\partial V}, \quad (1.70)$$

$$X_5 = iF \frac{\partial}{\partial F} - iF^* \frac{\partial}{\partial F^*} - iZ \frac{\partial}{\partial Z} + iZ^* \frac{\partial}{\partial Z^*}. \quad (1.71)$$

Найдём коммутаторы  $[X_i, X_j]$ ,  $i=1, \dots, 5$ ,  $j=1, \dots, 5$  всех возможных пар базисных операторов (1.67)-(1.71). Результаты вычислений представлены в Таблице 1.1. Коммутаторы операторов  $X_i$  и  $X_j$  содержатся на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца. Видно, что результатами операций коммутирования являются операторы, которые также принадлежат пространству  $L_5$ . Таким образом, операторы (1.67)-(1.71) образуют алгебру Ли.

Таблица 1.1. Коммутаторы алгебры Ли с базисом из операторов (1.67)-(1.71)

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$	0	$X_1$	0	0	0
$X_2$	$-X_1$	0	$1/2 X_3$	$-1/2 X_4$	0
$X_3$	0	$-1/2 X_3$	0	$X_5$	0
$X_4$	0	$1/2 X_4$	$-X_5$	0	0
$X_5$	0	0	0	0	0

Проанализируем, каким симметриям соответствуют операторы (1.67)-(1.71):

1. Оператор  $X_1$  (1.67) соответствует преобразованию вида

$$\tau' \rightarrow \tau' + a, \quad \xi' \rightarrow \xi', \quad F \rightarrow F, \quad Z \rightarrow Z, \quad V \rightarrow V. \quad (1.72)$$

Это тривиальная симметрия исследуемых уравнений относительно сдвига решения по  $\tau'$  на некоторую постоянную вещественную величину  $a$ .

2. Оператор  $X_2$  (1.68) соответствует преобразованию вида

$$\tau' \rightarrow \tau' e^a, \xi' \rightarrow \xi' e^{-1/2a}, F \rightarrow F e^a, Z \rightarrow Z, V \rightarrow V e^{1/2a}. \quad (1.73)$$

Введем обозначение  $\mu = e^a$ , тогда вместо (1.73) получим

$$\tau' \rightarrow \mu \tau', \xi' \rightarrow \mu^{-1/2} \xi', F \rightarrow \mu F, Z \rightarrow Z, V \rightarrow \mu^{1/2} V, \quad (1.74)$$

что в точности совпадает с масштабнo-инвариантным преобразованием (1.29), которое было найдено в разделе 1.3.1 методом подобия. Как и ожидалось, группа преобразований, приводящая к автомодельному решению, оказалась базисной симметрией уравнений нелинейной нестационарной теории ЛБВ.

3. Оператор  $X_3$  (1.69) соответствует преобразованию вида

$$\tau' \rightarrow \tau', \xi' \rightarrow \xi' + a, F \rightarrow F, Z \rightarrow Z, V \rightarrow V. \quad (1.75)$$

По аналогии с (1.72), это симметрия уравнений относительно сдвига решения по  $\xi'$ .

4. Оператор  $X_4$  (1.70) соответствует преобразованию вида

$$\tau' \rightarrow \tau', \xi' \rightarrow \xi', F \rightarrow F e^{ia\xi'}, Z \rightarrow Z e^{-ia\xi'}, V \rightarrow V - a. \quad (1.76)$$

Для переменной  $\theta$  [см. (1.21)] это преобразование соответствует замене

$$\theta \rightarrow \theta - a\xi'. \quad (1.77)$$

Данная симметрия соответствует сдвигу несущей частоты или волнового числа на величину  $a$  при одновременном изменении начальной скорости пучка для достижения синхронизма на новой несущей частоте.

5. Оператор  $X_5$  (1.71) соответствует преобразованию вида

$$\tau' \rightarrow \tau', \xi' \rightarrow \xi', F \rightarrow F e^{ia}, Z \rightarrow Z e^{-ia}, V \rightarrow V. \quad (1.78)$$

Это инвариантность исследуемых уравнений относительно фазового сдвига, т.е. сдвига фазы поля и одновременного сдвига фаз электронов на некоторую произвольную величину  $a$ :

$$\theta \rightarrow \theta - a. \quad (1.79)$$

### 1.5.3. Модификации автомодельного решения

Как уже упоминалось, линейные комбинации  $X_i$ ,  $i = 1..5$  также являются операторами групп преобразований, относительно которых исследуемые уравнения инвариантны. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Линейная комбинация  $X_1$  и  $X_3$ , т.е. оператор вида  $X_1 + cX_3$ , где  $c$  – некоторая константа, соответствует преобразованиям

$$\tau' \rightarrow \tau' + a, \xi' \rightarrow \xi' + ca, F \rightarrow F, Z \rightarrow Z, V \rightarrow V. \quad (1.80)$$

В качестве независимой переменной следует выбирать инвариант  $\mu = \xi' - c\tau'$ . Такая симметрия порождает хорошо известные инвариантные решения в виде бегущих волн

$$F = F(\mu), Z = Z(\mu), V = V(\mu). \quad (1.81)$$

2. Линейная комбинация операторов  $X_1$ ,  $X_3$  и  $X_5$ , т.е. оператор вида  $X_1 - X_3 + \Omega X_5$ , где  $\Omega$  – некоторая постоянная, соответствует преобразованию

$$\tau' \rightarrow \tau' + a, \xi' \rightarrow \xi' - a, F \rightarrow Fe^{i\Omega a}, Z \rightarrow Ze^{-i\Omega a}, V \rightarrow V, \quad (1.82)$$

или, если перейти от  $\xi'$  и  $\tau'$  к переменным  $\xi$  и  $\tau$  [см. (1.25)], то

$$\tau \rightarrow \tau + a, \xi \rightarrow \xi, F \rightarrow Fe^{i\Omega a}, Z \rightarrow Ze^{-i\Omega a}, V \rightarrow V. \quad (1.83)$$

В силу того, что координата  $\xi$  является инвариантом, её удобно выбрать единственной независимой переменной. Тогда получаем решение, соответствующее усилению гармонического входного сигнала с частотой, отличающейся от частоты синхронизма на величину  $\Omega$

$$F = f(\xi)e^{i\Omega\tau}, Z = z(\xi)e^{-i\Omega\tau}, V = v(\xi), \quad (1.84)$$

или с учётом (1.21)

$$F = f(\xi)e^{i\Omega\tau}, \theta = \vartheta(\xi) - \Omega\tau. \quad (1.85)$$

3. С точки зрения усиления импульсов наиболее интересны комбинации с участием автомодельного оператора  $X_2$ . Исследуем оператор вида  $X_2 + \Delta X_5$ ,  $\Delta = \text{const}$ , т.е.

$$\begin{aligned} X_2 + \Delta X_5 = \\ = \tau' \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{1}{2} \xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} + (1 + i\Delta) F \frac{\partial}{\partial F} + (1 - i\Delta) F^* \frac{\partial}{\partial F^*} - i\Delta Z \frac{\partial}{\partial Z} + i\Delta Z^* \frac{\partial}{\partial Z^*} + \frac{1}{2} V \frac{\partial}{\partial V} \end{aligned} \quad (1.86)$$

Ему соответствуют преобразования

$$\tau' \rightarrow \tau' e^a, \xi' \rightarrow \xi' e^{-1/2a}, F \rightarrow Fe^{i\Delta a}, Z \rightarrow Ze^{-ia}, V \rightarrow Ve^{1/2a}. \quad (1.87)$$

В терминах исходных переменных соответствующая автомодельная подстановка имеет вид

$$\eta = \tau^{1/2} (\xi - \tau), F = \tau A(\eta) e^{i\Delta \ln(\tau)}, \theta = \vartheta(\eta) - \Delta \ln(\tau). \quad (1.88)$$

Вид автомодельной переменной  $\eta$  остался таким же, как и для исходного автомодельного решения [см. (1.31)].

Уравнения (1.15) и (1.24) после подстановки (1.88) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} &= -\text{Re}(Ae^{i\vartheta}), \\ \frac{dA}{d\eta} &= -\frac{2}{\eta} \left( (1 + i\Delta) A + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} d\vartheta_0 \right). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Будем решать систему (1.89) численно с начальными условиями, заданными из требования устранения сингулярности при  $\eta = 0$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= \vartheta_0 + A_0 \sin(\vartheta_0), \\ A(0) &= -\frac{2J_1(A_0)}{(1+i\Delta)}, \quad A_0 \ll 1. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Оператор  $X_2$  соответствует преобразованию подобия, которое приводит к автомодельному решению, найденному в п. 1.3.1. Данное решение было получено для случая, когда несущая частота импульса в точности совпадает с частотой синхронизма. Из вида автомодельных подстановок (1.88) следует, что преобразование, заданное комбинацией операторов  $X_2 + \Delta X_5$ , приводит к автомодельному решению, которое описывает распространение импульса с частотной модуляцией. Отметим, что уравнения (1.89), описывающие автомодельное решение, переходят в (1.32) при  $\Delta = 0$ , когда частотная модуляция отсутствует.

На рис. 1.10 приведены профили  $|A(\eta)|$  при одинаковых  $A(0)$  и разных  $\Delta$ . Как и в случае  $\Delta = 0$ , решение имеет вид импульса, за которым тянется шлейф в виде затухающих осцилляций [см. рис. 1.2(a)]. Чем больше  $\Delta$ , тем осцилляции менее регулярные. В исходных переменных решение по-прежнему соответствует усиливающемуся и сжимающемуся в процессе распространения импульсу (см. рис. 1.11). Как и в случае исходного автомодельного решения, пиковая амплитуда импульса растет линейно с течением времени  $A_{peak} \sim \tau$ , а длительность убывает обратно пропорционально квадратному корню из времени  $\Delta \sim \tau^{-1/2}$ .

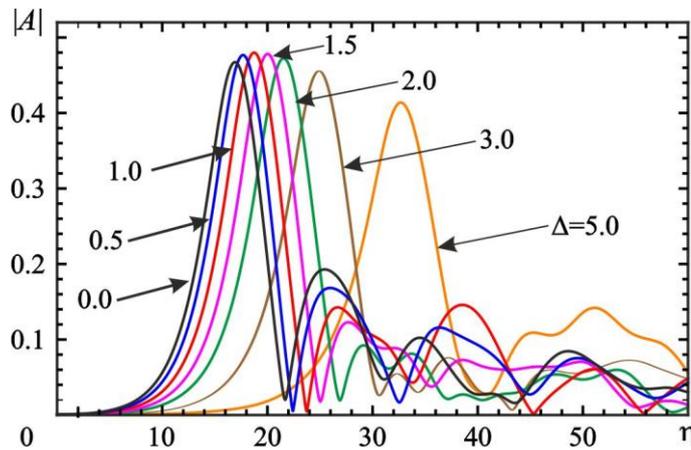


Рис. 1.10. Профили  $|A(\eta)|$  автомодельного решения с частотной модуляцией при различных значениях  $\Delta$ ,  $A(0) = 0.01$ .

Как иллюстрирует рис. 1.10, при небольших  $\Delta \sim 0.1 - 2$  пиковая амплитуда импульса оказывается больше, чем в случае  $\Delta = 0$ , когда частота сигнала совпадает с частотой

синхронизма. Таким образом, комбинация автомодельного решения и симметрии относительно фазового сдвига указывает на потенциальную возможность повышения пиковой мощности генерируемых импульсов. Однако справедливость выводов, полученных на основе сконструированного автомодельного решения, нуждается в подтверждении путем детального сопоставления с результатами численного моделирования.

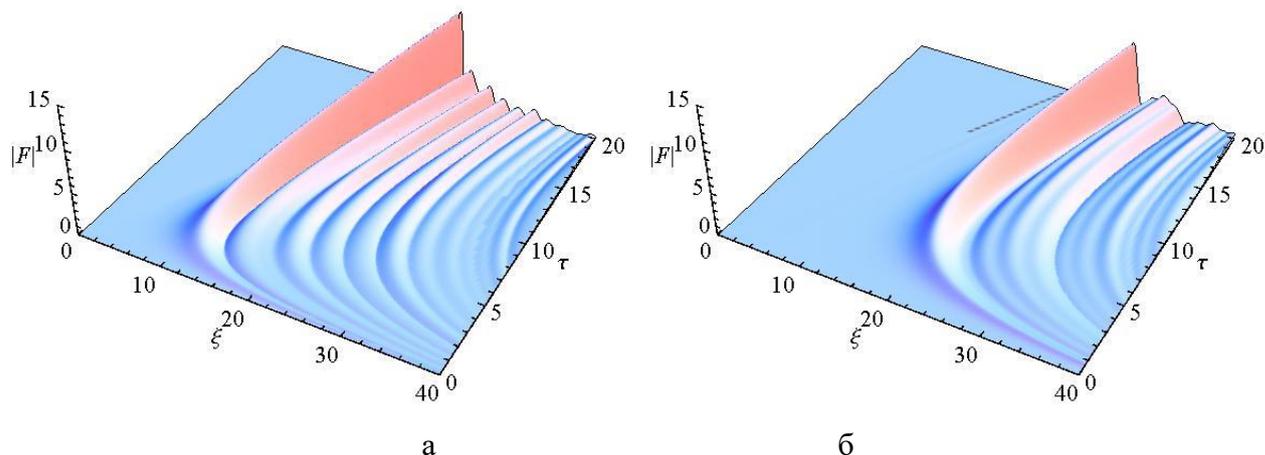


Рис. 1.11. Распределение амплитуды поля автомодельного решения при  $A(0) = 0.01$ , а –  $\Delta = 0.5$ , б –  $\Delta = 5$ .

Было проведено численное моделирование черенковской ЛБВ [уравнения (1.15) и (1.24)], в которой происходит усиление короткого входного импульса с частотой, сдвинутой относительно точки синхронизма на некоторую постоянную величину  $\Delta$ . Для удобства вместо (1.18) и (1.19) задавалось нулевое начальное распределение поля и граничное условие

$$F(\xi = 0, \tau) = a_0 \sin^2(\tau/T) e^{i\Delta\tau}, \quad (1.91)$$

где  $T$  — длительность входного импульса. Граничные условия для электронов выбирались в виде (1.14). При фиксированной длине системы  $L = 20$  рассчитывалась зависимость пиковой амплитуды выходного сигнала  $A_{out}$  от величины частотной отстройки  $\Delta$  (см. рис. 1.12). Максимум кривой действительно смещен относительно нуля в область положительных отстроек, как это и было предсказано автомодельным решением с частотной модуляцией.

Автомодельный оператор  $X_5$  можно также комбинировать с другими найденными симметриями и создавать производные операторы более сложной конструкции, однако физический смысл таких сочетаний требует дополнительных исследований.

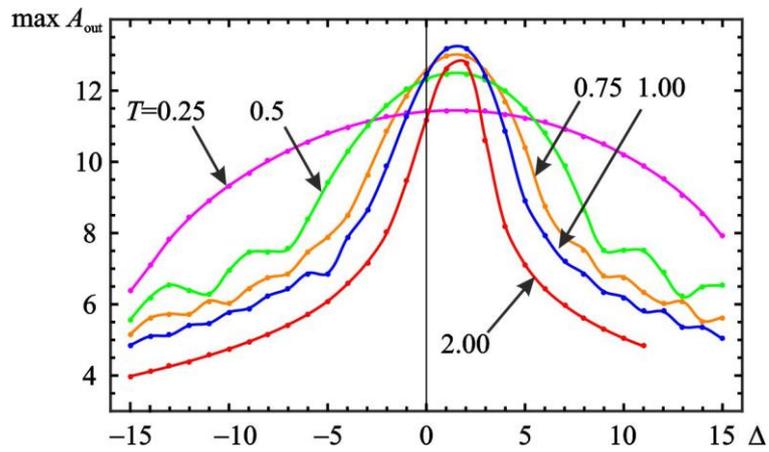


Рис. 1.12. Зависимость максимальной амплитуды выходного сигнала от частотной отстройки входного импульса при различных значениях длительности импульса  $T$ .

### 1.6. Выводы к главе 1

В данной главе представлены результаты исследования автомодельного характера усиления и компрессии импульсов при черенковском взаимодействии ЭМ волны с попутным электронным пучком в ЛБВ-усилителе.

Показано, что уравнения нелинейной нестационарной теории черенковского взаимодействия прямолинейного электронного пучка с прямой ЭМ волной имеют автомодельные решения, которые описывают усиление и компрессию импульса в процессе его движения вдоль системы. Для двух разных приближений определены в аналитическом виде автомодельные подстановки и законы изменения основных характеристик усиливающегося импульса во времени и пространстве. В соответствии с найденными решениями, в случае малого изменения энергии электронов пиковая амплитуда импульса растёт линейно с течением времени  $\tau$ , а ширина импульса уменьшается как  $\tau^{-1/2}$ . В случае малого изменения скорости электронов, который представляет наибольший интерес с точки зрения высоких коэффициентов конверсии мощности, пиковая амплитуда импульса также растёт линейно с ростом  $\tau$ , а ширина импульса уменьшается пропорционально  $\tau^{-2}$ .

Проведено сопоставление автомодельных решений с результатами численного интегрирования уравнений электронно-волнового взаимодействия. В численных экспериментах моделировалось распространение короткого входного импульса.

Для случая малого изменения энергии электронов показано, что после короткого переходного процесса эволюция системы выходит на автомодельную стадию. При этом импульс, распространяющийся вдоль электронного потока, усиливается и сжимается, и его основные характеристики (пиковая амплитуда, эффективная длительность, положение максимума) ведут себя в соответствии с законами, предсказанными автомодельными

подстановками (1.31). Процесс перехода системы к автомодельной стадии тем короче, чем меньше длительность входного импульса.

Для приближения малого изменения скорости электронов показано, что процесс усиления импульса на малых временах совпадает с решением для случая малого изменения энергии. Однако с течением времени, когда энергия электронов существенно изменяется, решение выходит на новую асимптотику (1.41). С ростом релятивистского параметра пиковая амплитуда и ширина импульса уменьшаются, однако существует его оптимальное значение, при котором достигает максимума коэффициент конверсии мощности.

Проведен групповой анализ уравнений нелинейной нестационарной теории ЛБВ в приближении малого изменения энергии электронов. Установлено, что полная группа симметрий исследуемых уравнений определяется пятью базисными преобразованиями, относительно которых уравнения остаются инвариантными. Показано, что найденные базисные преобразования отвечают следующим симметриям исходной системы:

- симметрия относительно преобразования сдвига по времени;
- симметрия относительно преобразования сдвига по координате;
- симметрия относительно фазового сдвига;
- симметрия, равносильная сдвигу несущей частоты или волнового числа при одновременном изменении скорости пучка для достижения синхронизма на новой несущей частоте;
- симметрия, соответствующая автомодельному решению, которое, как было показано ранее, описывает эволюцию импульсов при их усилении в ЛБВ.

Показано, что найденные преобразования составляют алгебру Ли, и любая их линейная комбинация также порождает симметрию исследуемых уравнений. Формируя определенные сочетания базисных симметрий, можно получить известные решения в виде бегущих волн, а также решения, соответствующие усилению гармонического сигнала.

Рассмотрена модификация автомодельного решения, полученная путем его комбинирования с симметрией относительно фазового сдвига. Такое решение описывает автомодельное распространение импульса с частотной модуляцией. Проведено численное моделирование усиления короткого входного импульса с частотой, сдвинутой относительно точки синхронизма на некоторую постоянную величину. Продемонстрировано, что наибольшую пиковую амплитуду выходного импульса можно получить при небольших положительных отстройках, что согласуется с найденным автомодельным решением.

## 2. АВТОМОДЕЛЬНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ МИКРОВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПРОЦЕССАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ОБРАТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

### 2.1. Вводные замечания

В инвертированных атомных средах традиционно различают два вида излучения: спонтанное и вынужденное (индуцированное). В 1954 г. в основополагающей работе [12] Р. Дикке также указал на возможность существования сверхизлучения (СИ) или кооперативного излучения, занимающего своего рода промежуточное положение между спонтанным и вынужденным. В 1973 г. СИ было обнаружено экспериментально [64]. СИ является кооперативным эффектом, возникающим за счёт самопроизвольного зарождения и усиления корреляций первоначально независимых атомов в результате их взаимодействия через поле собственного излучения, которое является для них фазирующим [12,65-67]. При развитии СИ в среде формируется мощный импульс излучения, длительность которого много меньше времён релаксаций. Можно показать, что система инвертированных атомов переходит в основное состояние за время, обратно пропорциональное числу атомов. Энергия импульса СИ равна всей энергии, запасённой в системе, а мощность пропорциональна квадрату числа частиц, то есть все частицы излучают в одной фазе, и импульс обладает высокой степенью когерентности.

В квантовой физике эффект СИ трудно реализуем из-за требований относительно больших времён релаксации и высокой концентрации инвертированных частиц. Однако указанные условия легко достигаются в классической вакуумной электронике, где в качестве активной среды выступает поток электронов. Фазировка и коллективное излучение осциллирующих электронов в отсутствие каких-либо внешних полей под действием их собственного ближнего поля было подробно исследовано в работе [68]. Первые экспериментальные наблюдения импульсов СИ в системах СВЧ-электроники были проведены для электронов, вращающихся в магнитном поле (циклотронное СИ) [21]. В дальнейшем были изучены и другие модели классического СИ, включая черенковское СИ при прямолинейном движении электронного пучка в периодической замедляющей системе [18,19].

В данной главе проводится анализ автомодельного характера эволюции импульса СИ, генерирующегося в черенковской ЛОВ. В отличие от ЛБВ (см. раздел 1.1), в ЛОВ условие черенковского синхронизма (1.1) выполняется с обратной пространственной гармоникой периодической замедляющей системы. Как известно, ЛОВ является генератором автоколебаний. Под эффектом СИ при этом понимают генерацию мощного короткого импульса на начальной стадии процесса установления колебаний [14,15,18,19].

Импульс СИ формируется из случайных шумов и распространяется с групповой скоростью навстречу потоку электронов, который не модулирован ни по плотности, ни по скорости. Процесс усиления и компрессии возникшего импульса аналогичен механизму усиления короткого импульса в ЛБВ (см. раздел 1.1). Действительно, передний фронт импульса СИ непрерывно взаимодействует с движущимися ему навстречу немодулированными электронными фракциями (см. рис. 2.1), которые поочередно отдают ему свою энергию. В результате в области переднего фронта имеет место нарастание амплитуды сигнала. В остальной части возникшего импульса нарастание амплитуды сигнала ограничено, поскольку обмен энергией происходит с электронами, уже участвовавшими во взаимодействии. Таким образом, происходит формирование короткого мощного импульса СИ с протяженным задним фронтом, который представляет собой нерегулярную последовательность затухающих осцилляций.

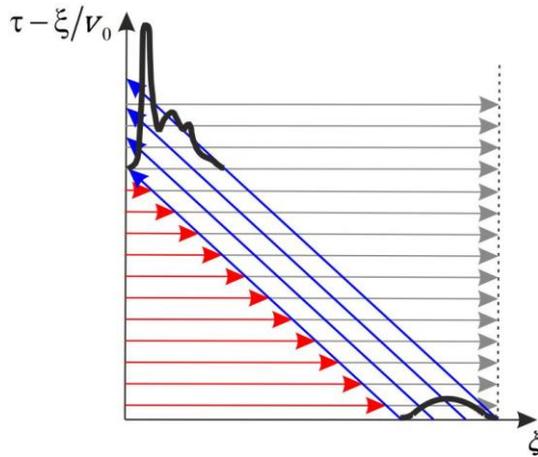


Рис. 2.1. Пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая процесс распространения импульса СИ в черенковской ЛОВ,  $\tau$  и  $\xi$  — время и координата соответственно. Горизонтальные линии – характеристики электронного пучка, наклонные линии – характеристики импульса.

Для описания электронно-волнового взаимодействия будем использовать уравнения нелинейной нестационарной теории [16,17,49]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -\text{Re}(F e^{i\theta}), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -I, \quad (2.2)$$

где

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0. \quad (2.3)$$

Уравнения движения (2.1) записаны в приближении малого изменения энергии электронов [см. (1.13)]. Уравнения (2.1), (2.2) аналогичны уравнениям, описывающим взаимодействие с прямой волной в ЛБВ (см. раздел 1.2), отличаясь от них лишь знаком в левой части уравнения возбуждения (2.2), поскольку групповая скорость обратной гармоники направлена противоположно фазовой. Обозначения совпадают с используемыми в главе 1 за исключением безразмерного времени  $\tau$  в уравнении (2.2), которое для случая взаимодействия с обратной волной в ЛОВ вводится как

$$\tau = \beta_0 C \frac{t - z/v_0}{1/v_g + 1/v_0} \quad (2.4)$$

[ср. с (1.17)].

По-прежнему будем использовать граничные условия для электронов (1.14). Для ВЧ поля граничное условие ставится в виде

$$F(\xi = L) = 0, \quad (2.5)$$

что отражает отсутствие входного сигнала на правой границе системы. Следуя [17], начальное распределение для поля задается в виде малого возмущения, которое является пространственно-однородным на большей части длины системы и имеет короткий, плавно спадающий участок вблизи правой границы, чтобы выполнялось граничное условие (2.5):

$$F(\xi, \tau = 0) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq \xi \leq 0.9L, \\ F_0 \sin^2 \left[ \frac{5\pi}{l} (l - \xi) \right], & 0.9L \leq \xi \leq L, \end{cases} \quad (2.6)$$

где  $F_0 = \text{const}$ ,  $F_0 \ll 1$ . Отметим, что вместо (2.6) начальное распределение можно задавать и каким-либо другим образом. Если возмущение достаточно мало, его форма не влияет существенным образом на конечную стадию эволюции импульса.

## 2.2. Автомоделная генерация импульсов в черенковской лампе обратной волны

### 2.2.1. Автомоделное решение

В разделе 1.3.1 была найдена автомоделная подстановка (1.31) для системы уравнений (1.13) и (1.15), описывающих взаимодействие электронов с прямой волной в ЛБВ. Очевидно, что аналогичное автомоделное решение можно найти и для случая взаимодействия с обратной ЭМ волной в ЛОВ.

Действительно, если вместо (1.25) в уравнениях (2.1) и (2.2) перейти к переменным

$$\xi' = \xi + \tau, \quad \tau' = \tau, \quad (2.7)$$

то уравнения движения электронов (2.1) не изменятся, а уравнение возбуждения (2.2) примет точно такой же вид, что и (1.26). Поэтому полученные в разделе 1.3.1 соотношения (1.27)-(1.35) справедливы и в данном случае, но автомодельную переменную следует вводить следующим образом:

$$\eta = \sqrt{\tau}(\xi + \tau). \quad (2.8)$$

В автомодельных переменных  $|A(\eta)|$ ,  $\vartheta(\eta)$  и  $|I(\eta)|$  решение имеет тот же вид, что и в случае взаимодействия с прямой волной (см. рис. 1.2). Однако при переходе к исходным переменным  $F$ ,  $\xi$  и  $\tau$  его вид изменяется. На рис. 2.2(а) представлено автомодельное решение  $F(\xi, \tau)$ . В отличие от случая взаимодействия с попутной волной [см. рис. 1.3(а)] импульс в процессе взаимодействия движется навстречу электронам от правой границы системы к её началу. Пиковая амплитуда и ширина импульса зависят от  $\tau$  по прежним законам, т.е.  $A_{peak} \sim \tau$  и  $\Delta \sim 1/\sqrt{\tau}$ , а зависимость для положения максимума преобразуется к виду

$$\xi_{max} = \xi_0 - \tau + \frac{\eta_0}{\sqrt{\tau}}, \quad (2.9)$$

где  $\xi_0$  и  $\eta_0$  — некоторые константы. На рис. 2.2(б) также приведена пространственно-временная диаграмма для первой гармоники сгруппированного тока  $I(\xi, \tau)$ .

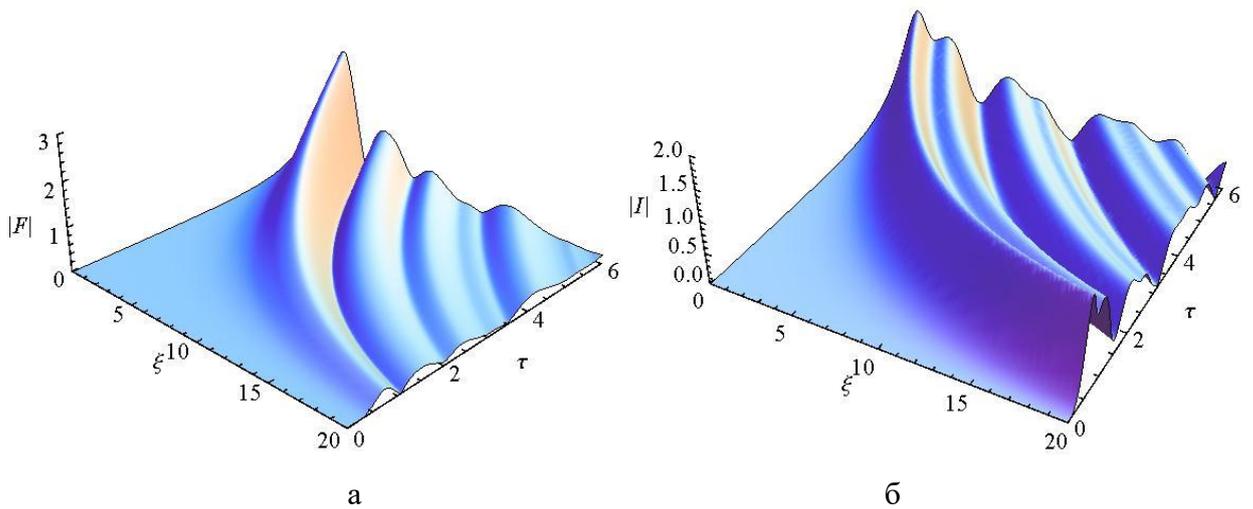


Рис. 2.2. Пространственно-временные распределения амплитуды поля (а) и основной гармоники тока (б) автомодельного решения в случае взаимодействия электронов с обратной ЭМ волной в ЛОВ ( $A_0 = 10^{-3}$ ).

В случае ЛБВ автомодельное решение описывает усиление и компрессию импульса в полубезграничной среде, тогда как для ЛОВ ограниченность в пространстве является принципиальной [см. граничные условия для пучка (1.14) и поля (2.5), которые ставятся на разных концах системы]. В связи с этим физический смысл автомодельного решения в ЛОВ требует более глубокого исследования.

### 2.2.2. Численное моделирование генерации импульса

Подтвердим гипотезу о том, что процесс генерации импульса СИ в ЛОВ описывается найденным автомодельным решением. Проведем численное интегрирование уравнений (2.1), (2.2) с граничными и начальными условиями (1.14), (2.5), (2.6). Методика интегрирования совпадает с той, что была описана в разделе 1.2.3.

На рис. 2.3 представлен типичный пример процесса возникновения и распространения импульса в ЛОВ. Кривая 1 соответствует начальному распределению амплитуды поля вдоль системы (2.6). С течением времени после некоторого переходного процесса у правой границы системы формируется импульс (кривые 2,3), который начинает двигаться к её левому концу (кривые 4-7). В процессе распространения величина пиковой амплитуды импульса увеличивается, а эффективная длительность уменьшается. Дойдя до левой границы системы, импульс её покидает (кривая 8). После этого вблизи правой границы начинается формирование нового импульса, и описанный выше процесс повторяется [17,69].

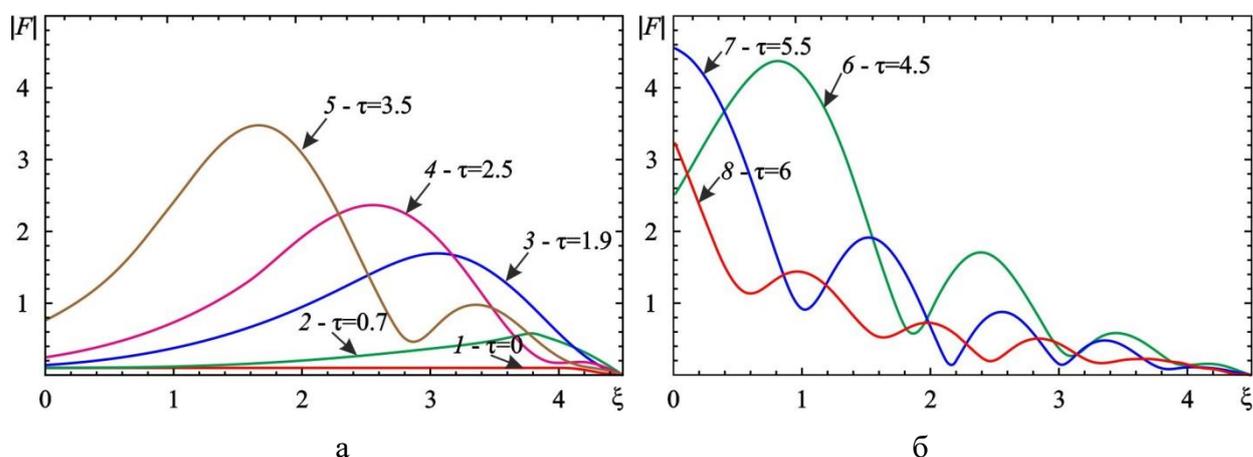


Рис. 2.3. Распределение амплитуды поля вдоль системы при  $L = 4.5$ ,  $F_0 = 0.1$  в различные моменты времени  $\tau$ .

На рис. 2.4 построены зависимости пиковой амплитуды импульса  $A_{peak}$  от  $\tau$  при различных значениях нормированной длины системы  $L$ ; начальная амплитуда  $F_0 = 0.1$ . При каждом значении  $L$  можно выделить переходную стадию, участок линейного нарастания

$A_{peak} \sim \tau$ , который соответствует автомодельному характеру распространения импульса, и участок «насыщения», когда импульс покидает систему через левую границу. На этой стадии амплитуда выходного сигнала достигает своего максимального значения  $A_{max}$ .

С увеличением длины системы  $L$  угол наклона прямой, соответствующей автомодельной стадии, увеличивается, и значение пиковой амплитуды выходного сигнала  $A_{max}$  также растет [рис. 2.4(а)]. Рост продолжается, пока  $L$  не превысит некоторое критическое значение  $L_c$  (при данном  $F_0$  имеем  $L_c \approx 4.4 \div 4.8$ ). При  $L > L_c$  скорость роста и максимальное значение амплитуды импульса, наоборот, сначала несколько уменьшаются [ср. зависимости на рис. 2.4(б), построенные при  $L = 4.8, 5.2$  и  $5.9$ ]. Однако дальнейшее увеличение  $L$  приводит к тому, что зависимости  $A_{peak}(\tau)$  начинают в точности повторяться за исключением стадии переходного процесса. Это значит, что угол наклона прямой, соответствующей автомодельной стадии, и максимальное значение амплитуды  $A_{max}$  с ростом  $L$  стремятся к некоторому постоянному значению (при данном  $F_0$   $A_{max} \rightarrow 4.2$ ). На рис. 2.4(б) синими треугольниками изображена зависимость  $A_{peak}(\tau)$  при  $L = 5.9$ , а чёрными треугольниками – при  $L = 7.0$ . Видно, что зависимости незначительно отличаются лишь на начальной стадии эволюции импульса, а при  $\tau > 2$  с хорошей точностью друг друга повторяют.

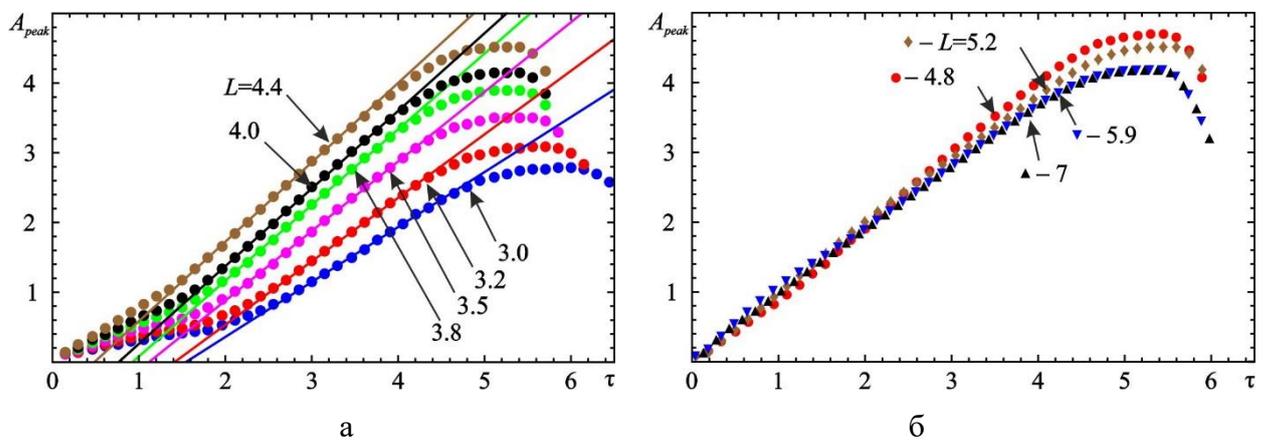


Рис. 2.4. Зависимости величины пиковой амплитуды импульса от времени для различных значений параметра  $L$  при  $F_0 = 0.1$ . Кружками показаны результаты численного моделирования, сплошной линией — теоретические зависимости.

Аналогичная динамика поведения зависимостей  $A_{peak}(\tau)$  с увеличением длины системы  $L$  наблюдается и при других начальных амплитудах  $F_0$ , вплоть до значений, приближающихся к единице, рассматривать которые уже не имеет смысла. На рис. 2.5

приведены зависимости амплитуды насыщения импульса  $A_{\max}$  от длины системы  $L$  при различных значениях  $F_0$ . С ростом  $F_0$  насыщение зависимостей происходит при всё меньших значениях  $L$ , а сами значения, к которым стремится пиковая амплитуда, также уменьшаются.

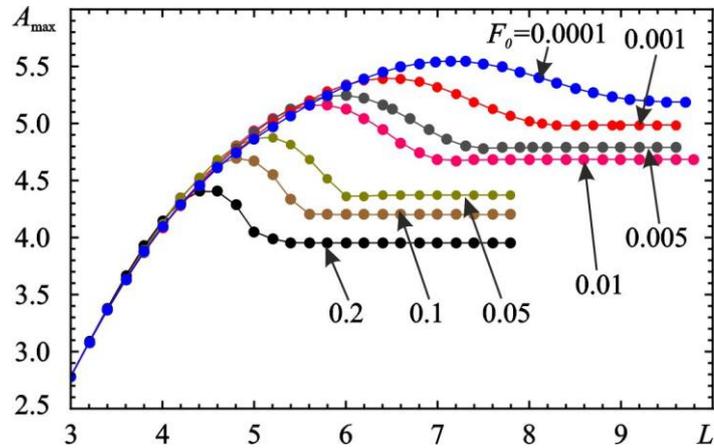


Рис. 2.5. Зависимость максимального значения пиковой амплитуды импульса  $A_{\max}$  от длины системы  $L$  при различных значениях параметра  $F_0$ .

Насыщение зависимостей максимальной пиковой амплитуды импульса  $A_{\max}$  от длины  $L$  обусловлено усложнением характера переходного процесса: при достаточно больших значениях длины системы формирование вторичного импульса начинается еще до того, как первый импульс покинет систему (см., например, [70]). На рис. 2.6 представлены осциллограммы выходного сигнала, на которых видно, что при увеличении длины системы второй пик возрастает и начинает превосходить первый. Наличие второго пика приводит к тому, что параметры первого импульса перестают зависеть от длины системы: при увеличении  $L$  продолжает возрастать только амплитуда второго пика.

Отметим, что граничные условия (1.34) и (1.35), поставленные для автомодельного решения, вообще говоря не согласуются с начальными и граничными условиями (1.14), (2.5), (2.6) исходной системы уравнений. Аналогичная ситуация имела место при анализе автомодельного характера усиления импульса в ЛБВ в главе 1 (см. раздел 1.3.2). Тем не менее, по окончании переходного процесса решение системы (2.1), (2.2) выходит на автомодельную стадию. Из рис. 2.7 видно, что при выбранном начальном распределении поля (2.6) переходная стадия тем меньше, чем больше параметр  $F_0$ .

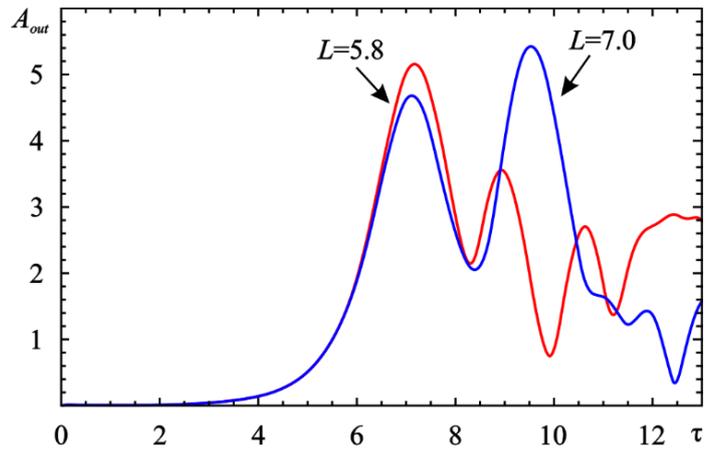


Рис. 2.6. Зависимости амплитуды выходного сигнала от времени при различных длинах системы ( $F_0=0.01$ ).

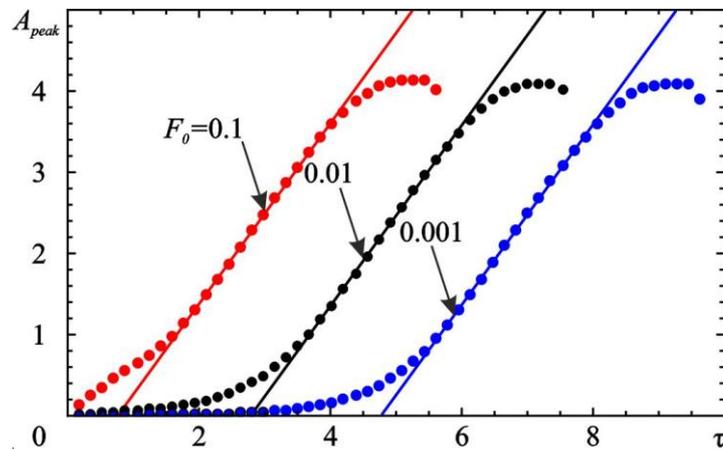


Рис. 2.7. Зависимости величины максимума импульса от времени при  $L=4.0$  и различных значениях параметра  $F_0$ .

Зависимости от времени других характеристик импульса, таких как ширина и положение максимума, также демонстрируют явно выраженную автомодельную стадию. Ширина автомодельного импульса зависит от времени как  $\Delta \sim 1/\sqrt{\tau}$ . На рис. 2.8 представлены результаты расчёта в численном моделировании зависимости величины  $1/\Delta^2$  на автомодельной стадии от времени  $\tau$ . Видно, что эти зависимости действительно являются линейными. Угол наклона прямой растет при увеличении длины системы до  $L \sim 4.4 \div 4.8$ , т.е. при таких значениях  $L$  достигается минимальная ширина импульса. После этого угол наклона перестает меняться, а прямая в целом опускается вниз.

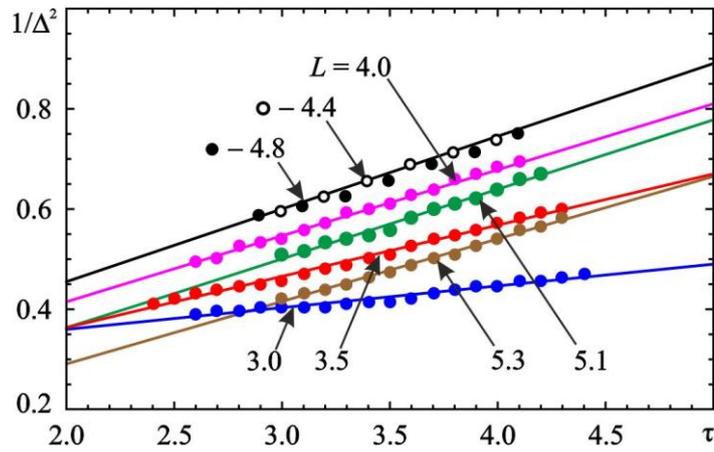


Рис. 2.8. Зависимости квадрата обратной ширины импульса от времени на автомодельной стадии при  $F_0 = 0.1$ .

На рис. 2.9 представлены зависимости координаты максимума импульса от времени, полученные при различных длинах системы  $L$ . При больших  $L$  кривые отличаются друг от друга только переходной стадией, после которой стремятся к асимптотической зависимости

$$\xi_{\max} = \xi_0 - V\tau + \frac{\eta_0}{\sqrt{\tau}}, \quad (2.10)$$

где  $V$  – некоторая константа [ср. с (2.9)]. При выбранных значениях параметров  $\xi_0 \approx 3.23$ ,  $V \approx 0.8$ ,  $\eta_0 \approx 10.7$ . Значение параметра  $V$  оказывается несколько меньше единицы, что обусловлено влиянием обсуждавшихся выше вторичных импульсов при больших значениях  $L$ . Малое значение начальной амплитуды  $F_0 = 10^{-3}$  на рис. 2.9 выбрано для того, чтобы более наглядно пронаблюдать динамику импульса перед выходом на автомодельную стадию.

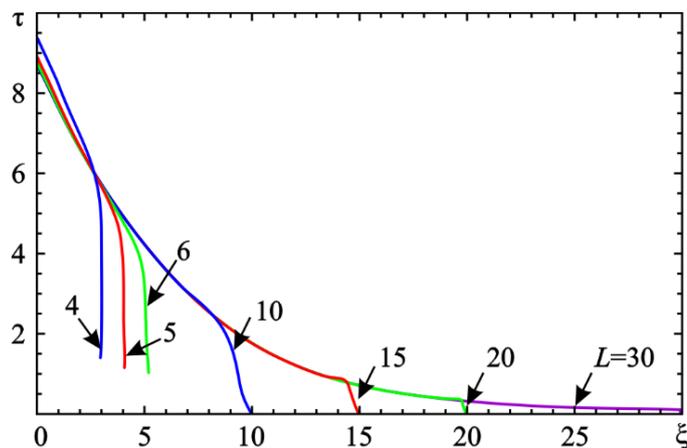


Рис. 2.9. Зависимости координаты максимума импульса от времени при  $F_0 = 10^{-3}$ .

Таким образом, автомодельное решение, найденное в разделе 2.2.1, описывает генерацию короткого импульса СИ в ЛОВ-генераторе. Численное интегрирование уравнений (2.1), (2.2) подтверждает, что после некоторого переходного процесса система выходит на автомодельную стадию, на которой основные параметры сформировавшегося импульса ведут себя в соответствии с автомодельными законами.

### 2.3. Автомодельная генерация импульсов в пространственно-неоднородной лампе обратной волны с профилированием сопротивления связи

Для оптимизации процессов электронно-волнового взаимодействия в ЛОВ часто прибегают к профилированию электродинамических параметров замедляющей системы (ЗС), прежде всего, сопротивления связи. Например, для релятивистских ЛОВ с ЗС в виде плавно гофрированного волновода это, как правило, достигается изменением глубины гофрировки вдоль пространства взаимодействия. Сопротивление связи – параметр, характеризующий степень взаимодействия замедленной волны с потоком электронов [49]. Нетривиальной задачей является выбор закона, по которому должно происходить профилирование.

В работах [29,71] был предложен способ повышения пиковой амплитуды импульсов СИ, генерируемых в ЛОВ, за счёт профилирования сопротивления связи таким образом, чтобы выполнялись условия реализации так называемого режима пространственного накопления энергии (см. также [24,72]). В этом режиме выполняются условия синфазности между волной и гармоникой ВЧ тока, энергия в импульсе растёт линейно по мере его движения по системе, и разность кинетической энергии пучка по разные стороны от импульса (энергетический КПД) сохраняется постоянной. В данном разделе покажем, что этот режим соответствует автомодельному распространению импульса.

Уравнения нелинейной нестационарной теории ЛОВ (2.1) и (2.2) в случае, когда сопротивление связи зависит от координаты, модифицируются следующим образом [24,72]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -\chi(\xi) \operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\chi(\xi) I, \quad I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0. \quad (2.12)$$

Здесь  $\chi(\xi) = \sqrt{K(\xi)/K(L)}$ ,  $K(\xi)$  – сопротивление связи. В простейшем случае, когда ЛОВ пространственно-однородна,  $\chi(\xi) = 1$ ,  $0 \leq \xi \leq L$ . В указанных обозначениях пиковая мощность импульса пропорциональна  $|F|^2$ , а амплитуда синхронной пространственной гармоники поля теперь равна  $\chi(\xi) F$ .

### 2.3.1. Автономные решения

Найдем автономные решения уравнений (2.11) и (2.12), аналогичные рассмотренным в предыдущих разделах. Такие решения существуют, если сопротивление связи зависит от координаты по степенному закону  $\chi(\xi) = \chi_0 \xi^n$ . Поскольку в уравнениях появляются коэффициенты, зависящие от  $\xi$ , удобно ввести новые независимые переменные не с помощью соотношений (2.7), а как  $\xi$  и  $\zeta = \xi + \tau$ , после чего уравнения (2.11), (2.12) примут вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 \theta = -\chi_0 \xi^n \operatorname{Re}(F e^{i\theta}), \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \chi_0 \xi^n \langle e^{-i\theta} \rangle, \quad (2.14)$$

где символ  $\langle \dots \rangle$  по-прежнему означает усреднение по начальным фазам электронов.

Будем искать решение системы уравнений (2.13) и (2.14) в виде автономных подстановок

$$\eta = \zeta \xi^\alpha, \quad F = \xi^\beta A(\eta), \quad \theta = \vartheta(\eta). \quad (2.15)$$

Подстановка (2.15) в (2.14) приведет уравнение к виду

$$\xi^{\beta-1} \left( \alpha \eta \frac{dA}{d\eta} + \beta A \right) = \xi^n \chi_0 \langle e^{-i\vartheta} \rangle. \quad (2.16)$$

Автономная замена переменных должна сводить уравнение в частных производных относительно  $\xi$  и  $\tau$  к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно автономной переменной  $\eta$ . Чтобы в (2.16) исключить явную зависимость от  $\xi$ , необходимо положить

$$\beta = n + 1. \quad (2.17)$$

Подстановка (2.15) в (2.13) с учётом (2.17) приводит к соотношению

$$\alpha \eta \left[ (\alpha - 1) \frac{d\vartheta}{d\eta} + \alpha \eta \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} \right] + 2\alpha \xi^{\alpha+1} \left( \frac{d\vartheta}{d\eta} + \eta \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} \right) + \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} \xi^{2(\alpha+1)} = -\xi^{2n+3} \chi_0 \operatorname{Re}(A e^{i\vartheta}). \quad (2.18)$$

В (2.18) члены, содержащие  $\xi$ , могут сократиться в двух случаях.

Первый случай реализуется при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $n = -1/2$ . При этом  $\chi(\xi) \sim 1/\sqrt{\xi}$ , т.е.  $K \sim 1/\xi$ . Но поскольку импульс СИ формируется вблизи коллекторного конца системы, то интерес представляет ситуация, когда сопротивление связи растёт в направлении движения электронов. Поэтому зависимость  $\chi(\xi)$  выберем в виде

$$\chi(\xi) = \chi_0 / \sqrt{\xi_0 - \xi}, \quad (2.19)$$

где  $\xi_0$  — некоторая константа. При этом автомодельная подстановка (2.15) в исходных переменных  $\xi$  и  $\tau$  примет вид

$$\eta = \xi + \tau, \quad F = \sqrt{\xi_0 - \xi} A(\eta), \quad \theta = \vartheta(\eta). \quad (2.20)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая автомодельные решения, получается при подстановке (2.20) в (2.11) и (2.12):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} &= -\chi_0 \operatorname{Re}(Ae^{i\vartheta}), \\ A &= -2\chi_0 \langle e^{-i\vartheta} \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Исключив отсюда  $A$ , получим

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} = 2\chi_0^2 \operatorname{Re}(e^{i\vartheta} \langle e^{-i\vartheta} \rangle). \quad (2.22)$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (2.22), так же, как в разделах 1.3.1, 1.4.1 и 2.2.1, зададим граничное условие в виде малой модуляции электронов по фазам (1.34). Это соответствует малому начальному возмущению поля

$$A(0) = 4\chi_0 J_1(A_0) \approx 4\chi_0 A_0, \quad (2.23)$$

где  $J_1(A_0)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка,  $A_0 \ll 1$ .

Вид решения  $|A(\eta)|$  показан на рис. 2.10(а). Решение представляет собой импульс, за которым следует шлейф из медленно затухающих осцилляций. По сравнению с автомодельным решением, найденным для пространственно-однородной системы [см. рис. 1.2(а)], осцилляции, следующие за импульсом, являются более интенсивными. На рис. 2.10(б) также представлена пространственно-временная эволюция квадрата поля автомодельного решения  $|F(\xi, \tau)|^2$ . Найденное решение описывает импульс, пиковая амплитуда которого растет прямо пропорционально квадратному корню из координаты, отсчитываемой в направлении распространения импульса  $A_{peak} \sim \sqrt{\xi_0 - \xi}$ , а ширина остается не зависящей от его положения  $\Delta = \text{const}$ .

Отметим, что закон изменения (2.19) совпадает с полученным в работах [29,71], при котором реализуется режим пространственного накопления энергии. Действительно, пиковая мощность автомодельного импульса зависит от координаты как  $A_{peak}^2 \sim (\xi_0 - \xi)$ , т.е. нарастание мощности импульса происходит линейно по мере его пробега по системе. При этом напряженность электрического поля синхронной гармонике, действующей на электроны, постоянна вдоль длины системы  $\chi A_{peak} \sim \text{const}$ .

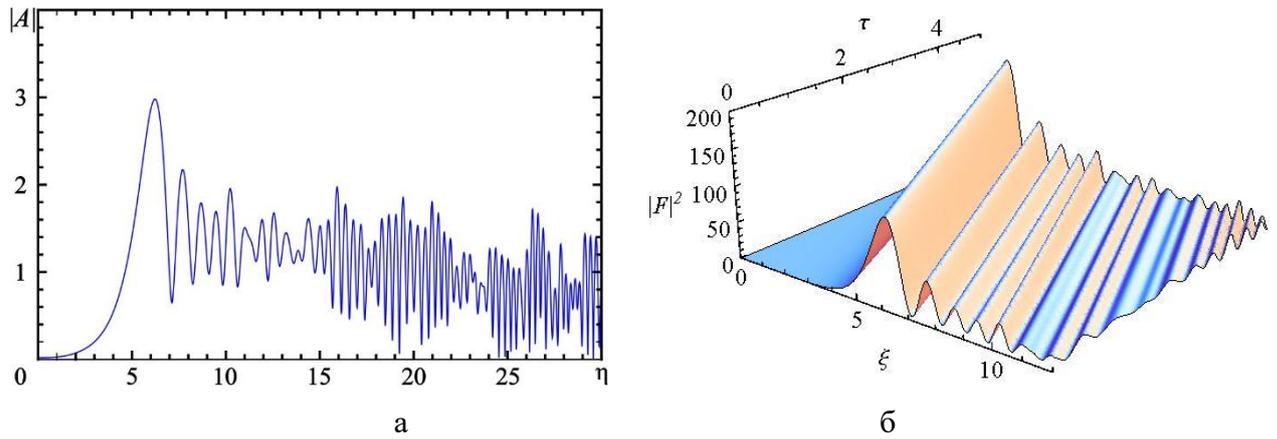


Рис. 2.10. Вид автомодельного решения в автомодельных переменных  $|A(\eta)|$  (а) и в исходных переменных  $|F(\xi, \tau)|^2$  (б),  $\chi_0 = 1$ ,  $\xi_0 = 20$ .

Вторая ситуация, когда в уравнении (2.18) сокращаются члены, зависящие явным образом от  $\xi$ , реализуется при  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1/2$ ,  $n = -3/2$ . При этом

$$\chi(\xi) = \chi_0 / \xi^{3/2}, \quad (2.24)$$

т.е. сопротивление связи  $K(\xi)$  обратно пропорционально кубу расстояния. Автомодельная подстановка (2.15) в переменных  $\xi$  и  $\tau$  имеет вид

$$F = A(\eta) / \sqrt{\xi}, \quad \theta = \vartheta(\eta), \quad \eta = 1 + \tau / \xi. \quad (2.25)$$

Подставляя в (2.16) и (2.18) значения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $n$ , получим систему уравнений, описывающих автомодельное решение:

$$\begin{aligned} \eta \frac{dA}{d\eta} + \frac{1}{2} A &= -\chi_0 \langle e^{-i\vartheta} \rangle, \\ (\eta - 1)^2 \frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} + 2(\eta - 1) \frac{d\vartheta}{d\eta} &= -\chi_0 \operatorname{Re}(A e^{i\vartheta}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Однако в контексте усиления ультракоротких импульсов нахождение данного решения не представляет интереса, поскольку в отличие от предыдущего случая амплитуда поля уменьшается в том же направлении, в котором уменьшается сопротивление связи [см. (2.25)]. Таким образом, анализ показал существование двух возможных законов профилирования сопротивления связи в ЛОВ, при которых существуют автомодельные решения, однако, только один из них является практически интересным в рамках задачи о генерации высокомошного короткого импульса СИ.

### 2.3.2. Численное моделирование генерации импульса

Сравним найденное автомодельное решение (2.20) с результатами численного моделирования генерации импульсов СИ в пространственно-неоднородной ЛОВ с профилированием сопротивления связи. Следуя [24,29,71], зависимость сопротивления связи от координаты  $\chi(\xi)$  зададим следующим образом (см. рис. 2.11): у правой границы системы располагается область конечной длины  $L_0$  с постоянным сопротивлением связи  $\chi(\xi)=1$ , которая дополняется секцией длины  $L_{\text{дон}}$ , где сопротивление связи уменьшается в направлении распространения импульса по найденному автомодельному закону (2.19), т.е.

$$\chi(\xi) = \begin{cases} \chi_0 (\xi_0 - \xi)^{-1/2}, & 0 \leq \xi \leq L_{\text{дон}} \\ 1, & L_{\text{дон}} \leq \xi \leq (L_{\text{дон}} + L_0) \end{cases}, \quad (2.27)$$

где  $\chi_0 = \chi(0)\xi_0^{1/2}$ ,  $\xi_0 = L_{\text{дон}}/[1-\chi(0)^2]$ . Дополнительная пространственно-неоднородная секция характеризуется безразмерной длиной  $L_{\text{дон}}$  и тем, насколько в ней уменьшается сопротивление связи, что определяется значением  $\chi(0)$ .

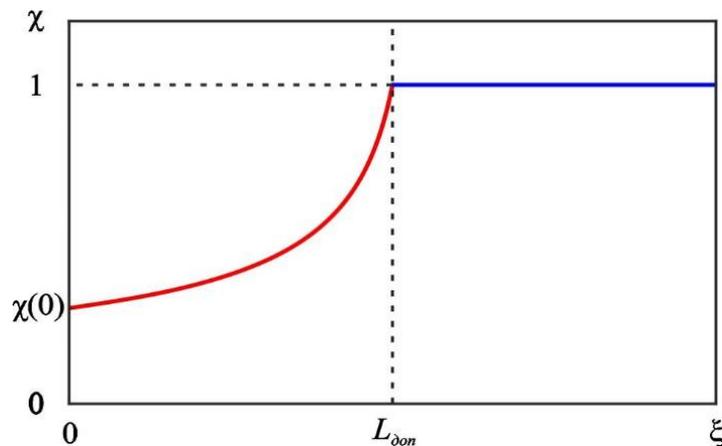


Рис. 2.11. Зависимость  $\chi(\xi)$  в пространственно-неоднородной модели ЛОВ.

Проведём численное интегрирование уравнений (2.11), (2.12) с граничными и начальными условиями (1.14), (2.5), (2.6). Как и при моделировании пространственно-однородной ЛОВ в разделе 2.2.2 рассматривается развитие генерации импульса из малого начального возмущения (2.6).

Результаты моделирования показывают, что в однородной части прибора происходит формирование начального импульса СИ. Двигаясь навстречу электронному потоку, сформировавшийся импульс попадает в область с неоднородным профилем сопротивления связи. В этой области реализуется режим пространственного накопления энергии, и имеет

место усиление импульса в процессе распространения. Для того, чтобы в неоднородной секции не происходило усиление поля прежде, чем у правой границы системы сформируется начальный импульс, амплитуда начального возмущения  $F_0$  должна быть достаточно малой. В численном моделировании полагалось  $F_0 = 10^{-4}$ . Как было показано в разделе 2.2.2, при таком начальном возмущении в однородной ЛОВ насыщение пиковой амплитуды выходного импульса происходит при длине  $L = 7.2$ , причем  $A_{\max} = 5.6$  (см. рис. 2.5).

На рис. 2.12 представлен пример осциллограммы выходного сигнала в ЛОВ с профилированием сопротивления связи (2.27). Осциллограмма рассчитана при  $\chi(0) = 0.3$  и суммарной длине системы  $L = 18$ , причём длина однородного участка выбрана равной длине насыщения,  $L_0 = 7.2$ , а длина неоднородного участка, соответственно, равна  $L_{\text{дон}} = 10.8$ . Для сравнения на рис. 2.12 также изображена осциллограмма выходного сигнала, рассчитанная в случае однородной ЛОВ при таком же начальном возмущении  $F_0$  и той же полной длине системы. Как видно, наличие участка с неоднородным продольным профилем сопротивления связи приводит к увеличению пиковой амплитуды выходного импульса практически в два раза. Отметим, что осциллограмма выходного сигнала в неоднородной ЛОВ качественно совпадает с видом автомодельного решения, который представлен на рис. 2.10(а).

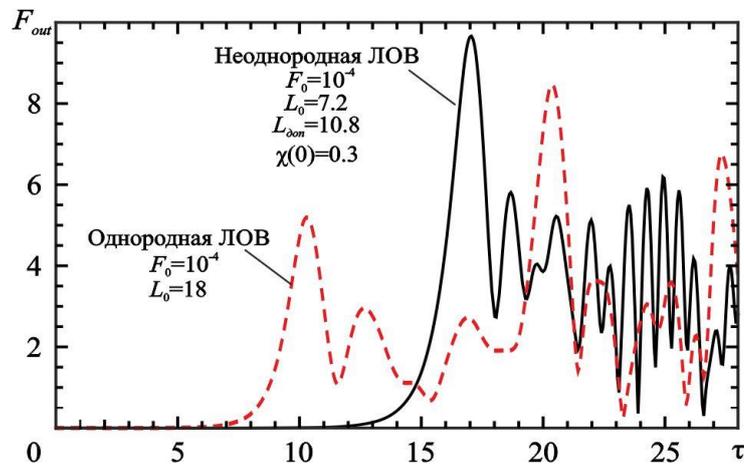


Рис. 2.12. Сравнение осциллограмм выходного сигнала в ЛОВ с профилированием сопротивления связи (2.27) и в однородной ЛОВ при одной и той же длине пространства взаимодействия.

Когда импульс достигает секции с сопротивлением связи, уменьшающимся вдоль направления его движения, квадрат пиковой амплитуды импульса  $A_{\text{peak}}^2$  начинает зависеть от координаты  $\xi$  линейным образом, а ширина импульса  $\Delta$  практически перестаёт меняться. На

рис. 2.13 представлены соответствующие зависимости  $A_{peak}^2(\xi)$  и  $\Delta(\xi)$ . Такое поведение параметров импульса на неоднородном участке в точности соответствует закономерностям, которые следуют из вида автомодельной подстановки (2.15) ( $A_{peak} \sim \sqrt{\xi_0 - \xi}$  и  $\Delta = \text{const}$ ). Отметим, что основной рост пиковой амплитуды импульса происходит при его распространении по дополнительной неоднородной секции, поэтому найденные автомодельные законы являются ключевыми в процессе его эволюции.

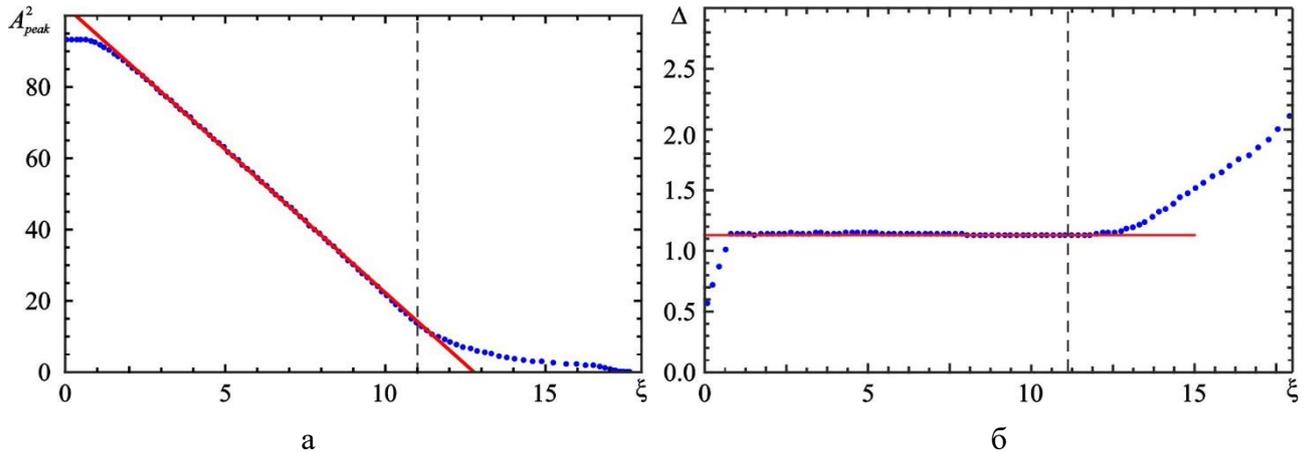


Рис. 2.13. Зависимости  $A_{peak}^2(\xi)$  (а) и  $\Delta(\xi)$  (б) в ЛОВ с профилированием сопротивления связи (2.27) при  $L_0 = 7.2$ ,  $L_{don} = 10.8$ ,  $\chi(0) = 0.3$ ; вертикальная пунктирная линия разделяет однородную (справа) и дополнительную (слева) секции. Кружками показаны результаты численного моделирования, сплошными линиями – аппроксимации автомодельных участков.

При любой фиксированной длине  $L = L_0 + L_{don}$  существует оптимальное соотношение между длинами секций  $L_0$  и  $L_{don}$ , при котором пиковая амплитуда выходного сигнала  $A_{max}$  достигает наибольшего значения. На рис. 2.14 представлены зависимости  $A_{max}(L_{don})$  при  $\chi(0) = 0.3$  и различных суммарных длинах системы  $L$ . Зависимости имеют явно выраженный максимум, который превышает амплитуду насыщения в однородном приборе ( $A_{max} = 5.6$ ). С ростом  $L$  величина максимума сначала также растёт. Максимально возможное значение  $A_{max} = 10.1$  достигается при  $L = 15$ , когда  $L_0 = 3.5$  и  $L_{don} = 11.5$ . При бóльших  $L$  максимальное значение амплитуды по-прежнему достигается при  $L_{don} = 11.5$ , однако само это значение несколько уменьшается. При большой длине системы зависимости  $A_{max}(L_{don})$  практически перестают зависеть от  $L_0$  (см. кривые на рис. 2.14, построенные при  $L = 18$  и  $L = 20$ ).

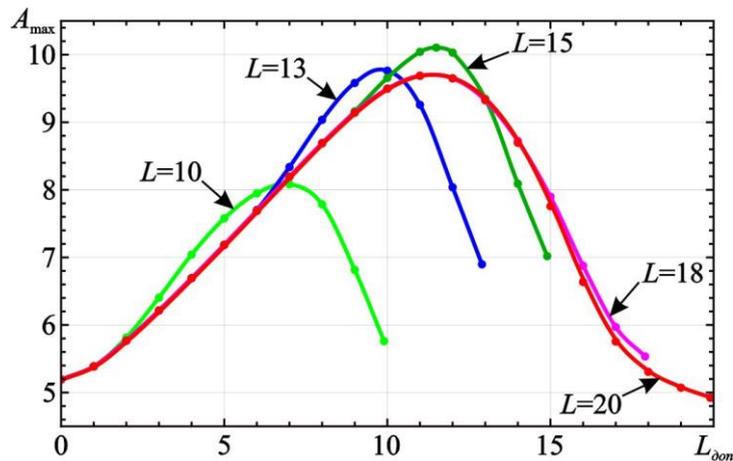


Рис. 2.14. Зависимость пиковой амплитуды выходного сигнала  $A_{\max}$  от длины дополнительной секции  $L_{\text{дон}}$  при  $\chi(0) = 0.3$  и различных суммарных длинах системы  $L$ .

На рис. 2.15 представлены зависимости пиковой амплитуды выходного импульса  $A_{\max}$  от  $L_{\text{дон}}$  при  $L_0 = 7.2$  и различных  $\chi(0)$ . Когда  $\chi(0)$  близко к единице, пиковая амплитуда может оказаться даже ниже, чем амплитуда насыщения в однородной ЛОВ, т.е.  $A_{\max} < 5.6$ , поскольку небольшое изменение сопротивления связи практически не подавляет генерацию вторичных импульсов, но при этом усиление основного импульса замедляется за счет слабой связи в начале системы. Однако при  $\chi(0) < 0.9$  зависимости имеют явно выраженный максимум, в котором  $A_{\max} > 5.6$ . Величина максимума растет при уменьшении сопротивления связи в начале системы  $\chi(0)$ , а также смещается в область всё больших длин прибора  $L_{\text{дон}}$ .

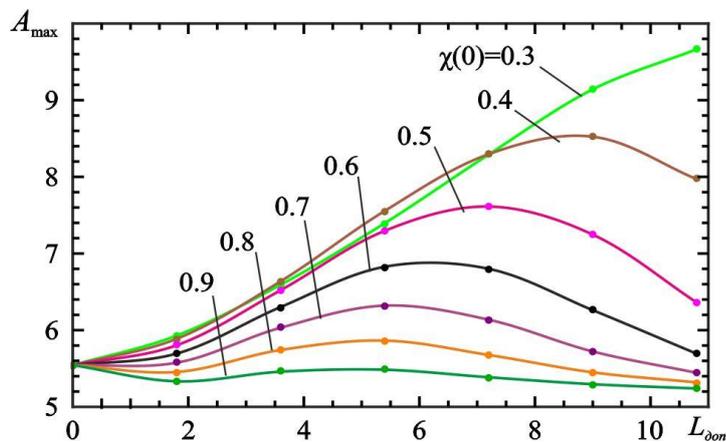


Рис. 2.15. Зависимости пиковой амплитуды выходного сигнала  $A_{\max}$  от длины дополнительной секции  $L_{\text{дон}}$  при  $L_0 = 7.2$  и различных значениях параметра  $\chi(0)$ .

Таким образом, результаты численного моделирования подтверждают, что при профилировании сопротивления связи электронного пучка с синхронной гармоникой поля по закону (2.19), совпадающему с известным из более ранних работ [24,29,71,72], эволюция импульса СИ в ЛОВ носит автомодельный характер. При этом параметры импульса ведут себя в соответствии с автомодельными законами, при которых действительно реализуется режим пространственного накопления энергии в импульсе.

Основные недостатки рассматриваемого подхода связаны с необходимостью использования большой суммарной длины системы. Очевидно, что увеличение длины приводит к увеличению массы и габаритов магнитной системы. Также на больших длинах процесс становится крайне чувствительным к начальному разбросу электронов по скоростям и к частотной дисперсии групповой скорости волны, которые не учитываются при теоретическом рассмотрении, однако на практике ограничивают амплитуду генерируемого импульса. С другой стороны, существуют технологические ограничения, не позволяющие сколь угодно уменьшать  $\chi(0)$ , например, ограничение на возможную минимальную глубину гофрировки.

#### **2.4. Автомодельная генерация импульсов в процессе вынужденного рассеяния излучения на попутном электронном пучке**

Подходы к анализу автомодельной эволюции импульсов в системах типа электронный поток – ЭМ волна, развитые в текущей главе и главе 1 в контексте приборов черенковского типа, носят общий характер и поэтому могут быть использованы при рассмотрении других механизмов электронно-волнового взаимодействия. В частности, представляет интерес лазер на свободных электронах (ЛСЭ), в котором также могут генерироваться импульсы СИ, причём механизм генерации схож с аналогичными процессами в черенковской ЛОВ.

ЛСЭ – класс приборов, в которых происходит взаимодействие релятивистских пучков электронов, совершающих поперечные колебания в поле накачки, с незамедленными ЭМ волнами [73]. Принцип работы ЛСЭ основан на вынужденном параметрическом распаде волны накачки на ЭМ сигнальную волну (полезный сигнал) и волну пространственного заряда в электронном пучке [60], причём в соответствии с условиями трёхволнового резонанса

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad \bar{k}_p = \bar{k}_s + \bar{k}_i, \quad (2.28)$$

где  $\omega_{s,p,i}$  и  $\bar{k}_{s,p,i}$  — частоты и волновые числа сигнальной волны (signal wave), волны накачки (pump wave) и «холостой» волны пространственного заряда в электронном пучке (idle wave), соответственно. Традиционно в ЛСЭ волна накачки является встречной, а рассеяние

происходит с повышением частоты. При этом в пучке возбуждается медленная волна пространственного заряда с отрицательной энергией.

Однако интерес представляет и противоположная ситуация, когда используется волна накачки, попутная с электронами, а рассеяние происходит во встречную волну с понижением частоты:

$$\omega_s = \omega_p / \left( \gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right)^2, \quad (2.29)$$

где  $\gamma_0 = (1 - v_{||}/c)^{-1/2}$ ,  $v_{||}$  — поступательная скорость движения электронов. При этом в пучке возбуждается быстрая волна пространственного заряда. Например, если в качестве накачки используется мощное лазерное излучение, а энергия электронов составляет порядка нескольких МэВ, то в соответствии с (2.29) частота рассеянного излучения лежит в терагерцевом диапазоне [74]. Также отметим работу [75], в которой рассеяние попутной с электронным пучком волны накачки во встречную сигнальную волну рассматривалось с точки зрения перестройки частоты излучения. Если накачка представляет собой излучение мощного гиротрона суб-ТГц или ТГц диапазона, а пучок является слабoreлятивистским, то при изменении энергии электронов возможна плавная перестройка частоты рассеянной волны в пределах 20-40% от частоты падающего излучения.

Качественный вид дисперсионной диаграммы трёхволнового взаимодействия представлен на рис. 2.16. На возможность генерации короткого импульса СИ в данной системе было указано в работе [74].

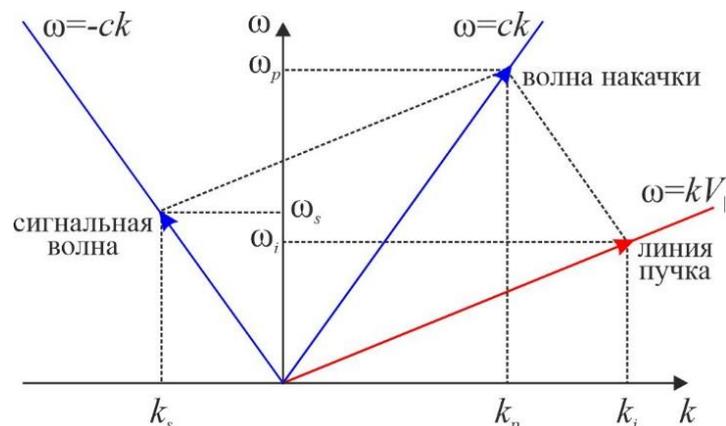


Рис. 2.16. Дисперсионная диаграмма трёхволнового взаимодействия в рассматриваемой модели ЛСЭ.

Отметим аналогию между процессом генерации ультракоротких импульсов в ЛСЭ с попутной накачкой и в ЛОВ. Эффективное взаимодействие в ЛОВ происходит в условиях синхронизма, когда фазовая скорость замедленной волны близка к поступательной скорости

движения электронов [см. условие черенковского синхронизма (1.1)]. В ЛСЭ синхронное взаимодействие электронов с сигнальной волной возникает за счёт поперечных осцилляций, приобретаемых электронами в поле накачки. Условие синхронизма сигнальной волны и волны биений между накачкой и сигналом можно записать в виде

$$\omega_s + k_s v_{\parallel} = \omega_p - k_p v_{\parallel}. \quad (2.30)$$

Накачка обеспечивает связь между электронами и сигнальной волной, и параметр, являющийся аналогом сопротивления связи в теории ЛОВ, пропорционален плотности мощности накачки [60]. Когда амплитуда накачки падает, взаимодействие ослабевает, что является дополнительным механизмом нелинейного насыщения наряду с эффектом перегруппировки пучка, характерным для приборов черенковского типа. По аналогии с эволюцией импульса СИ в ЛОВ, следует ожидать, что генерация импульса в ЛСЭ также носит автомодельный характер.

Запишем уравнения нелинейного нестационарного взаимодействия электронного потока с попутной волной накачки и встречной сигнальной волной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial \tau} - \frac{\partial a_s}{\partial \xi} &= i a_p I^*, \\ \frac{\partial a_p}{\partial \xi} &= i \varepsilon a_s I, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= \text{Im} [ a_p a_s^* e^{i\theta} ], \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $a_s$  и  $a_p$  — безразмерные амплитуды сигнальной волны и волны накачки, соответственно,  $\theta$  — фаза электрона относительно синхронной волны,

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\theta) d\theta_0 \quad (2.32)$$

— амплитуда первой гармоники сгруппированного тока,  $\xi$  и  $\tau$  — безразмерные координата и время, соответственно,  $\varepsilon$  — параметр истощения накачки. Вывод уравнений (2.31) и используемые нормировки подробно изложены в ряде работ, например, см. [60,74,79]. Величину потерь энергии волной накачки характеризует параметр истощения  $\varepsilon$ . В реальных экспериментальных условиях этот коэффициент достаточно мал. В пределе, когда  $\varepsilon \ll 1$ ,  $a_p \approx \text{const}$ , и уравнения (2.31) принимают тот же вид, что и уравнения нелинейной нестационарной теории ЛОВ [ср. с (2.1), (2.2)].

Уравнения (2.31) также следует дополнить начальными и граничными условиями. Поскольку на вход системы поступает невозбужденный пучок электронов, их следует записать в том же виде, что и в предыдущих случаях [ср. с (1.14)]

$$\theta(\xi = 0) = \theta_0 \in [0; 2\pi], \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi = 0) = 0. \quad (2.33)$$

Также необходимо задать начальное распределение амплитуды волны накачки вдоль системы. В простейшем случае можно считать, что поле накачки однородно вдоль системы,

$$a_p(\tau = 0, \xi) = 1, \quad 0 \leq \xi \leq L, \quad (2.34)$$

где  $L$  — безразмерная длина пространства взаимодействия. В более строгой постановке следует учитывать, что накачка инжектируется с катодного конца системы в виде импульса излучения.

Процесс рассеяния развивается из малых начальных флуктуаций поля на частоте рассеянного излучения, поэтому в численном моделировании следует задать ненулевое начальное распределение поля сигнальной волны вдоль системы  $a_s(\xi, \tau = 0)$ . Как уже отмечалось при моделировании генерации импульсов в ЛОВ (см. раздел 2.1), при условии  $a_s(\xi, \tau = 0) \ll 1$  форма начального возмущения определяет длительность и характер переходного процесса, когда происходит формирование импульса, однако не оказывает существенного влияния на конечную стадию эволюции импульса. Поэтому распределение  $a_s(\xi, \tau = 0)$  может быть задано различным образом, например, в форме (2.6) или в виде случайных флуктуаций. Результаты численного моделирования, представленные в разделе 2.4.2, получены при начальном распределении поля сигнальной волны, заданном в виде [см. (2.6)]

$$a_s(\xi, \tau = 0) = \begin{cases} 0.01, & 0 \leq \xi \leq 0.9L, \\ 0.01 \sin^2 \left[ \frac{5\pi}{l} (l - \xi) \right], & 0.9L \leq \xi \leq L. \end{cases} \quad (2.35)$$

Также следует задать ещё одно граничное условие

$$a_s(\xi = L, \tau) = 0, \quad (2.36)$$

что соответствует отсутствию поступающей извне волны на частоте рассеянного излучения.

#### 2.4.1. Автомодельное решение

Следуя методике, изложенной в разделе 1.3.1, для уравнений (2.31) также можно найти автомодельную подстановку:

$$\eta = \tau(\xi + \tau), \quad a_s(\xi, \tau) = \tau^{3/2} A_s(\eta), \quad a_p(\xi, \tau) = \tau^{1/2} A_p(\eta), \quad \theta(\xi, \tau) = \vartheta(\eta). \quad (2.37)$$

С помощью замены (2.37) исходные уравнения (2.31) в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно автомодельной переменной  $\eta$ :

$$\begin{aligned}\frac{dA_s}{d\eta} &= \frac{1}{\eta} \left( iA_p J^* - \frac{3}{2} A_s \right), \\ \frac{dA_p}{d\eta} &= i\varepsilon A_s J, \\ \frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} &= \text{Im} \left( A_p A_s^* e^{i\vartheta} \right),\end{aligned}\tag{2.38}$$

где

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i\vartheta) d\vartheta_0.\tag{2.39}$$

Чтобы решить систему (2.38) и найти вид соответствующего автомодельного решения, необходимо задать граничные условия. Одно из них ставится из требования устранения сингулярности при  $\eta = 0$  в правой части первого уравнения системы:

$$A_s(0) = \frac{2}{3} iA_p(0) J^*(0).\tag{2.40}$$

Из вида автомодельной переменной  $\eta$  [см. (2.37)] следует, что граничное условие в точке  $\eta = 0$  соответствует условию, заданному на характеристике  $\xi + \tau = 0$ . Потребуем, чтобы слева от этой характеристики было невозмущенное состояние, поскольку в эту область возмущение еще не успело распространиться:

$$a_p = 1, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau < 0.\tag{2.41}$$

В соответствии с (2.37) это значит, что

$$A_p = 1/\sqrt{\tau}, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow -0.\tag{2.42}$$

Если начальное возмущение фаз электронов отсутствует, т.е.  $\vartheta(0) = \vartheta_0$ ,  $\vartheta_0 \in [0, 2\pi]$ , то  $J^*(0) = 0$ . Согласно (2.40) при этом  $A_s(0) = 0$ , что дает тривиальное решение. Поэтому зададим малую начальную модуляцию электронов по фазам при отсутствии модуляции по скоростям [ср. с (1.34)]:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 + A_0 \sin \vartheta_0, \quad \frac{d\vartheta}{d\eta}(0) = 0,\tag{2.43}$$

где  $A_0 \ll 1$ ,  $A_0 \in R$ . С учётом (2.43)  $J(0) = -2J_1(A_0) \approx -A_0$ , где  $J_1$  — функция Бесселя первого рода 1-го порядка. Условие (2.40) примет вид

$$A_s(0) = -\frac{2}{3} iA_p(0) (2J_1(A_0))^* \approx -\frac{2}{3} iA_0 A_p(0).\tag{2.44}$$

Таким образом, будем решать систему (2.38) при граничных условиях (2.42), (2.44), которые можно переписать в виде

$$A_s(0) = -\frac{2iA_0}{3\sqrt{\tau}}, \quad A_p(0) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 + A_0 \sin \vartheta_0. \quad (2.45)$$

Система решалась численно при помощи программы Wolfram Mathematica.

На рис. 2.17 представлен вид автомодельных решений  $|A_s(\eta)|$  и  $|A_p(\eta)|$  при  $A_0 = 0.01$  и различных параметрах истощения накачки  $\varepsilon$ .

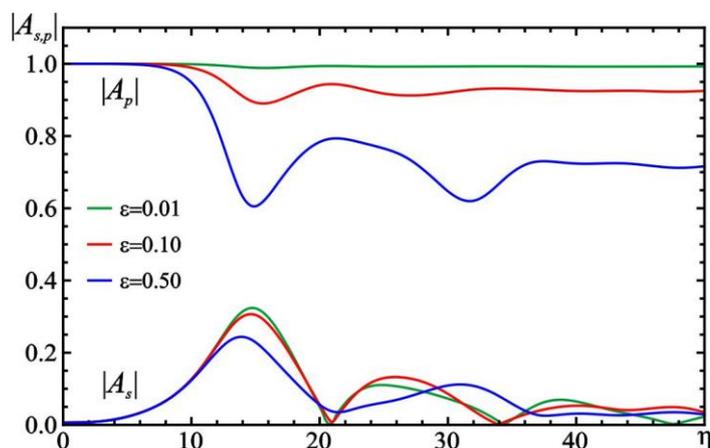


Рис. 2.17. Вид автомодельных решений для  $|A_s(\eta)|$  и  $|A_p(\eta)|$  при  $A_0 = 0.01$  и различных параметрах истощения накачки  $\varepsilon$ .

Решение для сигнальной волны имеет вид импульса, за которым тянется хвост в виде затухающих осцилляций. При увеличении истощения накачки пиковая амплитуда импульса уменьшается. Когда  $\varepsilon \ll 1$ , истощение накачки практически отсутствует, и  $|A_p(\eta)| \approx 1$ . С увеличением  $\varepsilon$  в решении для волны накачки  $|A_p(\eta)|$  появляется резкий спад, соответствующий быстрому нарастанию амплитуды поля в решении для сигнальной волны  $|A_s(\eta)|$ . Вслед за впадиной в распределении поля  $|A_p(\eta)|$  тянется хвост из затухающих осцилляций, в результате которых поле стремится к некоторому ненулевому значению, меньшему единицы. Чем больше  $\varepsilon$ , тем глубже впадина и тем меньше значение, к которому стремится поле накачки после осцилляций.

#### 2.4.2. Численное моделирование генерации импульсов

Подтвердим гипотезу о том, что процесс генерации импульса в ЛСЭ носит автомодельный характер и описывается найденным автомодельным решением (2.37). Для этого проведём численное интегрирование уравнений (2.31) с начальными и граничными условиями (2.33)-(2.36). Следует, однако, отметить, что начальные и граничные условия (2.33) -(2.36) вообще говоря не совпадают с граничными условиями (2.45), заданными для

автомодельного решения. Аналогичная ситуация имела место и при сопоставлении автомодельных решений с результатами численного моделирования в случаях усиления импульсов в ЛБВ и генерации импульсов в ЛОВ (см. разделы 1.3.2 и 2.2.2 соответственно). Более того, как и в случае ЛОВ, рассматриваемая модель ЛСЭ является принципиально ограниченной в пространстве [см. граничные условия (2.33) и (2.36)], так что динамика системы будет существенным образом зависеть от её длины  $L$ . Поэтому, для того, чтобы минимизировать влияние граничных условий и провести качественное сопоставление результатов численного моделирования и автомодельного решения, рассмотрим случай достаточно большой длины системы  $L > 10$ . Это позволит более наглядно пронаблюдать усиление и компрессию импульса, поскольку большую часть времени в процессе распространения по системе он будет располагаться вдали от границ.

На рис. 2.18 представлены пространственно-временные распределения амплитуды поля сигнальной волны  $|a_s|$  и волны накачки  $|a_p|$ , построенные при  $L = 20$  и  $\varepsilon = 0.1$ . После некоторого переходного процесса у правой границы системы формируется импульс сигнальной волны, который начинает движение навстречу электронному потоку [см. рис. 2.18(а)]. В процессе эволюции его пиковая амплитуда увеличивается, а эффективная длительность сокращается. Следуя за импульсом сигнальной волны, в распределении поля волны накачки появляется впадина, которая также движется навстречу электронам, причем её глубина увеличивается в процессе распространения [см. рис. 2.18(б)].

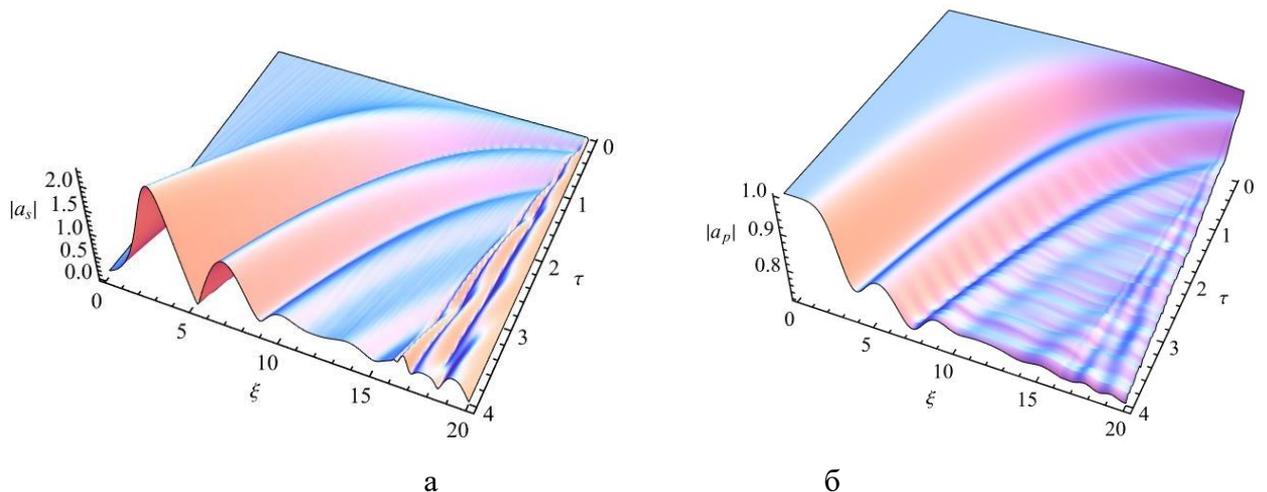


Рис. 2.18. Пространственно-временные распределения амплитуды поля сигнальной волны  $|a_s(\xi, \tau)|$  (а) и волны накачки  $|a_p(\xi, \tau)|$  (б) в численном моделировании при  $L = 20$  и  $\varepsilon = 0.1$ .

Отметим, что распределения  $|a_s|$  и  $|a_p|$  вдоль координаты  $\xi$  в различные моменты времени  $\tau$  (см., например, рис. 2.19) визуально хорошо согласуются с видом автомодельного решения, который представлен на рис. 2.17.

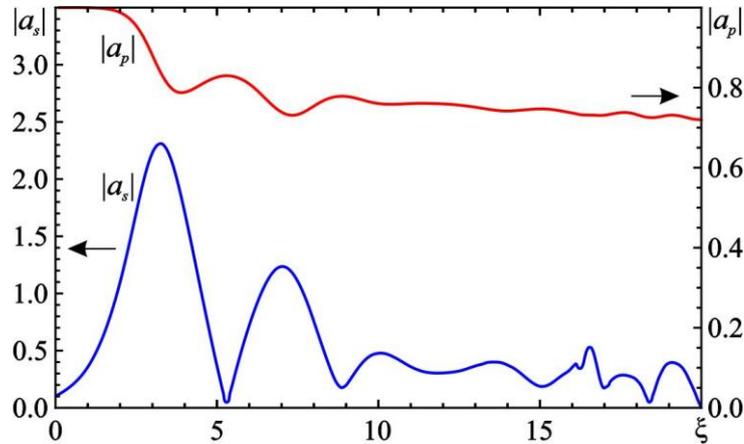


Рис. 2.19. Пространственные распределения амплитуды поля сигнальной волны  $|a_s|$  и волны накачки  $|a_p|$  в численном моделировании при  $L = 20$  и  $\varepsilon = 0.1$  в момент времени  $\tau = 4$ .

Перейдем к исследованию количественных характеристик поведения импульса сигнальной волны. На рис. 2.20 представлена зависимость пиковой амплитуды импульса  $A_{peak}$  от времени  $\tau$ , построенная при  $L = 7$  и  $\varepsilon = 0.1$ . Зависимость можно разделить на несколько характерных участков. После некоторого переходного процесса, в результате которого из случайных флуктуаций формируется импульс (область  $a$  на рис. 2.20), решение выходит на стадию, когда  $A_{peak}$  растёт линейно с увеличением  $\tau$  (область  $b$  на рис. 2.20), т.е.  $A_{peak} \sim \tau$ . Действительно, зависимость  $A_{peak}(\tau)$  на участке  $1.5 < \tau < 2.5$  хорошо аппроксимируется прямой линией [см. рис. 2.21(a)]. Такой характер зависимости соответствует автомодельному решению уравнений ЛОВ (см. раздел 2.2.1). Это связано с тем, что на ранних временах эффект истощения накачки достаточно слаб, и на начальной стадии эволюции импульса уравнения (2.31) приблизительно эквивалентны уравнениям нелинейной нестационарной теории ЛОВ (2.1), (2.2). При этом основные параметры импульса почти не зависят от  $\varepsilon$  и ведут себя так же, как в случае  $\varepsilon = 0$ .

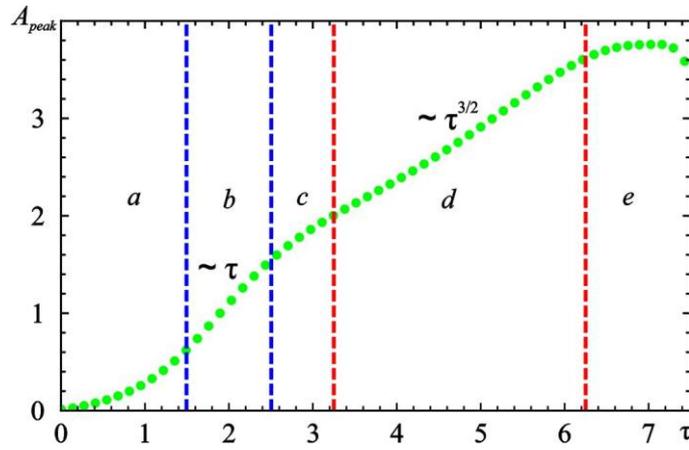


Рис. 2.20. Зависимость пиковой амплитуды импульса рассеянной волны  $A_{peak}$  от времени  $\tau$  при  $L=7$ ,  $\varepsilon=0.1$ . Кружками показаны результаты численного моделирования. Вертикальными штриховыми линиями показаны различные этапы эволюции импульса:  $a$  – переходный процесс формирования импульса,  $b$  – автомодельное распространение в режиме ЛОВ,  $c$  – переходный процесс между автомодельными стадиями,  $d$  – автомодельное распространение импульса в режиме ЛСЭ,  $e$  – насыщение.

С течением времени потери энергии волной накачки накапливаются, и после некоторого переходного процесса (область  $c$  на рис. 2.20) эволюция импульса выходит на другую автомодельную стадию, когда пиковая амплитуда импульса  $A_{peak}$  растёт прямо пропорционально  $\tau^{3/2}$ , т.е.  $A_{peak} \sim \tau^{3/2}$  (область  $d$  на рис. 2.20). На рис. 2.21(б) представлена зависимость  $A_{peak}^{2/3}(\tau)$ , которая на участке  $3.25 < \tau < 6.25$  действительно хорошо аппроксимируется прямой линией. Такой характер зависимости соответствует автомодельному решению (2.37), найденному для уравнений нелинейной нестационарной теории ЛСЭ (2.31). Отметим, что на этой стадии ширина импульса уменьшается обратно пропорционально  $\tau$ , что также согласуется с автомодельной подстановкой (2.37). Достигая границы, импульс покидает систему, что соответствует стадии насыщения (область  $e$  на рис. 2.20).

Таким образом, численное моделирование показывает, что в процессе эволюции импульс сигнальной волны, генерирующийся в ЛСЭ с попутной ЭМ накачкой, проходит несколько различных стадий, одна из которых соответствует автомодельному режиму, обнаруженному теоретически в разделе 2.3.1.

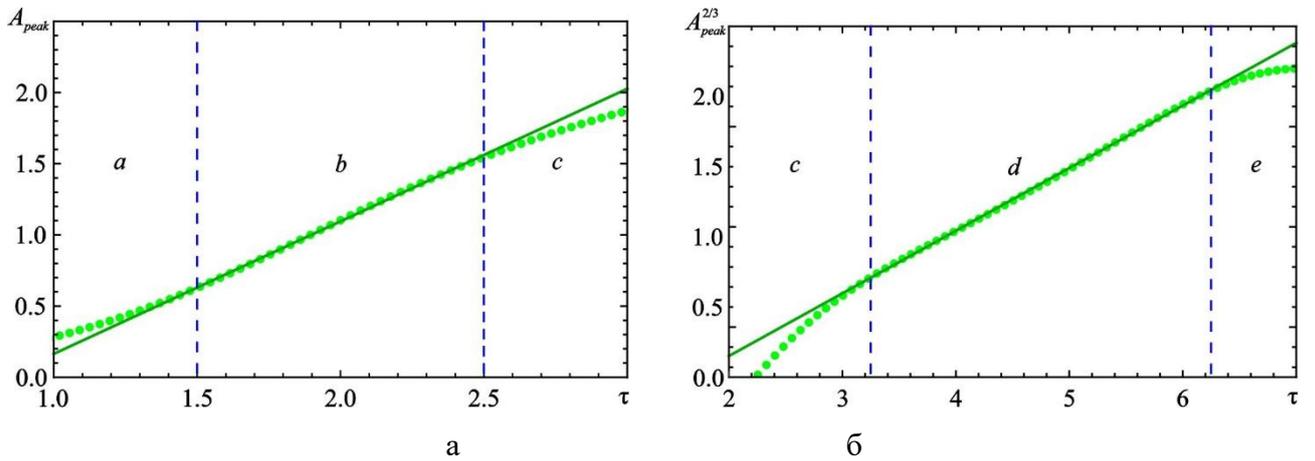


Рис. 2.21. Зависимости  $A_{peak}(\tau)$  (а) и  $A_{peak}^{2/3}(\tau)$  (б), построенные при  $L = 7$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

Область  $b$  соответствует автомодельному распространению импульса в режиме ЛОВ, где  $A_{peak} \sim \tau$ . Область  $d$  соответствует автомодельному распространению импульса в режиме ЛСЭ, где  $A_{peak} \sim \tau^{3/2}$ . Кружками показаны результаты численного моделирования, сплошными линиями – результаты линейной аппроксимации.

## 2.5. Выводы к Главе 2

В данной главе представлены результаты исследования автомодельного характера генерации импульсов в процессах взаимодействия электронного пучка с обратной ЭМ волной.

Показано, что система уравнений, описывающая нестационарное взаимодействие электронного потока с обратной ЭМ волной в ЛОВ-генераторе, допускает автомодельное решение. Аналогично автомодельному решению, найденному в разделе 1.3.1 для взаимодействия с прямой волной в ЛБВ, оно описывает усиление и компрессию импульса, однако в случае ЛОВ импульс движется навстречу электронам от правой границы системы к её началу. Согласно найденной автомодельной подстановке, амплитуда импульса растёт линейно с увеличением времени  $\tau$ , а его ширина сокращается пропорционально  $\tau^{-1/2}$ .

Проведено сопоставление с результатами численного моделирования генерации импульса СИ в ЛОВ, которое показало, что после некоторого переходного процесса решение выходит на автомодельную стадию. На этой стадии основные характеристики импульса ведут себя в соответствии с найденным автомодельным решением. Однако особенности системы (граничные условия для пучка и поля ставятся на разных границах, т.е. система принципиально ограничена в пространстве) накладывают определенную специфику на процесс распространения импульса при увеличении нормированной длины  $L$ . Пока этот параметр не превышает некоторого критического значения  $L_c$ , рост длины системы

сопровождается увеличением пикового значения выходного сигнала, а также возрастанием угла наклона прямой, соответствующей автомоделной стадии на графике зависимости величины максимума импульса от времени (т.е. увеличивается скорость роста импульса). При  $L > L_c$  эти характеристики перестают меняться, т.е. процесс автомоделного распространения импульса в системе перестает зависеть от её длины (за исключением начальной переходной стадии). Последний эффект связан с усложнением формы образующегося импульса СИ: импульс становится многопиковым за счет того, что происходит зарождение вторичных импульсов прежде, чем первый успевает покинуть систему. При этом с ростом величины начального возмущения  $F_0$  значение  $L_c$  уменьшается и «насыщение» зависимостей наступает раньше, а сами значения, к которым стремится пиковая амплитуда, также уменьшаются.

Рассмотрен вопрос о существовании автомоделных решений в ЛОВ с сопротивлением связи, изменяющимся вдоль длины. Определены законы профилирования сопротивления связи, при которых существуют автомоделные решения. Один из найденных законов соответствует режиму пространственного накопления энергии, который был ранее исследован в работах [24,29,71,72] и представляет интерес в рамках задачи о генерации высокомошного короткого импульса СИ в ЛОВ. При этом имеет место нарастание сопротивления связи по гиперболическому закону в направлении движения электронов. В численном моделировании рассмотрена конструкция ЛОВ, в которой однородный участок, расположенный вблизи правой границы системы, дополнен секцией с сопротивлением связи, изменяющимся вдоль длины по найденному закону. Продемонстрировано, что на этапе распространения импульса по неоднородному участку поведение его основных характеристик хорошо описывается автомоделными законами, в частности, квадрат амплитуды импульса растет линейно вдоль координаты, а ширина остается неизменной. Показано, что при определённом соотношении между длинами секций системы возможно получить существенное увеличение пиковой амплитуды выходного импульса по сравнению с генерацией, наблюдаемой в однородном приборе.

Исследован автомоделный характер генерации короткого импульса в ЛСЭ с попутной ЭМ накачкой, когда рассеянное излучение распространяется навстречу электронному потоку. Такая ситуация имеет много общего с черенковской ЛОВ. Найдено автомоделное решение которое для рассеянной сигнальной волны представляет собой импульс, пиковая амплитуда которого растёт пропорционально  $\tau^{3/2}$ , а ширина уменьшается обратно пропорционально  $\tau$ . Численное моделирование демонстрирует, что эволюция импульса проходит через несколько этапов. После некоторого переходного процесса, в результате которого из случайных флуктуаций формируется импульс, решение выходит на стадию, соответствующую

автомодельному решению уравнений ЛОВ, когда пиковая амплитуда растет пропорционально  $\tau$ . Это связано с тем, что на ранних временах эффект истощения накачки достаточно слаб. С течением времени потери энергии волной накачки накапливаются, и после некоторого переходного процесса эволюция импульса выходит на другую автомодельную стадию, соответствующую автомодельному решению уравнений ЛСЭ (2.37).

### 3. ГЕНЕРАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ СО ВСТРЕЧНЫМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ПУЧКОМ ЭЛЕКТРОНОВ

#### 3.1. Вводные замечания

Модуляционная неустойчивость (МН) является одним из фундаментальных эффектов, приводящих к возникновению сложной динамики в нелинейных средах с дисперсией [39-44]. МН может наблюдаться в системах различной природы и играет важную роль в гидродинамике, физике плазмы, нелинейной оптике и др. МН – это неустойчивость квазимонохроматической волны с несущей частотой  $\omega$  относительно медленных пространственно-временных модуляций на боковых частотах  $\omega \pm \Omega$ ,  $\Omega \ll \omega$ . При наличии МН гармонический сигнал, распространяющийся в нелинейной среде с дисперсией, обогащается новыми независимыми спектральными компонентами. Вместо стационарного распространения волны наблюдается автомодуляция, т.е. осцилляции амплитуды волны, которые могут быть как регулярными, так и хаотическими. Процесс развития МН, как правило, завершается образованием солитонов огибающей. Наиболее известным примером таких солитонов являются солитонные решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) [43, 80-82].

Можно также отметить интересную аналогию между МН и другим известным нелинейным явлением — самоиндуцированной прозрачностью. Например, в работе [83] теоретически рассматривалась генерация последовательности солитонов самоиндуцированной прозрачности в результате развития МН при распространении непрерывного сигнала по нелинейному оптоволокну, легированному двухуровневыми атомами. Аналогичный эффект при плазмон-поляритонной самоиндуцированной прозрачности в металлическом цилиндре, окруженном слоем двухуровневых атомов с частотой, близкой к плазмонному резонансу, отмечался в работе [84]. Явление самоиндуцированной прозрачности хорошо известно в квантовой оптике [13], где оно возникает при распространении в двухуровневой пассивной (неинвертированной) среде короткого светового импульса с длительностью, гораздо меньшей, чем времена релаксации. В условиях резонанса, когда частота волны близка к частоте перехода, невозбужденные частицы, поглощая энергию поля, переходят на возбужденный уровень (см. рис. 3.1) и ослабляют передний фронт импульса. В связи с этим его задний фронт распространяется в уже возбужденной среде, вызывая обратные переходы частиц и излучение, которое, наоборот, приводит к усилению соответствующих участков профиля импульса. Таким образом, импульс приобретает равновесную солитоноподобную форму и распространяется с постоянной

скоростью как стационарная волна [43]. Импульс с достаточно большой энергией может распадаться на несколько солитонов самоиндуцированной прозрачности. Однако в квантовой оптике невозможно пронаблюдать МН непрерывного сигнала, поскольку в реальных двухуровневых оптических средах релаксационные процессы неизбежно подавляют такую неустойчивость.

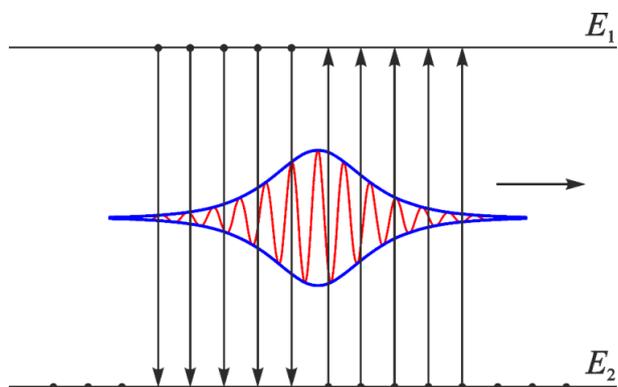


Рис. 3.1. К объяснению механизма формирования солитона самоиндуцированной прозрачности при распространении короткого светового импульса в двухуровневой неинвертированной среде [43].

Аналогом двухуровневой квантовой среды в классической электронике может служить поток электронов в продольном магнитном поле. Движение электронов в поперечном направлении представляет собой вращение по окружности с циклотронной частотой  $\omega_H$ . Такой поток электронов можно трактовать как совокупность большого числа циклотронных осцилляторов, которые неизохронны в силу релятивистской зависимости циклотронной частоты  $\omega_H$  от энергии. В квантово-механическом описании уровни энергии поперечного движения электронных осцилляторов дискретны, причём в силу неизохронности энергетический спектр поперечных колебаний является не эквидистантным, а сгущающимся по мере увеличения энергии. Если поток электронов изначально прямолинейный (т.е. поперечные движения отсутствуют), то такая среда из электронов-осцилляторов является невозбужденной и, значит, неинвертированной.

Возможность образования солитонов самоиндуцированной прозрачности при резонансном взаимодействии ЭМ волны с потоком невозбужденных циклотронных электронов-осцилляторов была теоретически предсказана в работах [34-36]. Важно отметить, что в электронике, в отличие от оптики, релаксационными процессами, как правило, можно пренебречь, поскольку они связаны со столкновениями электронов между собой или с ионным фоном, что несущественно в вакуумных приборах. Таким образом, возникают новые режимы,

которые невозможно пронаблюдать в квантовой оптике. В частности, результаты численного моделирования, представленные в [35,36], показывают, что при встречном распространении электронов и волны непрерывный сигнал постоянной амплитуды может быть преобразован в близкую к периодической последовательность микроволновых солитонов самоиндуцированной прозрачности. Также наблюдалась генерация и более сложных, хаотических последовательностей импульсов.

В данной главе генерация солитонов при резонансном циклотронном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным потоком электронов рассматривается с позиции развития МН. Проводится детальное исследование различных режимов распространения волны. Основное внимание уделяется условиям, при которых непрерывный входной сигнал преобразуется в последовательность солитоноподобных импульсов. Теоретический анализ, представленный в данной главе, позволяет объяснить, почему в одних случаях наблюдаются стационарные режимы прохождения волны, а в других — нестационарные, а также определить структуру областей различных режимов на плоскости управляющих параметров. Теоретические выводы о возможных режимах распространения волны подтверждаются как результатами численного интегрирования усредненных уравнений электронно-волнового взаимодействия, так и результатами прямого 3-D моделирования методом «частиц в ячейке» (3-D PIC моделирование).

### 3.2. Модель и основные уравнения

Схема рассматриваемой системы представлена на рис. 3.2. Трубочатый пучок электронов, направляемый продольным магнитным полем  $B_0$ , взаимодействует с обратной ЭМ волной в цилиндрическом волноводе. Электроны инжектируются через левую границу системы (в точке  $z=0$ ) с постоянной продольной скоростью  $V_z$  и нулевой вращательной скоростью. Таким образом, электронный пучок изначально является прямолинейным. Непрерывный гармонический сигнал с постоянной амплитудой подаётся на правой границе системы ( $z=l$ ).

Эффективное взаимодействие электронов и ЭМ волны имеет место в условиях циклотронного резонанса, т.е. при условии синхронизма между волноводной  $TE_{mn}$  модой и быстрой циклотронной волной в электронном пучке:

$$\omega_r \approx k_z V_z + \omega_H, \quad (3.1)$$

где  $\omega_r$  — частота волны,  $k_z$  — продольное волновое число (в рассматриваемом случае, когда волна обратная,  $k_z < 0$ ),  $\omega_H = eB_0/m_e\gamma$  — циклотронная частота,  $\gamma$  — фактор Лоренца электронов,  $e$  и  $m_e$  — заряд и масса покоя электрона, соответственно.

ЭМ волна распространяется навстречу изначально прямолинейному потоку электронов, т.е. навстречу потоку невозбуждённых циклотронных осцилляторов. В условиях циклотронного резонанса (3.1) волна начинает поглощаться, вызывая поперечные колебания электронов (см. рис. 3.1). С ростом амплитуды этих колебаний, в силу неизохронности электронов-осцилляторов, условие (3.1) нарушается, и происходит насыщение циклотронного поглощения.

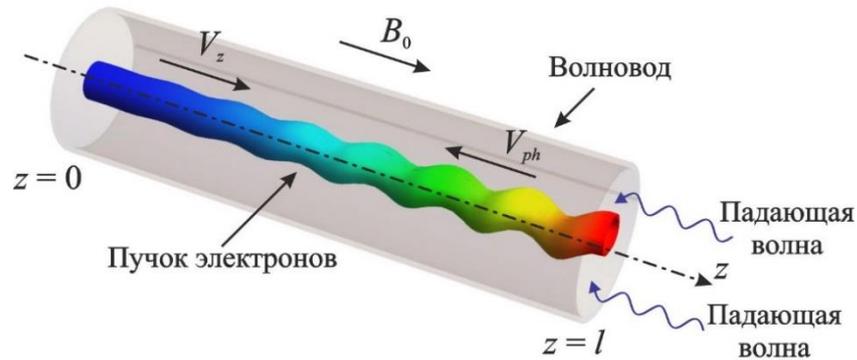


Рис. 3.2. Схематическая модель резонансного циклотронного взаимодействия излучения со встречным прямолинейным электронным пучком.

Электрическое поле ЭМ волны можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[ \mathbf{E}_s(x, y) A(z, t) \exp(i\omega t - ik_z z) \right], \quad (3.2)$$

где  $A = A(z, t)$  — комплексная амплитуда поля волны, медленно меняющаяся по времени  $t$  и продольной координате  $z$ , функция  $\mathbf{E}_s(x, y)$  описывает поперечную структуру соответствующей волноводной моды  $\text{TE}_{mn}$ ,  $x$  и  $y$  — поперечные координаты.

Электронно-волновое взаимодействие в рассматриваемой модели описывается системой уравнений, хорошо известной из литературы [34-36]

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} - \frac{\partial a}{\partial Z} = -p, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i|p|^2 p = a, \quad (3.4)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{1 + \beta_z / \beta_{ph}}}{2\sqrt{2}G^{3/4}\beta_z^{3/2}\gamma_0} \frac{eAJ_{m-1}(v_n r_b / r_0)}{m_e c \omega_r} \quad (3.5)$$

— нормированная комплексная амплитуда поля волны,

$$p = \frac{\sqrt{\mu} p_{\perp} \exp(-i\omega_r t - ik_z z)}{G^{1/4} m_e c \gamma_0 \beta_z} \quad (3.6)$$

— нормированный комплексный поперечный импульс электронов  $p_{\perp} = p_x + ip_y$ ,

$$Z = \frac{\sqrt{G} \omega_r z}{c}, \quad (3.7)$$

$$\tau = \sqrt{G} \omega_r (t - z/V_z) \frac{\beta_{gr} \beta_z}{\beta_z + \beta_{gr}}, \quad (3.8)$$

— безразмерные независимые переменные. В (3.5)-(3.8)

$$\mu = \frac{\beta_z (1 - \beta_{ph}^{-2})}{2(1 + \beta_z/\beta_{ph})} \quad (3.9)$$

— параметр неизохронности;  $\beta_z = V_z/c$ ,  $\beta_{ph} = V_{ph}/c$  и  $\beta_{gr} = V_{gr}/c$  — невозмущенная продольная скорость электронов, фазовая и групповая скорости волны, нормированные на скорость света  $c$ , соответственно;

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eI_b}{m_e c^3} \frac{2\mu(1 + \beta_z/\beta_{ph})^2}{\gamma_0 \beta_{ph}^{-1} \beta_z^3} \frac{J_{m-1}^2(v_n r_b/r_0)}{J_m^2(v_n)(v_n^2 - m^2)} \quad (3.10)$$

— параметр, характеризующий связь электронов с волноводной модой  $TE_{mn}$ ;  $\gamma_0 = (1 - \beta_z^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца невозмущенных электронов;  $I_b$  — ток электронного пучка;  $J_m(x)$  — функция Бесселя порядка  $m$ ,  $v_n$  —  $n$ -ый корень уравнения  $dJ_m(x)/dx = 0$ ,  $r_b$  and  $r_0$  — радиус инжекции пучка и радиус волновода, соответственно.

Уравнение (3.3) описывает возбуждение волны электронами, а (3.4) — уравнение движения электронов, усредненное по периоду циклотронных осцилляций  $T_H = 2\pi/\omega_H^0$ , где  $\omega_H^0 = eB_0/(m_e \gamma_0)$  — невозмущенная циклотронная частота. Подробный вывод основных уравнений представлен в работе [34].

Поскольку рассматривается изначально прямолинейный электронный пучок, то на входе в пространство взаимодействия у электронов отсутствует вращательная скорость, т.е.

$$p(Z=0) = 0. \quad (3.11)$$

Это позволяет описывать движение всех электронов с помощью одного уравнения (3.4). Как известно, уравнения резонансного циклотронного взаимодействия электронов с бегущей ЭМ волной, имеют интеграл движения

$$|p_{\perp}| |A| \sin \theta = \text{const}, \quad (3.12)$$

где  $\theta = \omega_r t - k_z z + \vartheta + \alpha$ ,  $\vartheta = \arg(p_\perp)$  и  $\alpha = \arg(A)$  (см., например, [76]). Из (3.11) следует, что  $|p_\perp||A|\sin\theta = 0$ . В процессе взаимодействия электроны приобретают ненулевой поперечный импульс, поэтому для выполнения условия (3.12) необходимо, чтобы  $\sin\theta = 0$  для всех электронов. Это означает, что поперечные импульсы всех электронов в процессе взаимодействия меняются одинаковым образом. Для сравнения, в лазерах на циклотронном резонансе (гиротрон, гирорезонансная ЛБВ и др.) волна взаимодействует с изначально вращающимися электронами, т.е.  $p_\perp(z=0) = p_0 e^{i\vartheta_0}$ , где фазы вращения  $\vartheta_0 = \vartheta(z=0)$  равномерно распределены от 0 до  $2\pi$ . Таким образом, электроны с различными  $\vartheta_0$  движутся по-разному, и необходимо решать отдельные уравнения движения (3.4) для каждого электрона.

На правой границе, при  $Z = L$ , в систему подаётся непрерывный гармонический сигнал

$$a(Z = L) = a_0 \exp(i\delta_0 \tau), \quad (3.13)$$

где  $a_0$  — нормированная постоянная амплитуда сигнала, а

$$\delta_0 = \frac{1 + \beta_z / \beta_{ph} - \omega_H^0 / \omega_r}{\beta_z \sqrt{G}} \quad (3.14)$$

— нормированная отстройка частоты сигнала  $\omega_r$  от резонансной частоты.

В работах [35,36] уравнения (3.3), (3.4) с граничными условиями (3.11), (3.13) решались численно для частного случая  $\delta_0 = 0$ , т.е. при точном выполнении условия циклотронного резонанса (3.1). В зависимости от длины системы и интенсивности входного сигнала были обнаружены различные динамические режимы, включая генерацию близкой к периодической последовательности солитоноподобных импульсов.

### 3.3. Нелинейное дисперсионное соотношение

Рассмотрим простейшее решение уравнений (3.3), (3.4) в виде монохроматической волны с постоянной амплитудой

$$\begin{aligned} a &= A_0 \exp[i(\omega\tau - kZ)], \\ p &= P_0 \exp[i(\omega\tau - kZ)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подстановка (3.15) в (3.3), (3.4) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} i(\omega + k)A_0 &= -P_0, \\ i(-k + |P_0|^2)P_0 &= A_0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует нелинейное дисперсионное соотношение

$$(\omega + k)(k - |P_0|^2) = -1, \quad (3.17)$$

причем комплексные амплитуды волн  $A_0$  и  $P_0$  связаны следующим образом:

$$|P_0|^2 = |A_0|^2 (\omega + k)^2. \quad (3.18)$$

На рис. 3.3 представлен вид зависимости  $\omega(k)$ . Видно, что существует полоса непропускания  $\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$ , в которой возникает циклотронное поглощение сигнала.

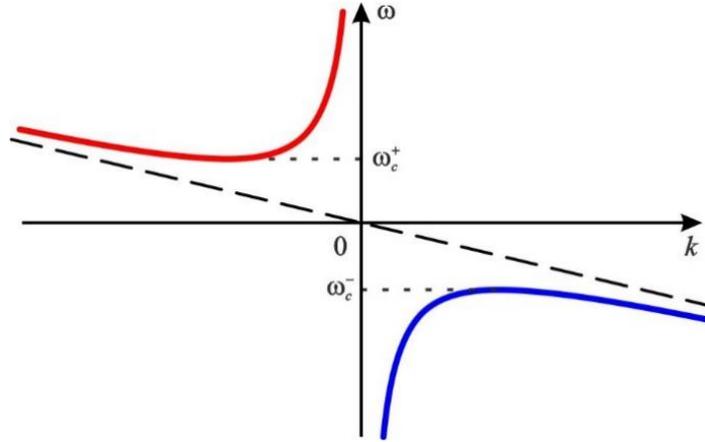


Рис. 3.3. Дисперсионная диаграмма  $\omega(k)$ . Штриховой линией изображена асимптота  $\omega = -k$ .

Корни  $k(\omega)$  уравнения (3.17) можно выразить в явном виде:

$$k_{\pm}(\omega) = \frac{\omega - |P_0|^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega + |P_0|^2}{2}\right)^2 - 1}. \quad (3.19)$$

Из (3.19) находим критические частоты

$$\omega_c^{\pm} = \pm 2 - |P_0|^2 \quad (3.20)$$

и соответствующие критические значения  $k$

$$k_c^{\pm} = k(\omega_c^{\pm}) = \mp 1 + |P_0|^2. \quad (3.21)$$

Из (3.20) и (3.21) видно, что  $\omega_c^{\pm} + k_c^{\pm} = \pm 1$ , поэтому, как следует из (3.18), на верхних частотах отсечки  $|A_0| = |P_0|$ . Следовательно, (3.20) можно переписать в виде

$$\omega_c^{\pm} = \pm 2 - |A_0|^2. \quad (3.22)$$

Таким образом, полоса непропускания смещается в область более низких частот с увеличением мощности сигнала (см. рис. 3.4).

МН имеет место при выполнении критерия Лайтхилла [42,43]

$$\chi\beta < 0, \quad (3.23)$$

где  $\chi = \partial^2 \omega / \partial k^2$  — параметр дисперсии групповой скорости, а  $\beta = \partial \omega / \partial |A_0|^2$  — параметр нелинейности. Используя нелинейное дисперсионное соотношение (3.17), нетрудно вычислить параметры  $\chi$  и  $\beta$ :

$$\chi = -\frac{2}{(k - |P_0|^2)^3}, \quad (3.24)$$

$$\beta = \frac{\partial \omega}{\partial |A_0|^2} = \frac{\partial \omega}{\partial |P_0|^2} \cdot \frac{\partial |P_0|^2}{\partial |A_0|^2} \approx -\frac{1}{(k - |P_0|^2)^4}. \quad (3.25)$$

Очевидно, что  $\beta < 0$ , в то время как  $\chi > 0$  на верхней ветви дисперсионной характеристики и  $\chi < 0$  — на нижней (см. рис. 3.3). Таким образом, на верхней ветви возникает МН, т.е. монохроматические решения (3.15) неустойчивы относительно медленных пространственно-временных модуляций.

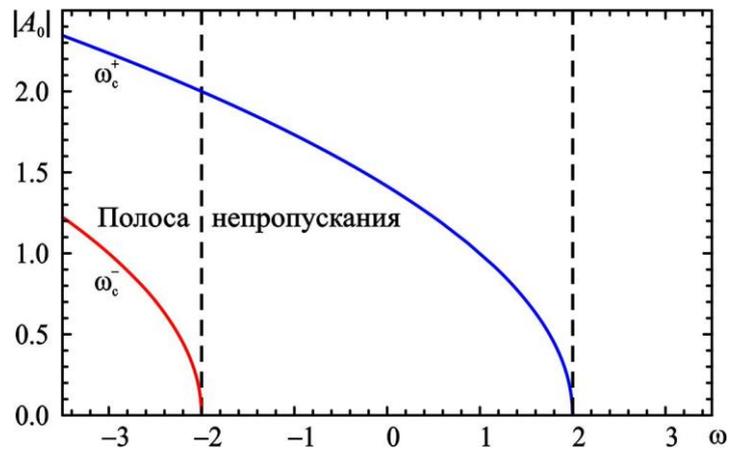


Рис. 3.4. Зависимость границ полосы непропускания  $\omega_c^\pm$  (3.22) от амплитуды сигнала  $A_0$ . Штриховыми линиями изображены границы полосы непропускания в линейном пределе ( $\omega_c^\pm \rightarrow \pm 2$  при  $A_0 \ll 1$ ).

Рассмотрим ситуацию, когда несущая частота входного гармонического сигнала  $\delta_0$  [см. (3.13)] лежит в полосе непропускания. Если входная мощность достаточно мала, падающая волна полностью поглощается. С увеличением мощности сигнала критическая частота  $\omega_c^+$  уменьшается в соответствии с (3.22) и рано или поздно может стать равной  $\delta_0$ . При этом становится возможным распространение волны без затухания (так называемое, нелинейное туннелирование [37,38]). Однако, как следует из представленного выше анализа, возникает МН, и соответствующее монохроматическое решение (3.15) неустойчиво. Таким образом, следует ожидать формирование последовательности импульсов в виде солитонов.

### 3.4. Стационарные решения

#### 3.4.1. Периодические решения

Рассмотрим стационарные решения уравнений (3.3), (3.4) с постоянной частотой  $\delta$

$$\begin{aligned} a(Z, \tau) &= a(Z) e^{i\delta\tau}, \\ p(Z, \tau) &= p(Z) e^{i\delta\tau}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Подстановка (3.26) сводит систему дифференциальных уравнений в частных производных (3.3), (3.4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dZ} - i\delta a &= p, \\ \frac{dp}{dZ} + i|p|^2 p &= a. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Уравнения (3.27) можно представить в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{da}{dZ} &= i \frac{\partial H}{\partial a^*}, \\ \frac{dp}{dZ} &= -i \frac{\partial H}{\partial p^*}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$H = \delta|a|^2 + \frac{|p|^4}{2} + i(ap^* - a^*p) \quad (3.29)$$

— гамильтониан. Помимо гамильтониана, который всегда является интегралом движения, у системы (3.28) есть ещё один очевидный интеграл [34]

$$|a|^2 - |p|^2 = \text{const}. \quad (3.30)$$

Закон сохранения (3.30) отражает, что в системе происходит перекачка энергии между ЭМ волной и поперечными колебаниями электронов. С учётом граничного условия (3.11) из (3.30) следует, что

$$|p|^2 = I - I_0, \quad (3.31)$$

где  $I = |a|^2$ ,  $I_0 = |a(Z=0)|^2$ . Также в соответствии с граничным условием (3.11)  $H = \delta I_0$ .

Выражение (3.29) можно переписать в виде

$$\delta I_0 = \delta I + \frac{(I - I_0)^2}{2} - 2|a||p|\sin\chi, \quad (3.32)$$

где  $\chi = \arg(a) - \arg(p)$ . Из (3.32) находим, что

$$\sin\chi = \frac{2\delta(I - I_0) + (I - I_0)^2}{4\sqrt{I(I - I_0)}}. \quad (3.33)$$

Таким образом, учитывая соотношения (3.31) и (3.33), систему (3.27) можно свести к одному ОДУ первого порядка:

$$\frac{dI}{dZ} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{I-I_0} \sqrt{16I - (I-I_0)(2\delta + I - I_0)^2} = \pm \sqrt{2W(I)}. \quad (3.34)$$

Уравнение (3.34) позволяет уподобить решения системы (3.27) колебаниям осциллятора в потенциальной яме

$$W(I) = -\frac{1}{8} (I-I_0) (16I - (I-I_0)(2\delta + I - I_0)^2). \quad (3.35)$$

На рис. 3.5. представлены профили потенциальных ям  $W(I)$  при различных значениях  $I_0$ . Если  $I_0 < I_c$ , где

$$I_c = \frac{1}{27} \left[ (12 + \delta^2)^{3/2} + 36\delta - \delta^3 \right], \quad (3.36)$$

то уравнение  $W(I) = 0$  имеет четыре действительных корня  $I_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , один из которых, очевидно, равен введенной выше величине  $I_0$ . Пронумеруем их так, как показано на рис. 3.5. Отметим, что если  $\delta > -2$ , то  $I_1 \geq I_0 \geq I_2 \geq I_3$  [см. рис. 3.5(а)], в то время как при  $\delta < -2$  имеем  $I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq I_0$  [см. рис. 3.5(б)]. Если  $I_0 > I_c$ , то корни  $I_{0,1}$  уравнения  $W(I) = 0$  остаются действительными, а корни  $I_{2,3}$  становятся комплексно-сопряженными.

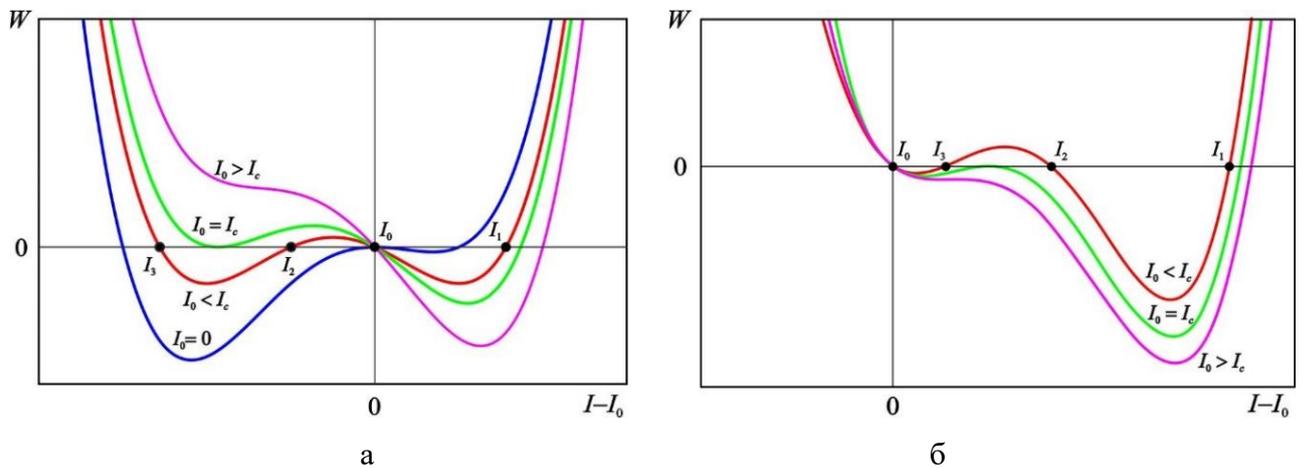


Рис. 3.5. Качественный вид потенциальных ям  $W(I)$  при различных  $I_0$ : (а)  $\delta > -2$ , (б)  $\delta < -2$ .

На рис. 3.6 изображены характерные фазовые траектории на плоскости  $(I - I_0, dI/dZ)$  при  $\delta = 0$  и различных значениях  $I_0$ . В соответствии с граничным условием  $I(Z = 0) = I_0$  следует рассматривать только те из них, которые выходят из начала координат. Это семейство

замкнутых фазовых траекторий, соответствующих периодическим решениям, для которых  $I_0 \leq I \leq I_1$ . При  $I_0 = 0$  фазовая траектория вырождается в гомоклиническую петлю сепаратрисы, а соответствующее решение представляет собой солитон (см. раздел 3.4.2).

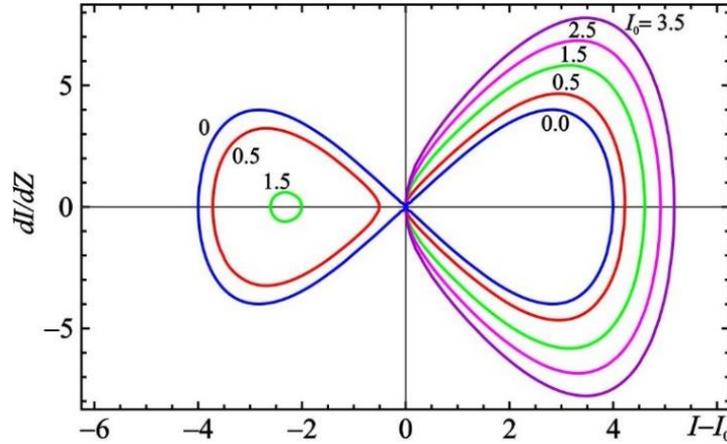


Рис. 3.6. Фазовые траектории на плоскости  $(I - I_0, dI/dZ)$  при  $\delta = 0$ .

Решения ОДУ (3.34) можно выразить в явном виде через эллиптические функции Якоби. Разделяя переменные в (3.34), получим

$$\frac{dI}{\sqrt{I - I_0} \sqrt{16I - (I - I_0)(2\delta + I - I_0)^2}} = \pm \frac{dZ}{2}. \quad (3.37)$$

Для удобства сделаем замену  $I - I_0 = 1/\alpha$  и перепишем выражение (3.37) в виде

$$\pm 2\sqrt{I_0}Z + C = - \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^3 + (4 - \delta^2)\alpha^2/(4I_0) - (\delta/4I_0)\alpha - 1/(16I_0)}}, \quad (3.38)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Сначала рассмотрим случай  $I_0 < I_c$ , когда полином под квадратным корнем в правой части соотношения (3.38) имеет три действительных нуля  $\alpha_k = 1/(I_k - I_0)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Если при этом  $\delta > -2$ , то  $\alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_{2,3} \leq 0$  [см. рис. 1.3(a)], и (3.38) можно переписать в виде

$$\pm 2\sqrt{I_0}Z = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3)}} = \frac{F\left(\arcsin\left[\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{\alpha - \alpha_2}}\right]; m\right)}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}, \quad (3.39)$$

где  $F(\varphi; m)$  — неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $m = (\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_1 - \alpha_2)$ . Отметим, что  $0 \leq m \leq 1$ . Из граничного условия  $I(Z = 0) = I_0$  следует,

что  $\alpha(Z=0)=\infty$ , поэтому константа интегрирования  $C$  равна нулю. Из (3.39) следует решение  $I(Z)$  в явном виде:

$$\begin{aligned} I &= I_0 + \frac{1}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sn}^{-2}\left(Z\sqrt{I_0(\alpha_1 - \alpha_2)}; m\right)} = \\ &= I_0 + \frac{I_2 - I_0}{1 + \left(\frac{I_2 - I_1}{I_1 - I_0}\right) \operatorname{sn}^{-2}\left(Z\sqrt{\frac{I_0(I_1 - I_2)}{(I_1 - I_0)(I_0 - I_2)}}; m\right)}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где  $\operatorname{sn}(Z; m)$  — эллиптический синус. Решение (3.40) описывает стационарные периодические волны с пространственным периодом

$$\lambda = \frac{2K(m)}{\sqrt{I_0(\alpha_1 - \alpha_2)}} = 2K(m) \sqrt{\frac{(I_1 - I_0)(I_0 - I_2)}{I_0(I_1 - I_2)}}, \quad (3.41)$$

где  $K(m)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

Если  $\delta < -2$ , то  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ,  $\alpha_{1,2,3} \geq 0$  [см. рис. 3.4(б)]. Аналогично, для этого случая вместо (3.40) получим

$$I = I_0 + \frac{I_1 - I_0}{1 + \left(\frac{I_1 - I_3}{I_3 - I_0}\right) \operatorname{sn}^{-2}\left(Z\sqrt{\frac{I_0(I_1 - I_3)}{(I_3 - I_0)(I_1 - I_0)}}; m\right)}, \quad (3.42)$$

где  $m = (\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_3 - \alpha_1)$ . Пространственный период решения (3.42) составляет

$$\lambda = 2K(m) \sqrt{\frac{(I_3 - I_0)(I_1 - I_0)}{I_0(I_1 - I_3)}}. \quad (3.43)$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $I_0 > I_c$ . Полином под квадратным корнем в правой части уравнения (3.38) имеет один действительный корень  $\alpha_1$  и два комплексно-сопряжённых корня  $\alpha_{2,3} = \alpha_r \pm i\alpha_i$ . В этом случае интеграл в (3.38) также вычисляется аналитически через эллиптические функции Якоби

$$\pm 2\sqrt{I_0}Z = \frac{1}{\sqrt{q}} \left[ F\left(2 \arctan\left[\frac{\sqrt{\alpha - \alpha_1}}{\sqrt{q}}\right]; m\right) - K(m) \right], \quad (3.44)$$

где  $q = |\alpha_1 - \alpha_2|$ ,  $m = \frac{1}{2} [1 - (\alpha_1 + \alpha_r)/q]$ . Из (3.44) можно выразить решение  $I(Z)$

$$I = I_0 + \frac{1}{\alpha_1 + q \tan^2 \left[ \frac{1}{2} \operatorname{am} \left( 2\sqrt{qI_0}Z + 2K(m_3); m \right) \right]} =$$

$$= I_0 + \frac{1 + \operatorname{cn} \left( 2\sqrt{qI_0}Z + 2K(m); m \right)}{\alpha_1 + q + (\alpha_1 - q) \operatorname{cn} \left( 2\sqrt{qI_0}Z + 2K(m); m \right)},$$
(3.45)

которое также описывает стационарную периодическую волну с пространственным периодом

$$\lambda = \frac{2K(m)}{\sqrt{qI_0}}.$$
(3.46)

Точные решения, полученные для различных случаев в зависимости от  $I_0$  и  $\delta$ , систематизированы в Таблице 3.1.

Таблица 3.1. Периодические стационарные решения

	Случай	Решение	Пространственный период
A	$I_0 < I_c$ и $\delta > -2$	$I = I_0 + \frac{I_2 - I_0}{1 + \left( \frac{I_2 - I_1}{I_1 - I_0} \right) \operatorname{sn}^{-2} \left( Z \sqrt{\frac{I_0(I_1 - I_2)}{(I_1 - I_0)(I_0 - I_2)}}; m \right)},$ $m = \frac{(I_2 - I_3)(I_1 - I_0)}{(I_1 - I_2)(I_0 - I_3)}$	$\lambda = 2K(m) \sqrt{\frac{(I_1 - I_0)(I_0 - I_2)}{I_0(I_1 - I_2)}}$
B	$I_0 < I_c$ и $\delta < -2$	$I = I_0 + \frac{I_1 - I_0}{1 + \left( \frac{I_1 - I_3}{I_3 - I_0} \right) \operatorname{sn}^{-2} \left( Z \sqrt{\frac{I_0(I_1 - I_3)}{(I_3 - I_0)(I_1 - I_0)}}; m \right)},$ $m = \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_0)}{(I_2 - I_0)(I_1 - I_3)}$	$\lambda = 2K(m) \sqrt{\frac{(I_3 - I_0)(I_1 - I_0)}{I_0(I_1 - I_3)}}$
C	$I_0 > I_c$ и $\delta > -2$ или $\delta < -2$	$I = I_0 + \frac{1 + \operatorname{cn} \left( 2\sqrt{qI_0}Z + 2K(m); m \right)}{\alpha_1 + q + (\alpha_1 - q) \operatorname{cn} \left( 2\sqrt{qI_0}Z + 2K(m); m \right)},$ $q =  \alpha_1 - \alpha_2 , \quad m = \frac{1}{2} [1 - (\alpha_1 + \alpha_r)/q],$ $\alpha_j = \frac{1}{I_j - I_0}, \quad j = 1, 2, 3,$ $\alpha_r = \operatorname{Re}(\alpha_{2,3}), \quad \alpha_i =  \operatorname{Im}(\alpha_{2,3}) .$	$\lambda = \frac{2K(m)}{\sqrt{qI_0}}$

Отметим, что для периодических решений (3.40) и (3.45)  $I_0 \leq I \leq I_1$  (случаи *A* и *C* в Таблице 3.1, соответственно), в то время как для решения (3.42)  $I_0 \leq I \leq I_3$  (случай *B* в Таблице 3.1). Это соответствует профилям потенциальных ям, представленных на рис. 3.5(а) и рис. 3.5(б), соответственно.

### 3.4.2. Светлые солитоны

Рассмотрим решение уравнений (3.27) в виде солитона, что соответствует движению осциллятора по гомоклинической петле сепаратрисы [43,82]. Пусть  $\delta > -2$ , так что потенциальная яма имеет вид, изображённый на рис. 3.5(а). Сепаратриса на фазовой плоскости существует тогда, когда  $I_0 \rightarrow 0$ . Более того, это условие также подразумевает, что  $I_2 \rightarrow 0$  [см. рис. 3.5(а)]. Такие параметры соответствуют случаю *A* в Таблице 1. Следовательно,  $\alpha_2 \rightarrow -\infty$  и  $m \rightarrow 1$ . В этом пределе стационарное периодическое решение вырождается в неподвижный солитон огибающей

$$I = \frac{8 - 2\delta^2}{\delta + 2 \cosh \left[ (Z - Z_{\max}) \sqrt{4 - \delta^2} \right]}, \quad (3.47)$$

где  $Z_{\max}$  — положение максимума солитона.

Амплитуда солитона  $I_{\max} = I(Z_{\max})$  равна

$$I_{\max} = 4 - 2\delta. \quad (3.48)$$

Отметим, что решение (3.47) существует, когда параметр частотной отстройки удовлетворяет неравенству  $-2 < \delta < 2$ . При  $\delta \rightarrow 2$   $I_{\max}$  стремится к нулю. При  $\delta \rightarrow -2$   $I_{\max}$  достигает своего максимального значения  $I_{\max} \rightarrow 8$ . При  $\delta = 0$  решение (3.47) совпадает с солитонным решением, полученным ранее в [34-36].

Профили интенсивности поля солитонного решения при различных значениях  $\delta$  представлены на рис. 3.7. Поскольку солитоны соответствуют локальному максимуму интенсивности поля, то они называются светлыми солитонами [43,81].

Определим ширину солитона как  $D = 2Z_{1/2}$ , где при  $Z = Z_{\max} \pm Z_{1/2}$  интенсивность составляет половину от максимального значения, т.е.  $I(Z_{\max} \pm Z_{1/2}) = I_{\max}/2 = 2 - \delta$ . Учитывая (3.47), можно получить, что

$$D = \frac{2}{\sqrt{4 - \delta^2}} \operatorname{arccosh} \left( \frac{4 + \delta}{2} \right). \quad (3.49)$$

При  $\delta \rightarrow -2$ , т.е. когда пиковая амплитуда солитона достигает максимального значения,  $D \rightarrow 1$ . С увеличением  $\delta$  ширина солитона растёт и при  $\delta \rightarrow 2$  стремится к бесконечности.

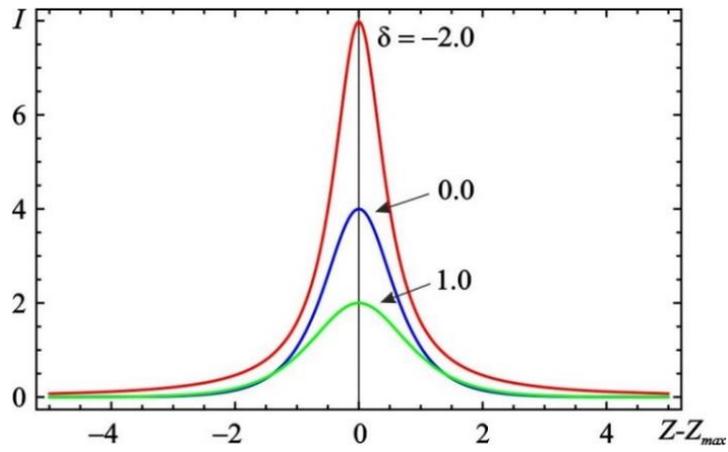


Рис. 3.7. Решения в виде светлого солитона (3.47) при различных значениях  $\delta$ .

### 3.4.3. Темные солитоны

Теперь рассмотрим случай, когда  $\delta < -2$ . В этой ситуации гомоклиническая траектория возникает при  $I_0 = I_c$  [см. рис. 3.5(б)], где  $I_c$  определяется формулой (3.36). Это условие соответствует слиянию двух корней  $I_2 = I_3$ , при этом

$$I_1 = \frac{(\delta^2 + 48)\sqrt{12 + \delta^2} - \delta^3}{27}, \quad (3.50)$$

$$I_{2,3} = \frac{(\delta^2 - 6)\sqrt{12 + \delta^2} - \delta^3}{27}. \quad (3.51)$$

В отличие от случая, когда  $\delta > -2$ , седло теперь расположено не в начале координат, а в точке  $(I_{2,3}, 0)$ , причем  $I_{2,3} > I_0 > 0$ . Сравнение гомоклинических траекторий в указанных ситуациях проиллюстрировано на рис. 3.8.

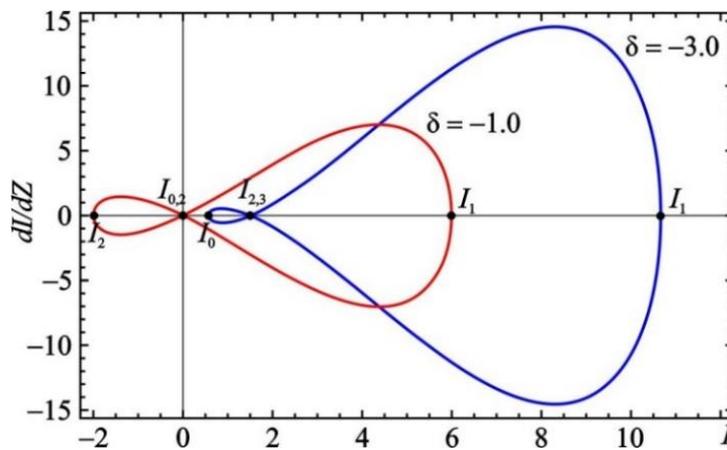


Рис. 3.8. Гомоклинические траектории на фазовой плоскости при  $\delta = -1.0$  и  $\delta = -3.0$ .

В соответствии с граничным условием  $I(0) = I_0$  следует рассматривать только ту гомоклиническую петлю, которая проходит через точку  $(I_0, 0)$ . Поскольку рассматривается ситуация, когда сливаются корни  $I_{2,3}$ , в соответствии со случаем  $B$  из таблицы 1,  $m \rightarrow 1$  и, учитывая (3.50), (3.51), можно получить решение

$$I(Z) = \frac{(12 + \delta^2)^{3/2} - \delta(\delta^2 - 36)}{27} + \frac{4(12 - \delta^2 + \delta\sqrt{12 + \delta^2})}{6\delta + 3\sqrt{12 + \delta^2} - 9\sqrt{12 + \delta^2} \tanh^{-2} \left[ Z \sqrt{-\delta(\delta + 2\sqrt{12 + \delta^2})} / (12 - 1) \right]}. \quad (3.52)$$

Профили интенсивности поля  $I(Z)$ , задаваемые формулой (3.52), представлены на рис. 3.9 для различных значений  $\delta$ . Поскольку решение соответствует локальному минимуму интенсивности поля относительно однородного постоянного фона, то такие солитоны называются тёмными солитонами [43,80,81].

Значение минимума поля тёмного солитона совпадает с  $I_c$  и определяется выражением (3.36), которое можно представить в виде

$$I_{\min} = \frac{(12 + \delta^2)^{3/2} + \delta(36 - \delta^2)}{27}. \quad (3.53)$$

Поскольку гомоклиническая петля сепаратрисы возникает при  $I_0 = I_c$ , это также значит, что  $I_{\min} = I_0$  (см. рис. 3.8). Поскольку минимум интенсивности поля отличен от нуля, такие солитоны в литературе также называют «серыми солитонами» [80].

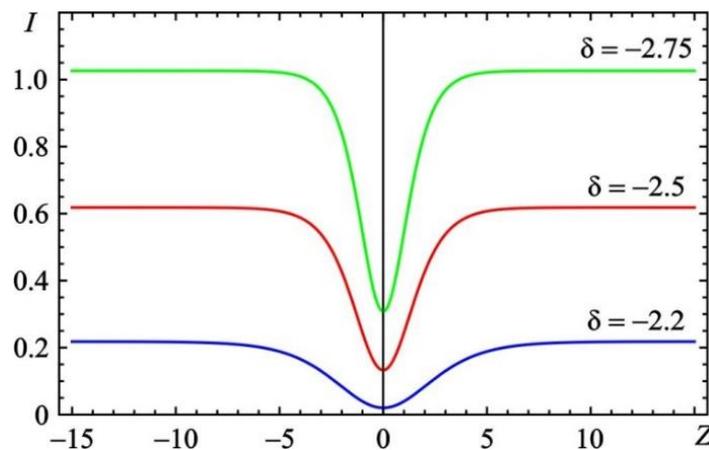


Рис. 3.9. Решения в виде тёмного солитона (3.52) при различных значениях  $\delta$ .

При  $Z \rightarrow \pm\infty$  интенсивность поля стремится к постоянному значению  $I_{\max} = I_{2,3}$ , которое определяется формулой (3.51) (см. рис. 3.8).

Отметим, что случай  $\delta < -2$  соответствует нижней ветви дисперсионной характеристики (см. рис. 3.3), где не выполняется критерий Лайтхилла (3.23). Действительно, как известно, в отличие от светлых солитонов тёмные солитоны существуют, когда МН отсутствует [42,43,80].

#### 3.4.4. Решения в виде бегущих волн

Стационарные решения (3.26), которые рассматривались в разделах 3.4.1-3.4.3, являются неподвижными. Однако их можно легко обобщить на случай стационарных бегущих волн. Вместо (3.26) решения будем искать в виде

$$\begin{aligned} a(Z, \tau) &= a(\zeta) e^{i\delta\tau}, \\ p(Z, \tau) &= p(\zeta) e^{i\delta\tau}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где  $\zeta = Z - U\tau$  и  $U$  — постоянная скорость распространения волны. Подстановка (3.54) в исходные уравнения (3.3), (3.4) приводит к системе ОДУ, которая также имеет два интеграла движения. Вместо (3.30) в данном случае имеем интеграл движения

$$s^2 |a|^2 - |p|^2 = \text{const}, \quad (3.55)$$

где  $s = \sqrt{U+1}$ . Предположим, что  $p(\zeta_0) = 0$  и  $|a(\zeta_0)|^2 = I_0$  в некоторой точке пространства  $\zeta = \zeta_0$ . Тогда из (3.55) следует, что

$$|p|^2 = s^2 (I - I_0). \quad (3.56)$$

Второй интеграл движения аналогичен (3.33):

$$\sin \chi = \frac{2\delta_s (I - I_0) + s^3 (I - I_0)^2}{4\sqrt{I(I - I_0)}}, \quad (3.57)$$

где  $\delta_s \equiv \delta/s$ . Учитывая соотношения (3.56) и (3.57), из исходных уравнений (3.3), (3.4) после подстановки (3.54) можно получить ОДУ первого порядка, которое совпадает с (3.34) при  $s = 1$ :

$$\frac{dI}{dZ} = \pm \frac{1}{2s} \sqrt{I - I_0} \sqrt{16I - (I - I_0)(2\delta_s + s^3(I - I_0))^2}. \quad (3.58)$$

Решения уравнения (3.58) можно выразить через эллиптические функции Якоби аналогично тому, как это было сделано выше для уравнения (3.34). В частности, при  $\delta > -2s$ , полагая  $I_0 \rightarrow 0$ , можно получить решения в виде бегущего светлого солитона

$$I = \frac{8 - 2\delta_s^2}{s^3 \delta_s + 2s^3 \cosh \left[ s^{-1} (\zeta - \zeta_{\max}) \sqrt{4 - \delta_s^2} \right]}, \quad (3.59)$$

где  $\zeta_{\max}$  обозначает положение максимума солитона. Это обобщение решения (3.47), которое существует, когда параметр частотной расстройки лежит в диапазоне  $-2s < \delta < 2s$ . Амплитуда солитона определяется как  $I_{\max} = (4 - 2\delta_s) / s^3$ . Отметим, что при  $\delta = 0$  (3.59) совпадает с решениями в виде бегущих светлых солитонов, которые были получены в [34-36]. В работе [85] рассматривались бегущие солитоны для случая попутного взаимодействия электронов и волны, и найденные решения совпадают с (3.59), если  $U$  заменить на  $-U$ .

Также отметим, что решение в виде бегущего солитона (3.59) существует при условии  $s > 0$ , т.е. если  $U > -1$ . Таким образом, светлые солитоны могут двигаться как в положительном направлении ( $U > 0$ ), так и в отрицательном ( $-1 < U < 0$ ). Условие  $U > -1$  означает, что солитоны движутся медленнее, чем линейные волны, фазовая скорость которых равна  $v_{ph} = \omega/k = -1 - k^{-2}$ .

Аналогично при  $\delta < -2s$  можно найти решение в виде бегущего тёмного солитона

$$I(\zeta) = \frac{(12 + \delta_s^2)^{3/2} - \delta_s (\delta_s^2 - 36)}{27s^3} + \frac{4}{3s^3} \cdot \frac{12 - \delta_s^2 + \delta_s \sqrt{12 + \delta_s^2}}{2\delta_s + \sqrt{12 + \delta_s^2} \left\{ 1 - 3 \tanh^{-2} \left[ \zeta \sqrt{-\frac{\delta_s}{12} (\delta_s + 2\sqrt{12 + \delta_s^2}) - 1} \right] \right\}}. \quad (3.60)$$

### 3.5. Анализ характера модуляционной неустойчивости

Если среда с конечной протяжённостью возбуждается одночастотным сигналом постоянной амплитуды на одной из границ, как в рассматриваемой модели [см. граничное условие (3.13)], то динамика системы определяется не только наличием МН, но и принципиальным образом зависит от её характера (конвективная или абсолютная) [43,44,86,87]. В работах [45,46] исследовались различия между конвективной и абсолютной МН на примере относительно простых модельных систем, которые описываются НУШ или нелинейным уравнением Клейна–Гордона. Если неустойчивость конвективная, то с течением времени нарастающие возмущения в виде медленных пространственно-временных модуляций несущей волны сносятся вдоль системы и покидают её, т.е. после окончания переходного процесса устанавливается стационарное одночастотное прохождение сигнала. Если неустойчивость абсолютная, то эти неустойчивые возмущения непрерывно генерируются по всей длине системы, т.е. устанавливается нестационарный режим многочастотных колебаний. В работах [45,46] было показано, что в окрестности критической частоты с увеличением

амплитуды падающей волны характер МН меняется с конвективного на абсолютный. Поскольку в рассматриваемой в данной главе системе имеется полоса непропускания (см. раздел 3.3), следует ожидать, что для нее также будет иметь место аналогичный эффект.

### 3.5.1. Нелинейное уравнение Шредингера

Оценить значение амплитуды волны, при которой происходит смена характера МН, можно на основе критериев, полученных для модельных систем. В частности, в работах [45,46] такой критерий был получен для МН, возникающей при распространении квазигармонической волны в кубично-нелинейной среде, которая описывается НУШ. С помощью НУШ можно приближенно описывать динамику рассматриваемой системы вблизи верхней частоты отсечки, где дисперсионная характеристика аппроксимируется параболой.

Получим НУШ для рассматриваемой модели, используя метод многих масштабов [43]. Будем искать решения уравнений (3.3), (3.4) в виде рядов

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 a_3 + \dots, \\ p &= \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots, \end{aligned} \quad (3.61)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $a_i$  и  $p_i$  — функции пространственных и временных масштабов  $Z_n = \varepsilon^n z$  и  $T_n = \varepsilon^n t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . После подстановки (3.61) в (3.3), (3.4) выделим члены одинаковых порядков малости по  $\varepsilon$ .

Члены порядка  $\varepsilon$  дают линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial T_0} - \frac{\partial a_1}{\partial Z_0} &= -p_1, \\ \frac{\partial p_1}{\partial Z_0} &= a_1, \end{aligned} \quad (3.62)$$

которую можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} La_1 &= 0, \\ p_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial Z_0} - \frac{\partial a_1}{\partial T_0}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Здесь введён линейный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial Z_0} \left( \frac{\partial}{\partial Z_0} - \frac{\partial}{\partial T_0} \right) - 1. \quad (3.64)$$

Решение уравнений (3.63) следует выбирать в виде квазигармонических волн, амплитуда которых зависит от медленных переменных,

$$\begin{aligned} a_1 &= A_0 e^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ p_1 &= -i(\omega + k) A_0 e^{i\theta} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где  $A_0 = A_0(Z_1, Z_2, \dots; T_1, T_2, \dots)$ ,  $\theta = \omega T_0 - kZ_0$ , а  $k$  и  $\omega$  связаны линейным дисперсионным соотношением [ср. с (3.17)]

$$(\omega + k)k = -1. \quad (3.66)$$

Члены порядка  $\varepsilon^2$  после преобразований приводят к уравнениям

$$La_2 = -\frac{\partial p_1}{\partial Z_1} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial Z_0 \partial Z_1} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial Z_0 \partial T_1}, \quad (3.67)$$

$$p_2 = \frac{\partial a_1}{\partial Z_0} - \frac{\partial a_1}{\partial T_0} + \frac{\partial a_2}{\partial Z_0} - \frac{\partial a_2}{\partial T_0}. \quad (3.68)$$

После подстановки выражений (3.65) в (3.67), потребуем уничтожения секулярных членов, пропорциональных  $\exp(i\theta)$ , в правой части равенства. Получим уравнение относительно переменной  $A_0$ :

$$\frac{\partial A_0}{\partial T_1} + v_g^0 \frac{\partial A_0}{\partial Z_1} = 0, \quad (3.69)$$

где  $v_g^0 = -1 + 1/k^2$  — линейная групповая скорость. При этом уравнение (3.67) примет вид  $La_2 = 0$ , и можно положить  $a_2 = 0$ . В соответствии с (3.68) получим

$$p_2 = \left( \frac{\partial A_0}{\partial Z_1} - \frac{\partial A_0}{\partial T_1} \right) e^{i\theta}. \quad (3.70)$$

При аналогичном рассмотрении членов порядка  $\varepsilon^3$  требование устранения секулярных членов приведет к уравнению

$$i \left( \frac{\partial A_0}{\partial T_2} + v_g^0 \frac{\partial A_0}{\partial Z_2} \right) = \frac{\chi^0}{2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial Z_1^2} + \beta^0 |A_0|^2 A_0, \quad (3.71)$$

где  $\chi^0 = -2/k^3$  и  $\beta^0 = -1/k^4$  — линейные параметры дисперсии и нелинейности, которые совпадают с (3.24) и (3.25), соответственно, в пределе  $|P_0|^2 \rightarrow 0$ . В системе отсчета, движущейся с линейной групповой скоростью  $v_g^0$ , из (3.71) следует НУШ:

$$i \frac{\partial A_0}{\partial T_2} = \frac{\chi^0}{2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial Z_1^2} + \beta^0 |A_0|^2 A_0. \quad (3.72)$$

Как было показано в разделе 3.3, на верхней ветви дисперсионной характеристики (см. рис. 3.3) имеет место МН. В соответствии с критерием, полученным для НУШ в работах [45,46], абсолютная МН имеет место при амплитудах волн, удовлетворяющих условию

$$|A_0|^2 > -\frac{(v_g^0)^2}{8\chi^0\beta^0}. \quad (3.73)$$

Для рассматриваемой системы критерий (3.73) принимает вид

$$|A_0|^2 > -\frac{1}{16}(-1+k^{-2})^2 k^7. \quad (3.74)$$

В совокупности с дисперсионным соотношением (3.17) и выражением (3.18) неравенство (3.74) параметрически определяет границу смены характера МН на плоскости параметров  $(\omega, A_0)$ . Данная граница изображена штрих-пунктирной линией на рис. 3.13, где представлено разбиение плоскости  $(\omega, A_0)$  на области различных режимов. Отметим, что полученное соотношение (3.74) является приближенным и справедливо только в некоторой окрестности верхней частоты отсечки, где систему можно описывать с помощью НУШ.

### 3.5.2. Анализ асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала

Чтобы получить более точный критерий, позволяющий определить характер МН, будем исследовать асимптотическую форму малых возмущений монохроматического решения на бесконечно больших временах. В соответствии с определением, если возмущение неограниченно нарастает в любой точке пространства, то неустойчивость является абсолютной [43,44,86,87].

Зададим малые возмущения монохроматического решения (3.15):

$$\begin{aligned} a &= (A_0 + \tilde{a}(Z, \tau)) \exp[i(\omega\tau - kZ)], \\ p &= (P_0 + \tilde{p}(Z, \tau)) \exp[i(\omega\tau - kZ)], \end{aligned} \quad (3.75)$$

где  $|\tilde{a}(Z, \tau)| \ll |A_0|$ ,  $|\tilde{p}(Z, \tau)| \ll |P_0|$ , а  $\omega$  и  $k$  связаны нелинейным дисперсионным соотношением (3.17). Следуя [43-46], будем искать решение в виде пары сателлитов, равноотстоящих от несущей частоты

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a_+ e^{i(\Omega\tau - KZ)} + a_- e^{-i(\Omega\tau - KZ)}, \\ \tilde{p} &= p_+ e^{i(\Omega\tau - KZ)} + p_- e^{-i(\Omega\tau - KZ)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

После подстановки (3.75) и (3.76) в исходные уравнения (3.3), (3.4) и линеаризации системы получим дисперсионное соотношение для частоты  $\Omega$  и волнового числа  $K$  малого возмущения, корни которого можно записать в явном виде

$$\Omega(K) = -K + \frac{K(\omega+k)^2}{1+(\omega+k)^2(K_0^2 - K^2)} \pm \frac{K(\omega+k)^2 \sqrt{(\omega+k)^2(K^2 - K_0^2)}}{1+(\omega+k)^2(K_0^2 - K^2)}, \quad (3.77)$$

где введено обозначение  $K_0^2 = 2|P_0|^2/(\omega+k)$ . Напомним, что рассматривается верхняя ветвь дисперсионной характеристики (см. рис. 3.3), где имеет место МН. При этом  $\omega+k > 0$  и  $K_0^2 > 0$ .

Будем считать волновое число малого возмущения  $K$  вещественным. Тогда в соответствии с (3.77) корни  $\Omega(K)$  являются комплексными в области волновых чисел  $K^2 < K_0^2$ . Для инкремента неустойчивости  $\lambda = -\text{Im}[\Omega(K)]$  получим следующее выражение:

$$\lambda(K) = |K| \frac{(\omega + k)^3 \sqrt{K_0^2 - K^2}}{1 + (\omega + k)^2 (K_0^2 - K^2)}. \quad (3.78)$$

Из соотношения (3.78) следует, что на верхней ветви дисперсионной характеристики действительно имеет место МН, что соответствует выводам, основанным на критерии Лайтхилла (см. раздел 3.3). На рис. 3.10 приведена зависимость инкремента неустойчивости от  $K$  и  $|P_0|$ . Видно, что с ростом амплитуды волны область волновых чисел, в которой имеет место МН, расширяется.

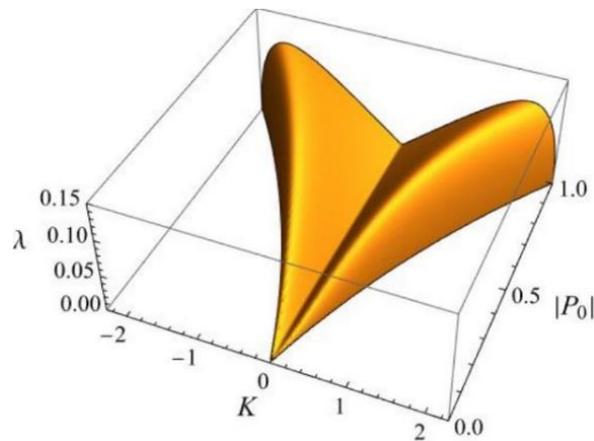


Рис. 3.10. Инкремент  $\lambda(K)$  при  $\omega = 2$  и различных  $|P_0|$ .

Для оценки асимптотической формы возмущения (см. [43,44,86,87]) будем считать  $\Omega$  и  $K$  комплексными и представим общее решение для малого возмущения поля в виде интеграла Фурье

$$\tilde{a}(Z, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_K \exp[i(\Omega(K)\tau - KZ)] dK. \quad (3.79)$$

Асимптотическая форма интеграла (3.79) при условии  $\tau \rightarrow \infty$  оценивается методом перевала. При этом

$$\tilde{a}(Z, \tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp[-\text{Im}(\Omega(K_s))\tau], \quad (3.80)$$

где  $K_s$  — точка перевала или седловая точка, которая находится из условия  $d\Omega(K_s)/dK - Z/\tau = 0$  [43-46].

Неустойчивость является абсолютной, если в любой фиксированной точке  $Z$  при  $\tau \rightarrow \infty$  возмущение неограниченно нарастает во времени. В соответствии с оценкой (3.80) это условие соответствует неравенству

$$\text{Im}[\Omega(K_s)] < 0. \quad (3.81)$$

Точка перевала в пределе  $Z/\tau \rightarrow 0$  определяется из условия нулевой комплексной групповой скорости

$$\frac{d\Omega}{dK} = 0. \quad (3.82)$$

При этом контур интегрирования в (3.79) деформируется таким образом, чтобы проходить через точку перевала по линии наискорейшего спуска.

Уравнение (3.82) решается численно совместно с дисперсионным соотношением для малого возмущения (3.77). Всего существует 6 точек перевала  $K_s^i$ , которым соответствуют корни  $\Omega_i(K_s)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Занумеруем их как показано на рис. 3.11, где приведен пример зависимостей  $\text{Re}\Omega_i$  и  $\text{Im}\Omega_i$  от несущей частоты  $\omega$  при некотором фиксированном значении  $|P_0|$ . Корни обладают симметрией  $\Omega_{1,2,3} = -\Omega_{6,5,4}$ , что, очевидно, обусловлено выбором возмущения в виде пары симметричных спутников [см.(3.76)].

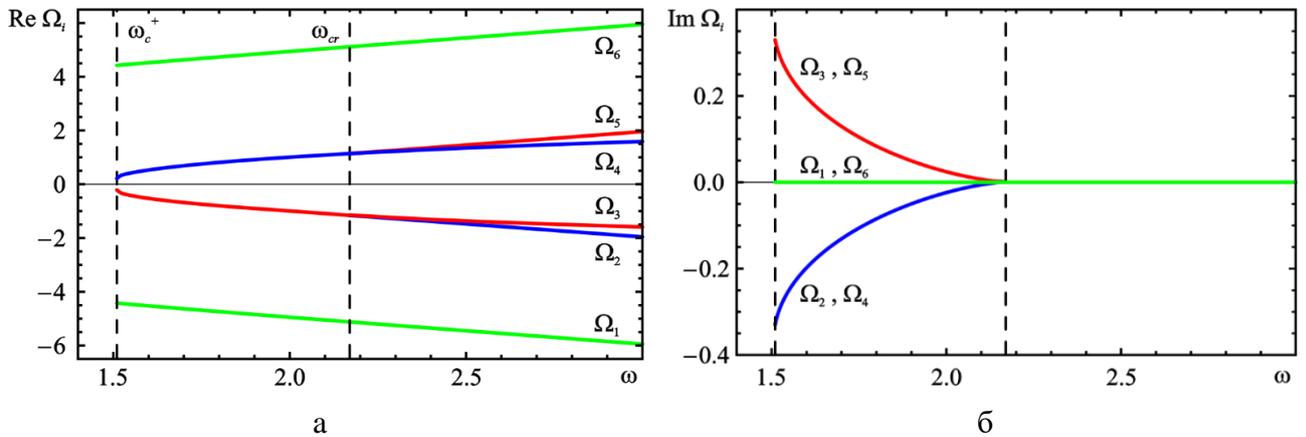


Рис. 3.11. Зависимости вещественных (а) и мнимых (б) частей корней характеристического уравнения  $\Omega_i$  от несущей частоты  $\omega$  при  $|P_0| = 0.7$ .

Критическое значение  $\omega_{cr} = 2.18$  соответствует смене характера МН.

При любой фиксированной амплитуде  $|P_0|$  существует некоторое критическое значение несущей частоты  $\omega = \omega_{cr}$ , такое, что при  $\omega > \omega_{cr}$  все точки перевала  $K_s$  лежат на вещественной оси. Соответствующие корни дисперсионного соотношения (3.77) при этом также являются

вещественными, т.е.  $\text{Im}[\Omega(K_s)] = 0$ . Это означает, что при  $\omega > \omega_{cr}$  условие (3.81) не выполняется, следовательно, МН является конвективной.

Когда частота  $\omega$  становится ниже критического значения, в  $K$ -плоскости появляются две пары седловых точек с ненулевой мнимой частью. Соответствующие им корни  $\Omega_i$  становятся комплексно сопряженными:  $\Omega_2 = \Omega_3^*$ ,  $\Omega_4 = \Omega_5^*$  (см. рис. 3.11). Корни  $\Omega_1, \Omega_6$  остаются действительными. Очевидно, что в каждой паре комплексно-сопряженных корней для одного из них выполняется условие (3.81), следовательно МН является абсолютной.

Рис. 3.12 иллюстрирует изменение положения корней в комплексной плоскости при изменении  $\omega$ . С уменьшением  $\omega$  вещественные части комплексных корней уменьшаются по абсолютному значению, а мнимые, наоборот, возрастают. Когда несущая частота становится меньше частоты отсечки  $\omega_c^+$ , продолжать анализ МН, очевидно, не имеет смысла.

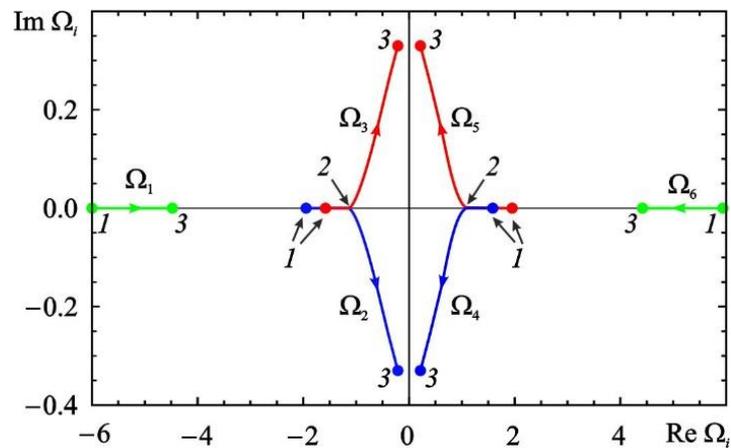


Рис. 3.12. Изменение положения корней  $\Omega_i$  в комплексной плоскости при уменьшении частоты от значения  $\omega = 3.00$  (точки 1) до частоты отсечки  $\omega_c^+ = 1.51$  (точки 3) при  $|P_0| = 0.7$ . Критическое значение  $\omega_{cr} = 2.18$  (точки 2) соответствует смене характера МН.

Для построения аналитической границы смены характера МН рассчитывались критические значения  $\omega_{cr}$  при различных амплитудах  $|P_0|$  и далее с помощью соотношений (3.17) и (3.18) находилась соответствующая зависимость  $\omega_{cr}(|A_0|)$ . На рис. 3.13 представлено разбиение плоскости параметров  $(\omega, A_0)$  на области различных режимов, где найденная зависимость нанесена штриховой линией.

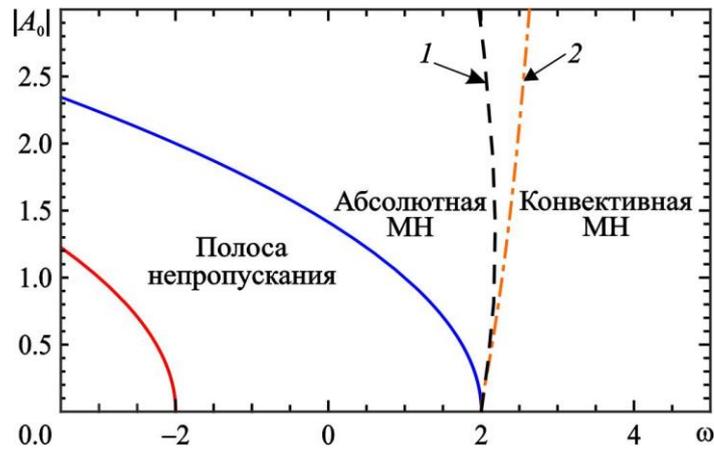


Рис. 3.13. Границы различных режимов на плоскости параметров  $(\omega, A_0)$ . Сплошные линии – теоретические границы полосы непропускания (3.22). Штриховая линия 1 – граница смены характера МН, полученная строго на основе анализа возмущений. Штрих-пунктирная линия 2 – граница смены характера МН (3.74), полученная на основе НУШ.

Отметим, что при малых амплитудах сигнала граница смены характера МН, полученная на основе строгого анализа асимптотической формы неустойчивых возмущений, действительно совпадает с приближенным соотношением (3.74), найденным в разделе 3.5.3 с помощью НУШ.

### 3.6. Результаты численного интегрирования усредненных уравнений

В данном разделе представлены результаты численного интегрирования уравнений (3.3), (3.4). На правую границу системы подаётся непрерывный гармонический сигнал (3.13). В работах [35,36] исследовались режимы распространения сигнала в случае нулевой частотной расстройки  $\delta_0 = 0$ , т.е. когда в точности выполняется условие циклотронного резонанса (3.1). Здесь мы рассматриваем более общий случай произвольной частотной отстройки и сопоставляем результаты с теоретическим анализом, представленным в разделах 3.3-3.5.

Уравнения (3.3), (3.4) с граничными условиями (3.11), (3.13), интегрировались численно при помощи конечно-разностной схемы второго порядка точности по обеим независимым переменным. Уравнение движения электронов (3.4) интегрировалось вдоль  $Z$  как ОДУ с помощью хорошо известного метода предиктор-корректор [61]. Уравнение (3.3) в частных производных решалось с использованием явной одношаговой схемы Лакса-Вендроффа [61]. Численная схема устойчива, если  $d\tau = dZ/2$ , где  $dZ$  и  $d\tau$  — шаги по переменным  $Z$  и  $\tau$ , соответственно. Точность метода –  $O(dZ^2, d\tau^2)$ . Представленные ниже

результаты получены при  $dZ = 0.01$  и  $d\tau = 0.005$ . Такие шаги сетки обеспечивают достаточную точность при сохранении высокой скорости вычислений.

На Рис. 3.14 представлено разбиение плоскости параметров амплитуда  $a_0$  – частотная расстройка  $\delta_0$  входного сигнала на области различных режимов распространения волны. Область 1 соответствует режиму непропускания, когда падающая гармоническая волна затухает. Границы полосы непропускания, полученные в численном эксперименте, показаны синими и красными кружками. При  $a_0 \rightarrow 0$  эти границы стремятся к  $\delta_0 = \pm 2$ , что соответствует частотам отсечки в линейном пределе [см. (3.22)]. С увеличением интенсивности входного сигнала полоса непропускания сдвигается в область более низких частот, что соответствует выводам, полученным при исследовании нелинейного дисперсионного соотношения (см. раздел 3.3).

Однако численные границы полосы непропускания лежат выше, чем теоретические частоты отсечки (3.22), которые изображены пунктирными линиями.<sup>1</sup> Это связано с тем, что соотношение (3.22) справедливо для случая безграничной среды, в то время как численное моделирование проводится для принципиально ограниченной системы с граничными условиями (3.11), (3.13). Отметим, что верхняя граница полосы непропускания в точности совпадает с зависимостью (3.48) амплитуды светлого неподвижного солитона от  $\delta$ , если положить  $\delta \equiv \delta_0$ . Нижняя же граница в точности соответствует уравнению (3.51) для величины «хвостов» тёмного неподвижного солитона. Эти границы не зависят от длины системы  $L$  за исключением случая очень коротких длин ( $L < 3$ ). Когда  $L$  меньше, чем характерная ширина генерируемых солитонов, нестационарные режимы не наблюдаются.

Выше полосы непропускания (область 2 на рис. 3.14) имеет место МН, и возникает автомодуляция входного сигнала. Ниже полосы непропускания, в области 4 на рис. 3.14, МН отсутствует, поскольку эта область соответствует нижней ветви дисперсионной характеристики (см. рис. 3.3). При этом наблюдаются устойчивые стационарные режимы распространения волны.

Рассмотрим подробнее поведение системы вблизи каждой из границ.

### 3.6.1. Верхняя граница полосы непропускания

Выберем значение амплитуды входного сигнала  $a_0 = 1.0$ , длину системы  $L = 13$  и будем наблюдать за сменой динамических режимов, постепенно увеличивая частоту.

---

<sup>1</sup> В обозначениях данного раздела параметры  $\delta_0$  и  $a_0$  имеют тот же смысл, что и, соответственно,  $\omega$  и  $A_0$  в разделах 3.3-3.5.

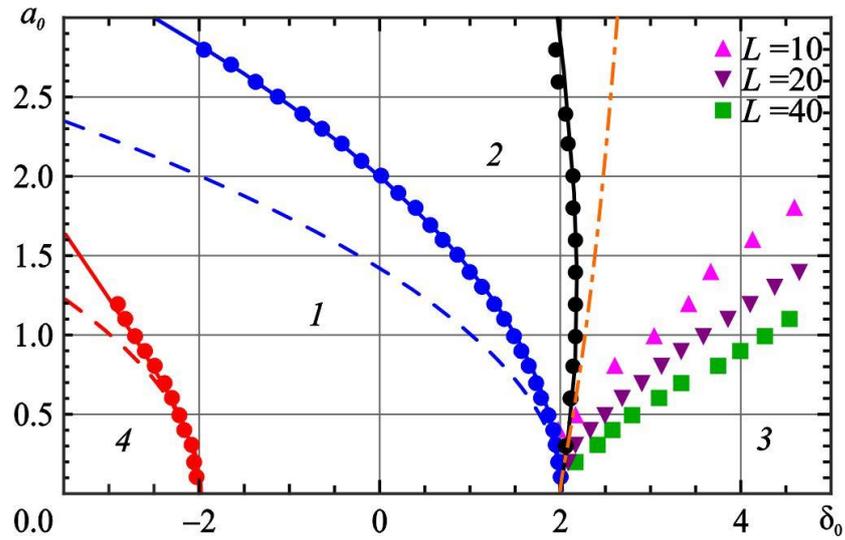


Рис. 3.14. Области циклотронного поглощения (1), автомодуляции (2) (включая генерацию последовательности солитонов) и стационарного прохождения волны (3,4) на плоскости параметров входного сигнала  $(\delta, a_0)$ . Результаты численного интегрирования уравнений представлены кружками. Границы полосы непропускания (красные и синие точки) не зависят от длины системы  $L$ . Границы между областями 2 и 3 для несогласованной системы с отражениями (треугольники и квадраты) представлены при различных  $L$ . Чёрными кружками изображена граница между областями 2 и 3, полученная для согласованной модели. Частоты отсечки в случае безграничной среды (3.22) изображены пунктирными линиями. Синяя сплошная линия соответствует амплитуде светлого неподвижного солитона (3.48), а красная сплошная линия — величине «хвостов» тёмного неподвижного солитона (3.51). Приближенная граница смены характера МН (3.74), полученная на основе НУШ в разделе 3.5.2, изображена оранжевой штрих-пунктирной линией. Чёрная сплошная линия – граница смены характера МН, полученная строго на основе анализа возмущений в разделе 3.5.3.

Когда частота лежит в полосе непропускания (область 1 на рис. 3.14), сигнал затухает вдоль системы (рис. 3.17). Заметим, что в этом стационарном режиме распределения  $|a(Z)|$  и  $|p(Z)|$  совпадают, что согласуется с законом сохранения (3.31). Поскольку волна поглощается, то  $I_0 \approx 0$  и  $|a| \approx |p|$ . Стационарное распределение поля в этом случае хорошо аппроксимируется решением (3.47) для светлого неподвижного солитона (см. рис. 3.15), максимум которого расположен за правой границей системы, т.е.  $Z_{\max} > L$ . Амплитуда солитона, определяемая выражением (3.48), превосходит амплитуду входного сигнала, т.е.

$I_{\max} > a_0^2 = 1$ . На рис. 3.15 максимумы солитона расположены при  $Z_{\max} \approx 14.1$ , если  $\delta_0 = -1.00$ , при  $Z_{\max} \approx 13.7$ , если  $\delta_0 = 1.30$ , и при  $Z_{\max} \approx 13.2$ , если  $\delta_0 = 1.47$ . Верхняя граница области поглощения соответствует  $\delta_0 \approx 1.48$ . На верхней границе  $I_{\max} = a_0^2$  и  $Z_{\max} = L$ , т.е. стационарный профиль поля в точности соответствует половине светлого солитона. Таким образом, на плоскости параметров  $(\delta_0, a_0)$  верхняя граница области поглощения хорошо аппроксимируется выражением (3.48). Когда амплитуда входного сигнала  $a_0$  превосходит амплитуду светлого неподвижного солитона, вдоль системы начинают распространяться светлые бегущие солитоны. Заметим, что аналогичная динамика наблюдается в нелинейных брэгговских решетках [48,88,89].

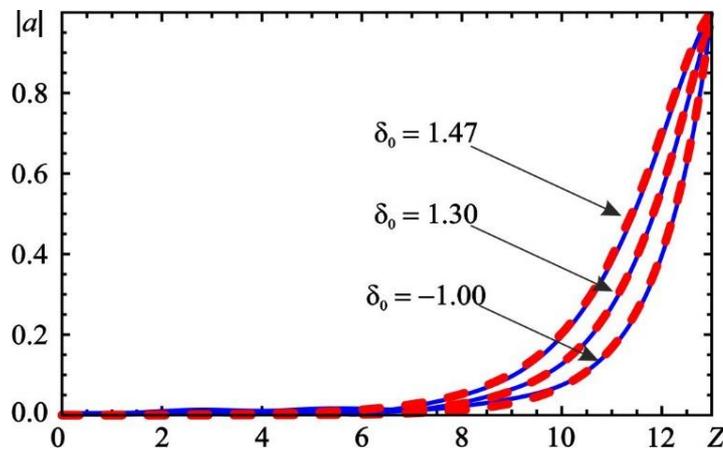


Рис. 3.15. Распределение амплитуды поля вдоль системы в полосе непропускания при различных значениях  $\delta_0$  при  $a_0 = 1.0$ ,  $L = 13$ . Численные результаты и аналитические решения в форме светлого неподвижного солитона (3.47) представлены сплошными и пунктирными линиями соответственно.

Когда частота входного сигнала  $\delta_0$  достигает верхней границы полосы непропускания, циклотронное поглощение сменяется самоиндуцированной прозрачностью, и в системе становится возможным незатухающее распространение волн. Как было показано в разделе 3.3, при этом имеет место МН. В результате развития МН, непрерывный входной сигнал распадается на близкую к периодической последовательность бегущих солитонов. Этот режим представлен на рис. 3.16. На рис. 3.16(а) изображено пространственно-временное распределение амплитуды поля, где градиентом цвета показаны абсолютные значения амплитуды поля. На рис. 3.16(б) представлен профиль выходного сигнала  $a_{out} = |a(Z=0)|$ .

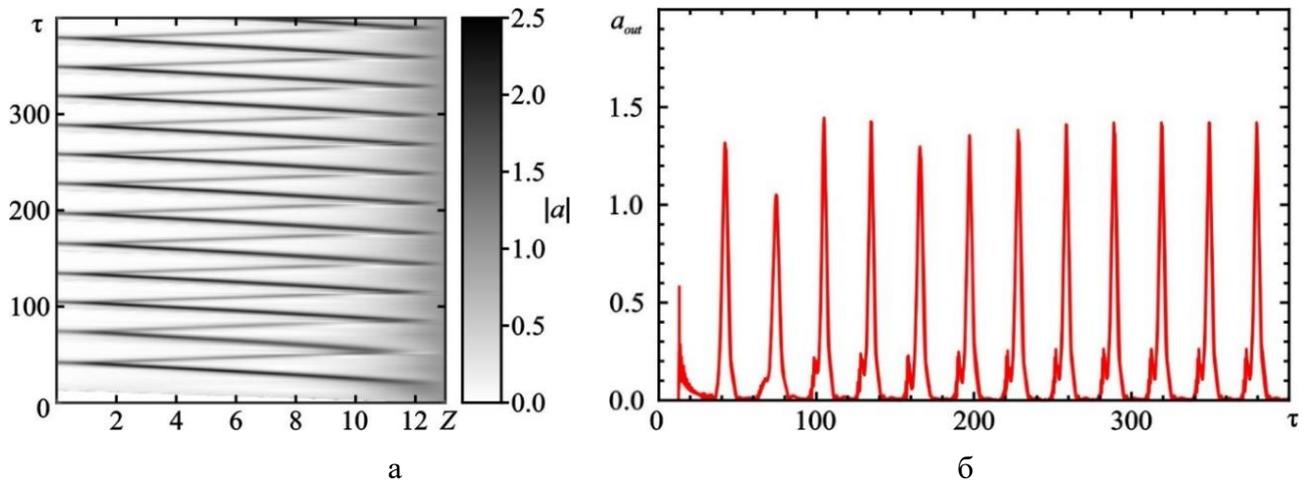


Рис. 3.16. Генерация близкой к периодической последовательности солитонов самоиндуцированной прозрачности на верхней границе полосы непропускания при  $\delta_0 = 1.48$ . (а) Пространственно-временное распределение амплитуды поля. (б) Осциллограмма выходного сигнала. Остальные параметры те же, что и на рис. 3.15.

Как видно из рис. 3.16(а), солитоны формируются вблизи правой границы системы и распространяются в обратном направлении навстречу электронам. Дойдя до левой границы системы, они частично отражаются, и в обратном направлении начинают движение отраженные солитоны, интенсивность которых существенно меньше. Последнее согласуется с аналитическим решением (3.59). На Рис. 3.17 показана осциллограмма сигнала  $|a(\tau)|$  в фиксированной точке  $Z = 4.0$ . Она демонстрирует периодическое распространение бегущих солитонов в обоих направлениях.

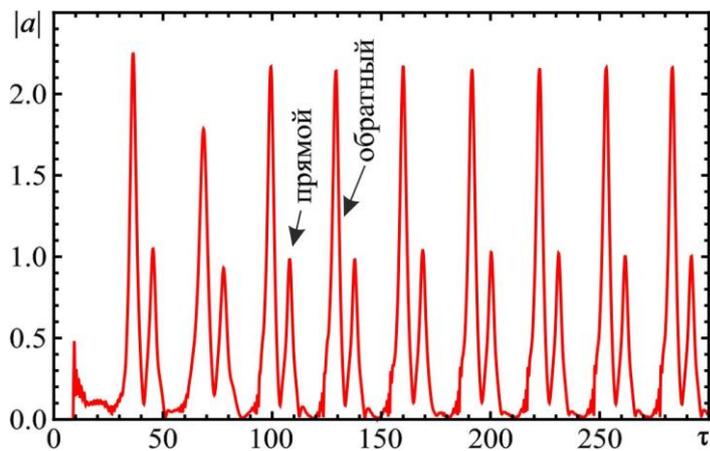


Рис. 3.17. Осциллограмма сигнала  $|a(\tau)|$  при  $Z = 4.0$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 3.15.

При удалении параметров входного сигнала от порогового значения, т.е. при увеличении  $\delta_0$  или  $a_0$ , амплитуда, скорость и частота следования бегущих солитонов растут. Но в то же время динамика усложняется, и возникают режимы хаотической автомодуляции. Для примера на рис. 3.18 представлена генерация нерегулярной последовательности солитонов. Такие режимы также отмечались в работах [35,36] для случая  $\delta_0 = 0$ .

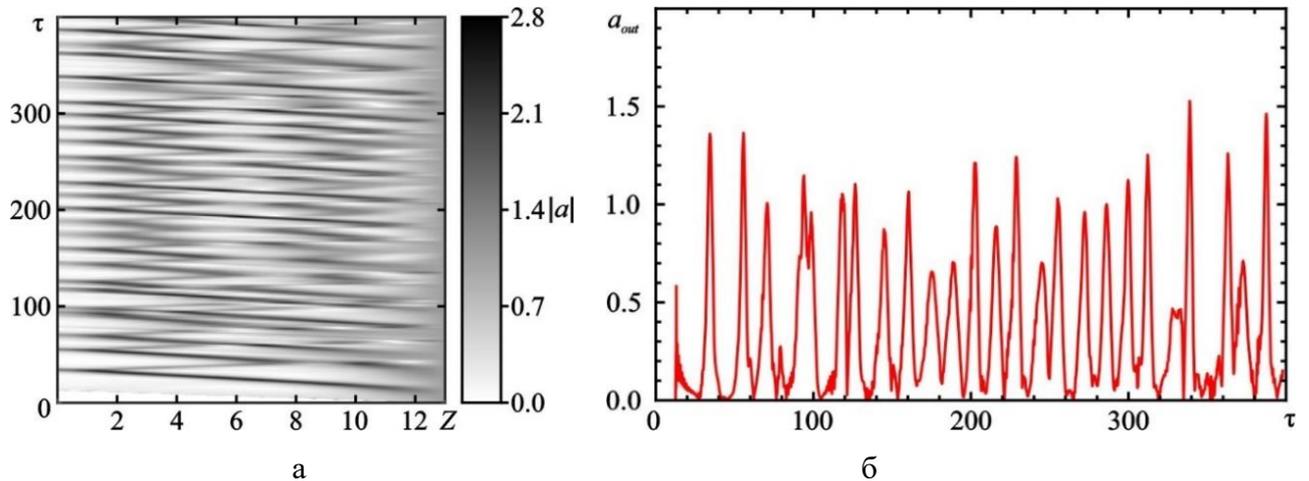


Рис. 3.18. Генерация нерегулярной последовательности солитонов самоиндуцированной прозрачности,  $\delta = 1.53$ . (а) Пространственно-временное распределение амплитуды поля. (б) Осциллограмма выходного сигнала. Остальные параметры те же, что и на рис. 3.15.

При  $\delta_0 > 2$  решение в виде солитонов, распространяющихся в обратном направлении, не существует. В этой области всё ещё наблюдаются режимы нестационарной автомодуляции, однако они уже не связаны с генерацией солитонов (см. рис. 3.19).

Таким образом, когда параметры входного сигнала близки к верхней границе полосы непропускания (3.48), непрерывный входной сигнал постоянной амплитуды преобразуется в близкую к периодической последовательность солитонов самоиндуцированной прозрачности. Отметим, что при увеличении  $a_0$  и одновременном уменьшении  $\delta_0$  вдоль верхней границы области поглощения амплитуда солитонов растёт и достигает максимума при  $\delta_0 \approx -2$ .

При  $\delta_0 < -2$ , когда решение в виде светлых солитонов не существует, трудно чётко идентифицировать верхнюю границу полосы непропускания. В этой области параметров наблюдаются нестационарные режимы с частичным пропусканием входного сигнала, которые будут отдельно обсуждаться в разделе 3.6.4.

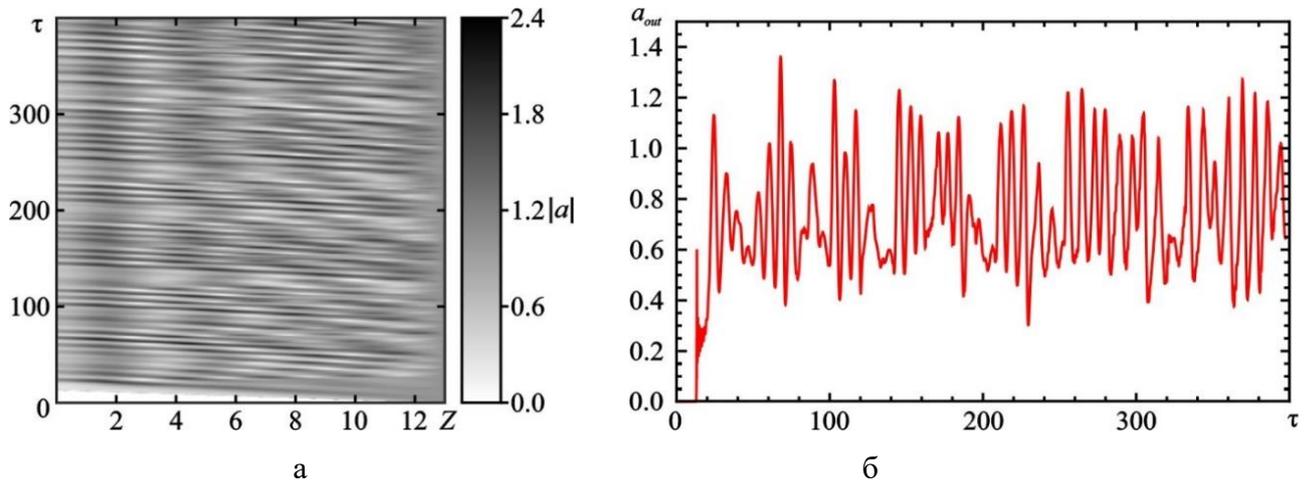


Рис. 3.19. Режимы автомодуляции без генерации последовательности солитонов,  $\delta = 2.10$ . (а) Пространственно-временное распределение амплитуды поля. (б) Осциллограмма выходного сигнала. Остальные параметры те же, что и на рис. 3.15.

### 3.6.2. Переход от абсолютной МН к конвективной

Результаты, представленные в разделе 3.6.1, показывают, что при превышении верхней границы полосы непропускания наблюдаются режимы автомодуляции, т.е. МН является абсолютной. Согласно теоретическому анализу, представленному в разделе 3.5, если увеличивать частоту входного сигнала и удаляться от частоты отсечки, то МН меняет свой характер с абсолютного на конвективный. В случае конвективной МН (область 3 на рис. 3.14) вместо автомодуляции устанавливается режим стационарного прохождения волны с периодическими распределениями профилей  $|a|$  и  $|p|$ , которые в точности описываются аналитическими решениями (3.40) или (3.45) полученными в разделе 3.4.1 (см. рис. 3.20).

Оранжевая штрих-пунктирная линия и сплошная чёрная линия на рис. 3.14 соответствуют аналитическим границам смены характера МН, полученным, соответственно, в разделе 3.5.2 на основе НУШ и в разделе 3.5.3 на основе строгого анализа возмущений. Заметим, что найденные численно границы смены характера МН при различных длинах системы  $L$  достаточно сильно отличаются от теоретических кривых. Это, очевидно, объясняется тем, что теоретический анализ в разделе 3.5.3 был проведен для безграничной системы, тогда как система с граничными условиями (3.11) и (3.13) является принципиально ограниченной. Отражение волны от левой границы препятствует сносу возмущений вдоль системы в случае конвективной МН. Соответственно, граница установления стационарного режима существенно сдвигается в область более высоких частот, причем, чем больше длина системы  $L$ , тем сильнее выражен этот эффект (см. рис. 3.14).

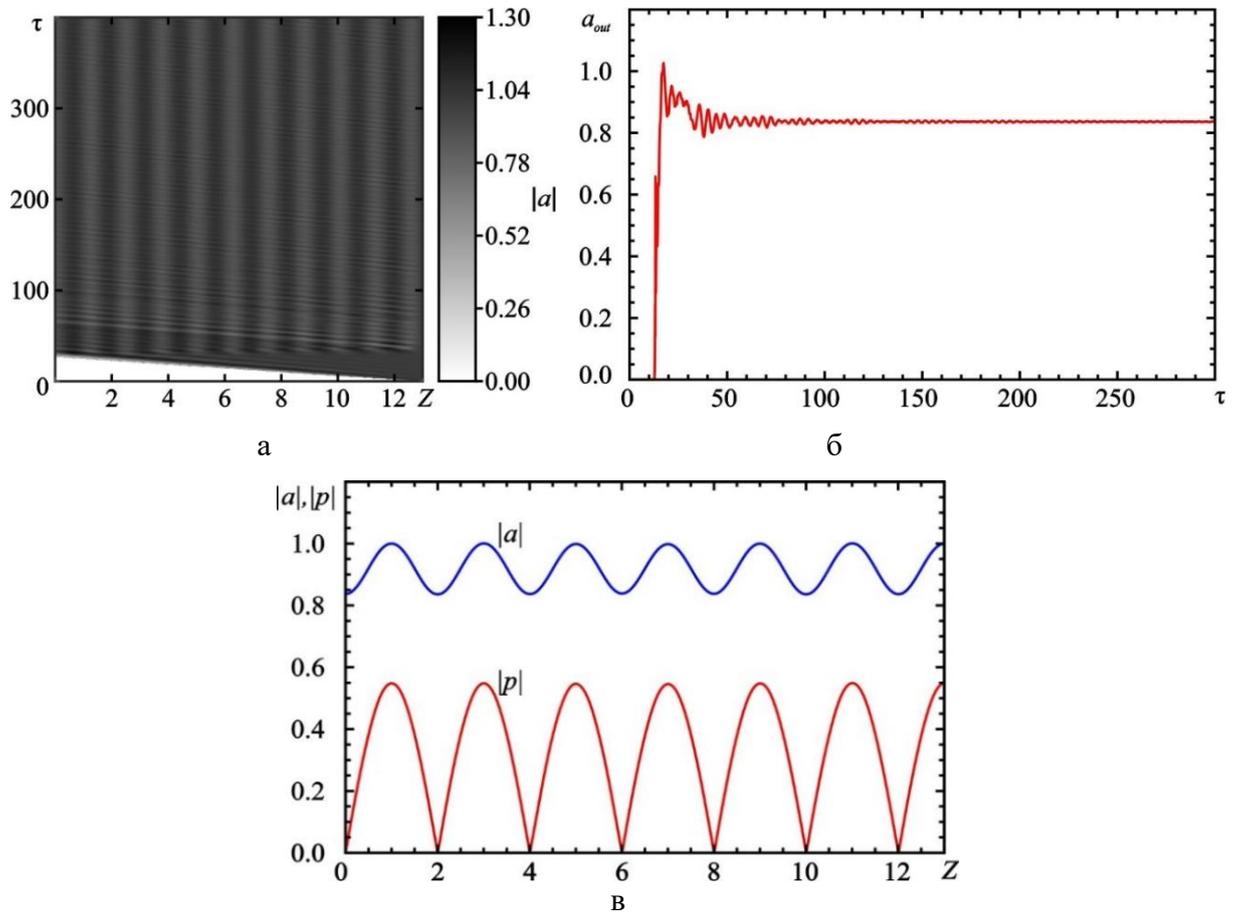


Рис. 3.20. Режим стационарного прохождения сигнала в области конвективной МН,  $a_0 = 1$ ,  $\delta_0 = 3.50$ . (а) Пространственно-временное распределение амплитуды поля. (б) Осциллограмма выходного сигнала. (в) Стационарные распределения  $|a|$  и  $|p|$ . Остальные параметры соответствуют рис. 3.17.

Представляет интерес исследование смены характера МН для системы, которая согласована на левой границе, что позволяет избавиться от отражений. Этого можно добиться с помощью плавного изменения магнитного поля вдоль системы. В численную модель добавлялся участок согласования длиной  $Z_0 < L$ , на котором в уравнение движения вводилась зависящая от  $Z$  частотная расстройка:

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i(\Delta(Z) + |p|^2)p = a, \quad (3.83)$$

которая выбиралась в виде

$$\Delta(Z) = \begin{cases} \Delta_{\max} (Z_0 - Z)^2 / Z_0^2, & 0 \leq Z \leq Z_0 \\ 0, & Z_0 < Z \leq L \end{cases}. \quad (3.84)$$

Зависимость (3.84) моделирует плавное нарастание магнитного поля вдоль направления влета электронов в пространство взаимодействия в области  $0 \leq Z \leq Z_0$ . При  $Z = Z_0$  магнитное поле

достигает значения, соответствующего циклотронному резонансу, и далее остается постоянным. При этом расстройка обращается в нуль.

Моделирование согласованной системы показывает, что при достаточно протяженном участке согласования отражения практически не наблюдаются и численная граница смены характера МН, показанная на рис. 3.14 чёрными кружками, хорошо согласуется с теоретической, причем результаты моделирования практически не зависят от параметров, входящих в (3.84). Представленные результаты получены при  $\Delta_{\max} = 2$ ,  $Z_0 = 10$  и  $L = 23$ , т.е. длина однородной части системы равна 13.

Рис. 3.21 иллюстрирует пространственно-временную динамику поля при различных значениях частоты входного сигнала для несогласованной (а, в, д) и согласованной (б, г, е) системы. Для согласованной системы показан только однородный участок,  $Z_0 \leq Z \leq L$ . Рис. 3.21(а,б) построены при  $a_0 = 1.0$  и  $\delta_0 = 1.5$ , что соответствует точке, лежащей несколько выше границы пропускания на рис. 3.14. В обоих случаях развитие МН приводит к генерации периодической последовательности солитонов. Однако в несогласованной системе происходит частичное отражение солитона от левой границы и его распространение в направлении, попутном электронному потоку, что хорошо видно на рис. 3.21(а). В случае согласованной системы [рис. 3.21(б)] видно, как вблизи правой границы происходит формирование солитонов, которые затем распространяются вдоль системы с постоянной скоростью.

При увеличении частоты до  $\delta_0 = 2.5$  мы попадаем в область конвективной МН (см. рис. 3.14). В несогласованной системе из-за влияния отраженной волны стационарный режим не устанавливается. Образование солитонов при этом не происходит, а колебания амплитуды поля носят сложный, нерегулярный характер [рис. 3.21(в)]. В согласованной системе устанавливается стационарный режим [рис. 3.21(г)]. При этом амплитуда периодически зависит от координаты, что свидетельствует о наличии отраженного сигнала, однако его влияние невелико. Коэффициент стоячей волны (КСВ), который определяется как отношение максимального значения амплитуды к минимальному равен 1.28.

### 3.6.3. Нижняя граница полосы непропускания

Теперь рассмотрим окрестность нижней границы полосы непропускания. Зафиксируем амплитуду входного сигнала  $a_0 = 0.5$ , длину системы  $L = 13$  и будем постепенно уменьшать частоту. На рис. 3.22 представлены стационарные пространственные профили амплитуды поля, полученные при различных значениях  $\delta_0$ .

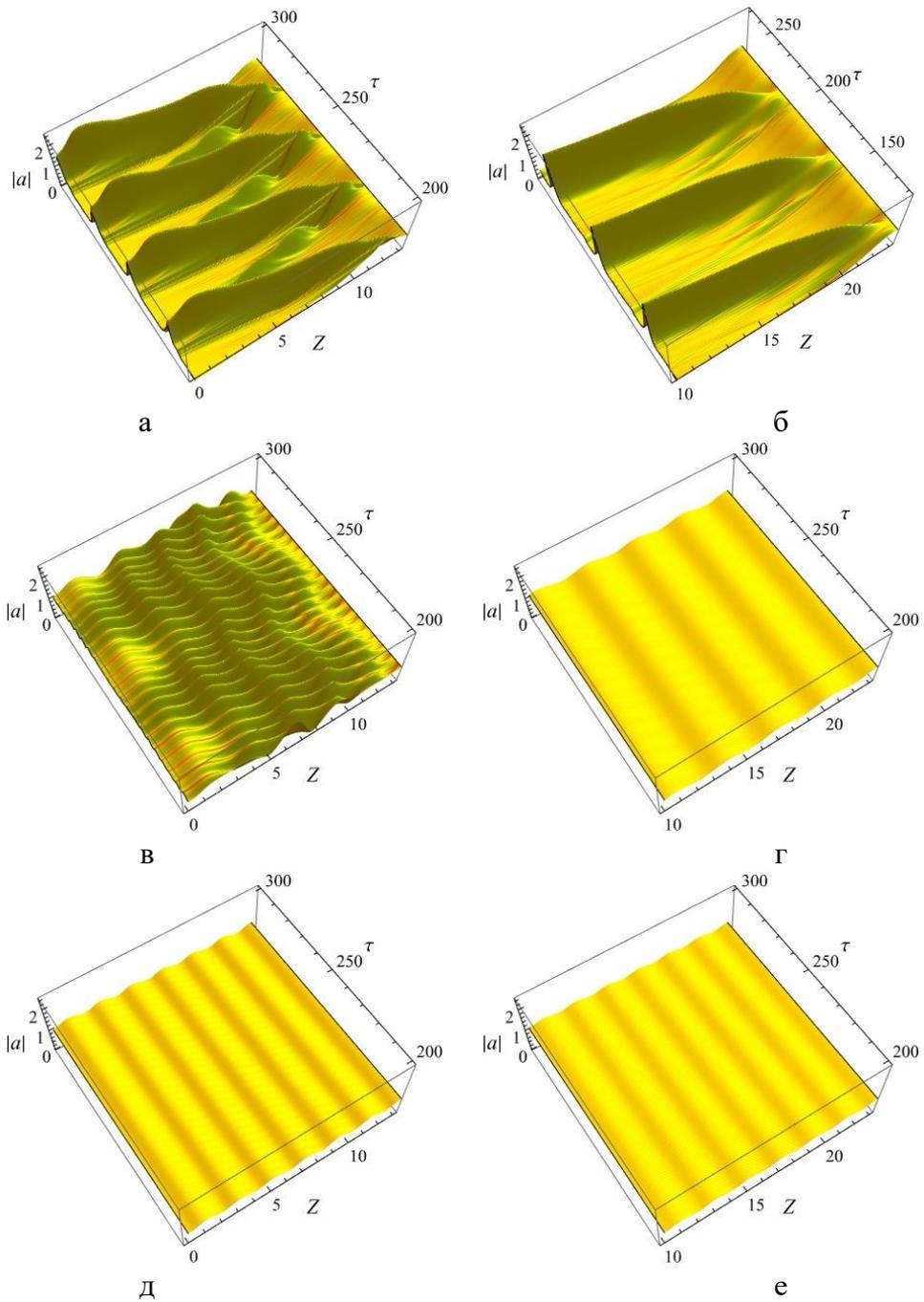


Рис. 3.21. Пространственно-временные диаграммы амплитуды поля при  $a_0 = 1.0$  и различных значениях частоты входного сигнала:  $\delta_0 = 1.5$  (а,б), 2.5 (в,г) и 3.5 (д,е). Рисунки (а, в, д) соответствуют несогласованной системе, (б, г, е) — согласованной.

Когда частота лежит внутри полосы непропускания, амплитуда сигнала монотонно спадает, и значение выходного сигнала стремится к нулю, что соответствует полному циклотронному поглощению. По мере приближения  $\delta_0$  к нижней границе полосы непропускания форма стационарного профиля трансформируется. В частности, появляется горизонтальная «полочка», т.е. участок, на котором амплитуда поля практически постоянна.

Тем не менее, поле монотонно спадает от правого конца системы к её началу, что может быть интерпретировано как поглощение волны.

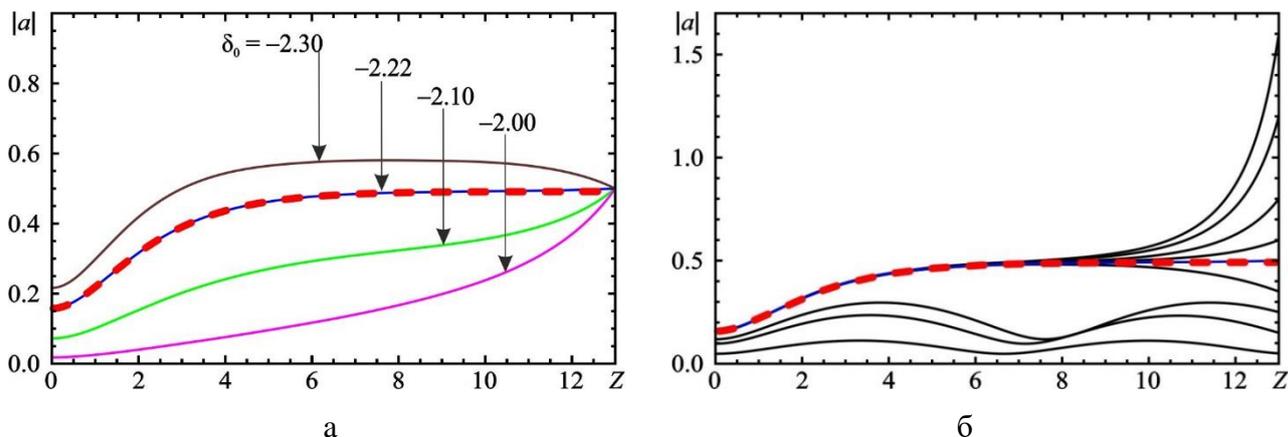


Рис. 3.22. Стационарные распределения амплитуды поля при  $a_0 = 0.5$  и различных значениях  $\delta_0$  (а) и при  $\delta_0 = -2.22$  и различных значениях  $a_0$  (б). При  $a_0 = 0.5$  и  $\delta_0 = -2.22$  профиль поля в точности совпадает с решением в виде темного неподвижного солитона (3.52), которое показано пунктирной линией.

При  $\delta_0 \approx -2.22$  интенсивность входного сигнала совпадает с амплитудой хвостов темного неподвижного солитона,  $a_0^2 = I_{2,3}(\delta)$ , где  $I_{2,3}$  определяется формулой (3.51). Распределение поля вдоль системы принимает вид половины темного солитона. На рис. 3.22(а) пунктирными линиями показано аналитическое решение (3.52), которое в точности совпадает с результатами численного моделирования. При дальнейшем уменьшении  $\delta_0$  распределение поля становится немонотонным, т.е. вблизи правой границы системы появляется область нарастания поля.

Однако по результатам, представленным на рис. 3.22(а), трудно однозначно идентифицировать нижнюю границу полосы непропускания, поскольку в отличие от верхней границы значение выходного сигнала постепенно растет при уменьшении частоты. Зафиксируем  $\delta_0 = -2.22$  и будем плавно увеличивать амплитуду входного сигнала  $a_0$ . Соответствующие результаты представлены на рис. 3.22(б). При достаточно малой амплитуде входного сигнала ( $a_0 \leq 0.35$ ) устанавливается периодическое распределение амплитуды поля, которое хорошо описывается стационарными периодическими решениями (3.42), найденными аналитически в разделе 3.4.1. При этом увеличение  $a_0$  сопровождается ростом амплитуды выходного сигнала.

Когда значение  $a_0$  приближается к величине амплитуды хвостов темного неподвижного солитона (3.51) (при выбранном значении  $\delta$ ,  $\sqrt{I_{2,3}} = 0.5$ ), стационарный профиль поля начинает менять свою форму и становится всё более похожим на половину темного неподвижного солитона. При  $a_0 = 0.5$  профиль поля в точности совпадает с решением (3.52). При более высоких значениях амплитуды входного сигнала профиль поля после резкого спада около правой границы системы всё равно стремится к решению (3.52). Таким образом, несмотря на рост мощности входного сигнала, значение выходной амплитуды остаётся неизменным и равным  $I_{\min}$  [см. (3.53)]. Разумно интерпретировать это как режим непропускания. Таким образом, нижняя граница области непропускания определяется соотношением (3.51).

При ещё более высоких амплитудах  $a_0 \geq 1.7$  режим поглощения становится неустойчивым, и возникает слабая периодическая модуляция амплитуды, распространяющаяся к левой границе (см. рис. 3.23).

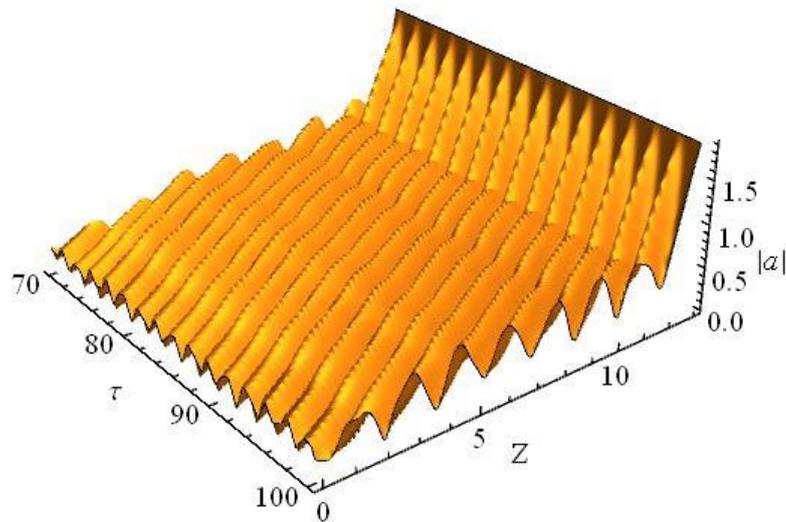


Рис. 3.23. Пространственно-временное распределение амплитуды поля в нестационарном режиме поглощения при  $\delta_0 = -2.22$ ,  $a_0 = 1.9$  и  $L = 13$ .

Также отметим, что ниже полосы непропускания (область 4 на рис. 3.14) существует другой интересный нестационарный режим, который можно наблюдать в более длинных системах. В этом режиме возникают бегущие темные солитоны, которые периодически распространяются вдоль системы в обоих направлениях (рис. 3.24). Этот режим устойчив, по крайней мере, при достаточно больших значениях нормированного времени.

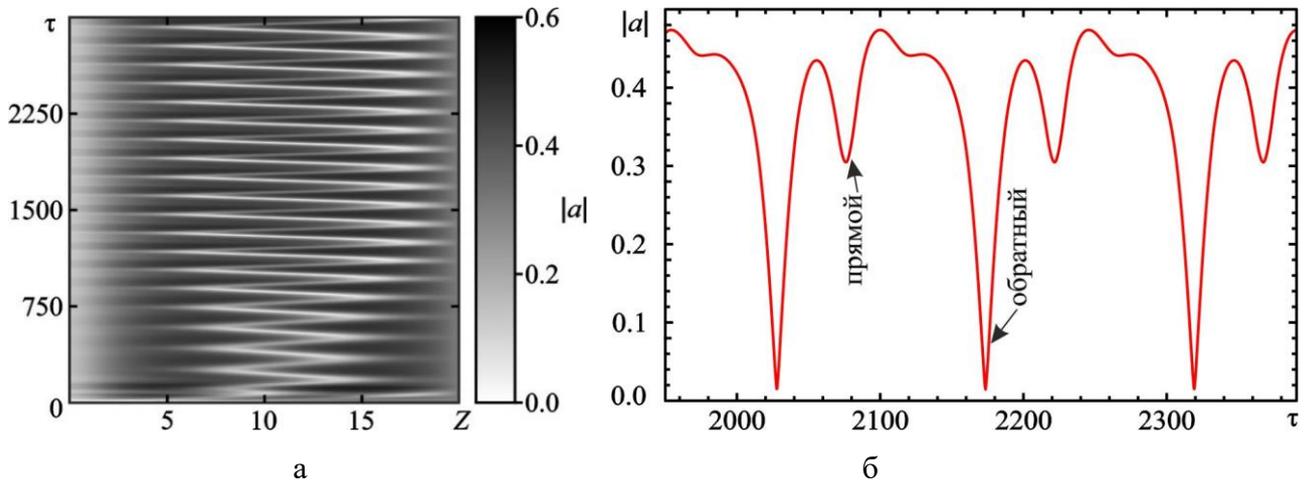


Рис. 3.24. Нестационарный режим с бегущими темными солитонами при  $\delta_0 = -2.22$ ,  $a_0 = 0.3$  и  $L = 20$ . (а) Пространственно-временное распределение амплитуды поля. (б) Осциллограмма сигнала  $|a(\tau)|$  при  $Z = 10$ .

### 3.7. 3-D PIC моделирование электронно-волнового взаимодействия

Наиболее строгим подходом к исследованию электронно-волнового взаимодействия является прямое 3-D моделирование методом «частиц в ячейке» (“Particle in Cell”, PIC). В данном разделе представлены результаты 3-D PIC моделирования в программном пакете CST Studio Suite [90]. Данный программный пакет позволяет непосредственно численно интегрировать уравнения Максвелла в совокупности с релятивистскими уравнениями движения частиц с учётом реальной геометрии пространства взаимодействия. Результаты 3-D PIC моделирования позволяют установить условия экспериментальной реализации устойчивых режимов формирования периодических последовательностей микроволновых солитонов и определить их основные параметры.

Будем считать, что пучок электронов взаимодействует с циркулярно поляризованной  $TE_{11}$  модой цилиндрического волновода в условиях циклотронного резонанса (3.1). Схема модели в программе CST Studio Suite представлена на рис. 3.25. Непрерывный гармонический сигнал постоянной амплитуды подаётся с правого конца системы (порт 2). Вблизи правой границы пространства взаимодействия магнитное поле плавно спадает до нуля, и электроны осаждаются на внутренние стенки волновода, который выполняет роль коллектора. Выходной сигнал снимается на левой границе системы (порт 1). На рис. 3.25 представлено изображение траекторий электронов в пространстве взаимодействия, полученное в 3-D PIC моделировании в некоторый фиксированный момент времени.

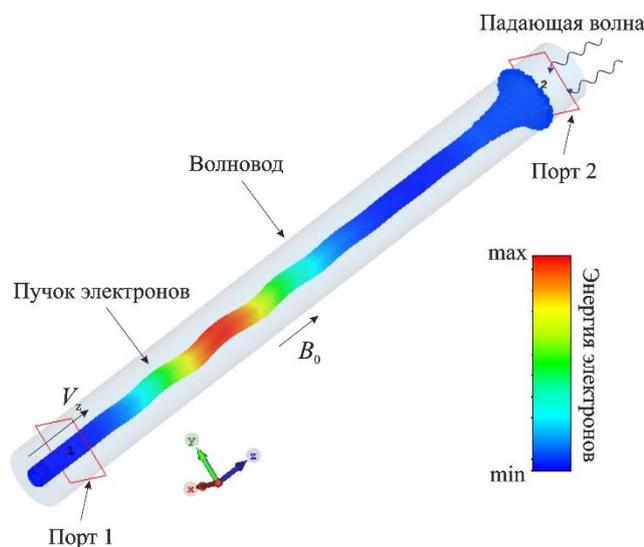


Рис. 3.25. Схема взаимодействия изначально прямолинейного потока электронов со встречной ЭМ волной в условиях циклотронного резонанса

В Таблице 3.2 приведены параметры модели, которые примерно соответствуют представленным в работе [36]. Циклотронная частота составляет  $f_H = \omega_H / 2\pi = 248.5$  ГГц, частота отсечки  $TE_{11}$  моды цилиндрического волновода  $f_c = c / (3.41r_0) = 219.8$  ГГц. Продольная скорость электронов на входе в пространство взаимодействия равна  $V_z = \sqrt{2E/m_e} = 2.5 \cdot 10^7$  м/с (Лоренц-фактор  $\gamma = 1.0036$ ).

Таблица 3.2. Параметры системы, используемые в 3-D PIC моделировании

Параметр	Значение
Радиус волновода $r_0$	0.40 мм
Радиус инжекции $r_b$	0.10 мм
Длина взаимодействия $l$	26 мм
Начальная энергия электронов $E$	1.828 кэВ
Ток пучка $I_b$	0.1 А
Магнитное поле $B_0$	8.9 Тл
Входная мощность $P_0$	140 Вт
Частота входного сигнала $f$	240-242 ГГц

На рис 3.26 представлена дисперсионная характеристика  $TE_{11}$  моды

$$f = \sqrt{f_c^2 + \left(c \frac{k_z}{2\pi}\right)^2} \quad (3.85)$$

и дисперсионная характеристика быстрой циклотронной волны в электронном пучке

$$f = f_H + V_z \frac{k_z}{2\pi}. \quad (3.86)$$

Условие циклотронного резонанса (3.1) соответствует пересечению линии пучка (3.86) и дисперсионной кривой (3.85). Частота точного циклотронного резонанса при выбранных параметрах составляет  $f_0 = 240.3$  ГГц.

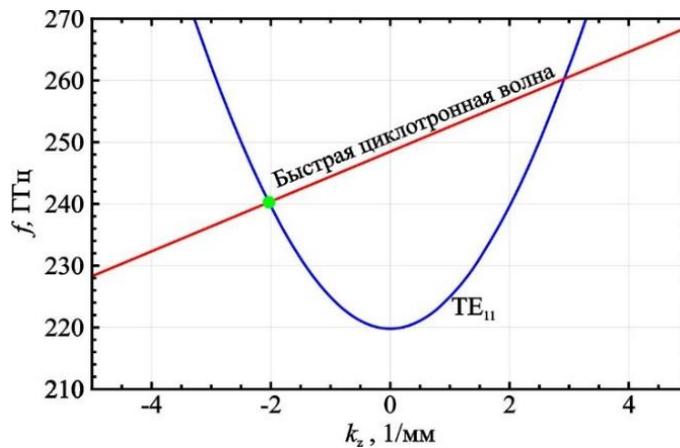


Рис. 3.26. Дисперсионная диаграмма быстрой циклотронной волны в электронном пучке и  $TE_{11}$  моды волновода при параметрах, указанных в Таблице 3.2. Точкой отмечено положение точного циклотронного резонанса.

Для того, чтобы задать циркулярную поляризацию падающей волны, в порте 2 возбуждались две ортогональных, линейно поляризованных  $TE_{11}$  моды с одинаковыми амплитудами и разностью фаз  $90^\circ$ . Средняя мощность входного сигнала фиксировалась равной  $P_0 = 140$  Вт. Такую мощность в суб-ТГц диапазоне способны обеспечить гиротроны.

В численных экспериментах увеличивалась частота входного сигнала  $f$ , начиная со значения точного циклотронного резонанса  $f_0$ . Выходной сигнал в порте 1 и отражённый сигнал в порте 2 также представляют собой сумму двух линейно поляризованных  $TE_{11}$  мод. Рис. 3.27 иллюстрирует характерные режимы колебаний при различных значениях  $f$ . Для определенности на нем представлены осциллограммы сигналов компоненты электрического поля, линейно поляризованной вдоль оси  $x$ .

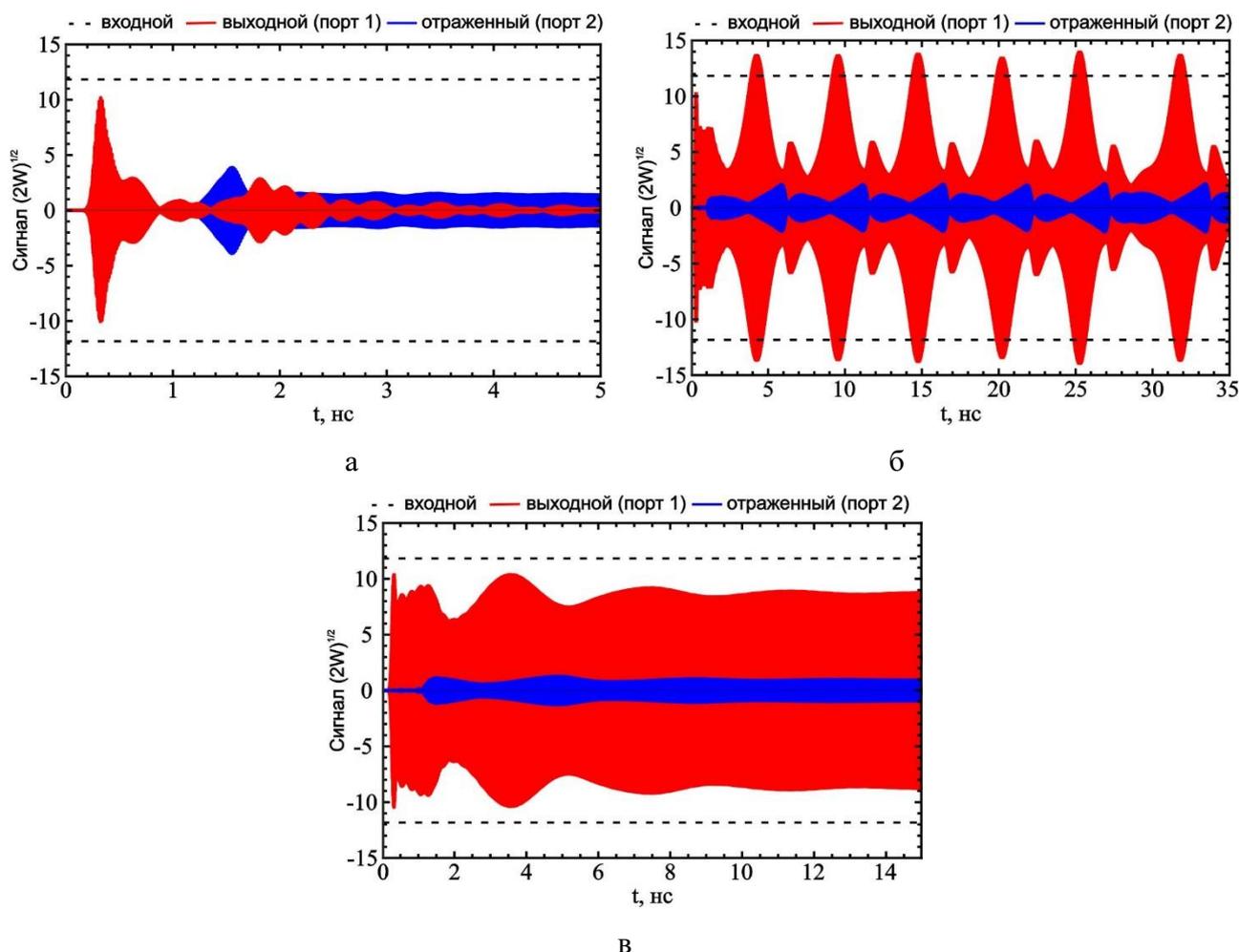


Рис. 3.27. Осциллограммы выходного сигнала в порте 2 и отражённого сигнала в порте 1, полученные в 3-D PIC моделировании в различных режимах распространения волны: (а) —  $f = 240.3$  ГГц (точный циклотронный резонанс), режим циклотронного поглощения; (б) —  $f = 241.3$  ГГц, режим генерации последовательности импульсов (МН абсолютного характера); (в) —  $f = 241.65$  ГГц, режим стационарного прохождения волны (конвективная МН). Пунктирными линиями показан уровень входного сигнала.

При точном циклотронном резонансе, когда  $f = f_0 = 240.3$  ГГц, в 3-D PIC моделировании наблюдается поглощение волны [см. рис. 3.27(а)]. При этом входной сигнал, проходя через систему, практически полностью затухает, и мощность выходного сигнала в порте 1 после переходного процесса стремится к нулю. С ростом частоты входного сигнала поглощение волны сменяется нестационарной автомодуляцией. На рис. 3.27(б) представлены осциллограммы сигналов при  $f = 241.3$  ГГц, которые демонстрируют генерацию близкой к периодической последовательности импульсов. В соответствии с теоретическим анализом (раздел 3.3) этот режим распространения волны соответствует абсолютной МН. Длительность

генерируемых импульсов составляет 3-4 нс. Отметим, что пиковая амплитуда импульсов превышает амплитуду входного сигнала (штриховые линии на рис. 3.27). Пиковая мощность выходного сигнала составляет около 200 Вт при входной мощности 140 Вт.

Наконец, при ещё более высоких частотах происходит переход от абсолютной МН к конвективной. При этом после переходного процесса устанавливается стационарное распространение волны [см. рис. 3.27(в)], а спектр выходного сигнала в установившемся режиме содержит только частоту входного сигнала [см. рис. 3.28(а)]. При абсолютной неустойчивости, когда нарастающие возмущения непрерывно генерируются по всей длине системы и устанавливается режим автомодуляции, т.е. режим многочастотных колебаний, спектр выходного сигнала обогащается новыми независимыми спектральными компонентами [см. рис. 3.28(б)]. Частота модуляции, т.е. расстояние между соседними пиками в спектре сигнала, составляет 0.19 ГГц, что примерно равно  $1/T$ , где  $T \approx 5.25$  нс — период следования импульсов [см. осциллограмму выходного сигнала на рис. 3.27(б)].

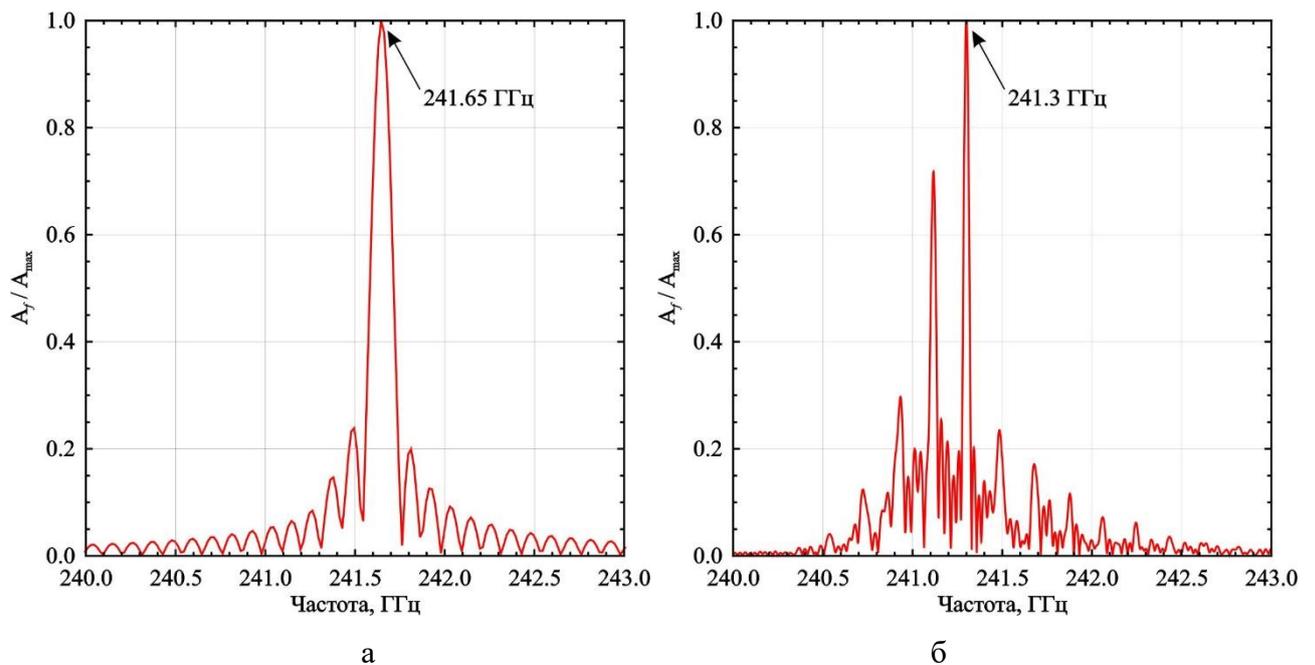


Рис. 3.28. Спектры выходного сигнала в порте 2, полученные в 3-D PIC моделировании в различных режимах распространения волны: (а) —  $f = 241.65$  ГГц, режим стационарного прохождения волны (конвективная МН), (б) —  $f = 241.3$  ГГц, режим генерации последовательности импульсов (МН абсолютного характера).

Таким образом, прямое 3-D PIC моделирование согласуется как с результатами теоретического анализа, так и с результатами моделирования усредненных уравнений. При

увеличении частоты входного сигнала наблюдается одна и та же последовательность переходов между различными динамическими режимами: выше границы полосы непропускания имеют место нестационарные режимы автомодуляции, которые при ещё более высоких частотах сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала. Автомодуляционные режимы обусловлены абсолютной МН и могут приводить к формированию последовательностей солитоноподобных импульсов. В частности, продемонстрирована возможность преобразования сигнала с частотой 241.3 ГГц в последовательность наносекундных импульсов, которая близка к периодической. Такой эффект представляет интерес для генерации частотных гребёнок в микроволновом диапазоне.

### 3.8. Выводы к Главе 3

В данной главе развита теория МН при распространении ЭМ волны вдоль встречного, изначально прямолинейного электронного пучка в условиях циклотронного резонансного поглощения. Показано, что, когда частота волны лежит в полосе непропускания, монохроматический входной сигнал малой мощности поглощается. С ростом входной мощности полоса поглощения сдвигается в область более низких частот, и становится возможным незатухающее распространение волны. Это распространение сопровождается развитием МН, что приводит к режимам автомодуляции, включая преобразование сигнала в последовательность светлых солитонов огибающей. Отмечена аналогия между генерацией светлых солитонов и явлением самоиндуцированной прозрачности.

Найдены точные аналитические решения в виде периодических стационарных волн, светлых и темных солитонов. Проведен анализ характера МН. Получено НУШ, описывающее динамику системы вблизи верхней частоты отсечки, и известный для него критерий смены характера МН применён в контексте рассматриваемой системы. Для получения более строгого критерия был проведён анализ асимптотической формы неустойчивых модуляционных возмущений, вычисленной методом перевала. В результате найдены условия, при которых МН является абсолютной или конвективной, и построена граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала.

Теоретические выводы подтверждены результатами численного интегрирования усредненных уравнений электронно-волнового взаимодействия. Показано, что, когда амплитуда входного сигнала начинает превышать амплитуду светлого неподвижного солитона, становится возможным распространение волны. Поскольку при этом имеет место абсолютная МН, возникает автомодуляция, и непрерывный сигнал постоянной амплитуды превращается в последовательность бегущих светлых солитонов. Если увеличивать

амплитуду и частоту входного сигнала относительно порога пропускания, то последовательность солитонов становится более сложной и даже хаотической.

С увеличением частоты входного сигнала нестационарные автомодуляционные режимы, которые соответствуют абсолютной МН, сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала, обусловленным конвективной МН. Однако принципиальное влияние отражений в пространственно-ограниченной системе осложняет сопоставление с теоретическими выводами. Проведено моделирование системы, согласованной на границе, через которую встреливается электронный поток. В этом случае граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала хорошо согласуется с теоретической зависимостью.

Введён критерий определения нижней границы полосы непропускания, согласно которому она соответствует формированию в системе тёмного неподвижного солитона. Если входная амплитуда выше величины «хвостов» тёмного неподвижного солитона, то несмотря на рост мощности входного сигнала значение выходной мощности остаётся неизменным, что интерпретируется как непропускание сигнала.

Проведено трёхмерное моделирование циклотронного взаимодействия ЭМ волны со встречным прямолинейным потоком электронов методом «частиц в ячейке». Моделирование проводилось для цилиндрического волновода радиусом 0.4 мм и длиной 26 мм с продольным магнитным полем 8.9 Тл. Вдоль системы распространялся прямолинейный электронный пучок с энергией 1.828 кэВ и током 100 мА. С коллекторного конца подавался гармонический сигнал постоянной мощности 140 Вт с частотой, меняющейся в разных численных экспериментах в диапазоне 240-243 ГГц (частота циклотронного резонанса 240.3 ГГц). Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы о переходе между различными динамическими режимами при увеличении частоты входного сигнала. В полосе циклотронного поглощения входной сигнал затухает. С ростом частоты становится возможным прохождение волны, причём наблюдается формирование гребёнки солитонов, что обусловлено развитием МН абсолютного характера. В частности, продемонстрирована возможность преобразования непрерывного сигнала с частотой 241.3 ГГц в близкую к периодической последовательность импульсов с длительностью порядка 3-4 нс и пиковой амплитудой, превышающей амплитуду входного сигнала. В области более высоких частот МН меняет характер с абсолютного на конвективный, в результате чего нестационарные автомодуляционные режимы сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе представлены результаты исследования фундаментальных закономерностей усиления и генерации ультракоротких импульсов микроволнового излучения в нелинейных системах типа электронный поток – ЭМ волна. Развита теория автомодельной эволюции импульсов, усиливающихся и сжимающихся в процессе распространения вдоль электронных потоков. Построена теория МН при взаимодействии ЭМ волны со встречным прямолинейным электронным пучком в условиях циклотронного резонанса и определены условия генерации последовательности солитоноподобных импульсов. Проведённое исследование позволяет с единых позиций описать процессы эволюции импульсов в широком классе систем, а применённые алгоритмы и основные выводы в дальнейшем могут быть обобщены на случай приборов с другими типами электронно-волнового взаимодействия. Полученные фундаментальные закономерности представляют практический интерес для определения оптимальных режимов генерации ультракоротких микроволновых импульсов.

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Проведён анализ автомодельных решений уравнений нестационарной теории черенковского взаимодействия прямолинейного электронного пучка с попутной ЭМ волной для двух различных приближений: малого изменения энергии и малого изменения скорости электронов. Найденные решения описывают усиление и компрессию импульса в процессе распространения вдоль системы. В случае малого изменения энергии электронов пиковая амплитуда импульса растёт линейно с течением времени  $\tau$ , а ширина импульса уменьшается как  $\tau^{-1/2}$ . В случае малого изменения скорости электронов, который представляет наибольший интерес с точки зрения высоких коэффициентов конверсии мощности, пиковая амплитуда импульса также растёт линейно с ростом  $\tau$ , а ширина импульса уменьшается пропорционально  $\tau^{-2}$ .

2. Проведено численное моделирование усиления короткого входного импульса при черенковском электронно-волновом взаимодействии на основе уравнений нелинейной нестационарной теории ЛБВ. В случае малого изменения энергии электронов эволюция импульса после короткого переходного процесса выходит на автомодельную стадию, когда пиковая амплитуда, эффективная длительность и положение максимума ведут себя в соответствии с автомодельными законами. Чем меньше длительность входного импульса, тем короче процесс перехода к автомодельной стадии. Для приближения малого изменения скорости электронов процесс усиления импульса на малых временах совпадает с решением для случая малого изменения энергии. С течением времени изменение энергии электронов

становится существенным, и решение выходит на новую автомодельную асимптотику, соответствующую случаю малого изменения скорости. С ростом релятивистского параметра пиковая амплитуда и ширина импульса уменьшаются, однако существует оптимальное значение, при котором достигается максимум коэффициента конверсии мощности.

3. Проведен групповой анализ симметрий уравнений нелинейной нестационарной теории ЛБВ в приближении малого изменения энергии электронов. Показано, что одна из базисных симметрий соответствует автомодельному решению. Рассмотрена комбинация автомодельного решения с симметрией относительно фазового сдвига. Такое решение описывает автомодельное распространение импульса с частотной модуляцией. В численном моделировании усиления входного импульса с частотой, отличной от частоты синхронизма, показано, что наибольшую выходную амплитуду импульса можно получить при небольших положительных отстройках частоты, что согласуется с автомодельным решением.

4. Автомодельное решение, найденное для черенковского взаимодействия в приближении малого изменения энергии, обобщено на случай взаимодействия с обратной волной в ЛОВ-генераторе. В данном случае решение описывает усиление и компрессию импульса, который движется навстречу электронам, причём его амплитуда растёт линейно с увеличением времени  $\tau$ , а ширина сокращается как  $\tau^{-1/2}$ .

5. Проведено численное моделирование генерации импульса СИ в ЛОВ-генераторе на основе усреднённых уравнений нелинейной нестационарной теории. Показано, что после некоторого переходного процесса решение выходит на автомодельную стадию, когда основные характеристики импульса ведут себя в соответствии с автомодельными законами. Принципиальная ограниченность системы в пространстве накладывает определённую специфику на процесс распространения импульса. Пока длина системы  $L$  не превышает некоторого критического значения  $L_c$ , рост  $L$  сопровождается увеличением пикового значения выходного сигнала. При  $L > L_c$  процесс автомодельного распространения импульса перестаёт зависеть от длины, что связано с зарождением вторичных импульсов прежде, чем первый успеет покинуть систему.

6. Рассмотрен вопрос о существовании автомодельных решений в ЛОВ с профилированием сопротивлением связи. Определены законы профилирования, при которых существуют автомодельные решения. Один из найденных законов соответствует режиму пространственного накопления энергии, известному из литературы, и представляет интерес в рамках задачи о генерации высокомогного короткого импульса СИ в ЛОВ. В численном моделировании рассмотрена конструкция ЛОВ, в которой однородный участок, расположенный вблизи правой границы системы, дополнен секцией с сопротивлением связи,

профилированным по найденному закону. При движении импульса по неоднородному участку квадрат его амплитуды растёт линейно вдоль координаты, а ширина остается неизменной, что соответствует автомодельным законам. При определённом соотношении между длинами секций можно получить существенное увеличение пиковой амплитуды выходного импульса по сравнению с однородной системой.

7. Исследован автомодельный характер генерации короткого импульса в ЛСЭ с попутной ЭМ накачкой, когда рассеянное излучение распространяется навстречу электронному потоку. Найдено автомодельное решение которое для рассеянной волны представляет собой импульс, пиковая амплитуда которого растёт пропорционально  $\tau^{3/2}$ , а ширина уменьшается обратно пропорционально  $\tau$ . Численное моделирование демонстрирует, что эволюция импульса проходит через несколько этапов. После переходного процесса, в результате которого из случайных флуктуаций формируется импульс, решение выходит на стадию, соответствующую автомодельному решению уравнений ЛОВ, когда пиковая амплитуда растёт пропорционально  $\tau$ . С течением времени начинает сказываться истощение накачки, и эволюция импульса выходит на новую автомодельную стадию, соответствующую автомодельному решению уравнений ЛСЭ.

8. Развита теория МН при взаимодействии ЭМ волны со встречным прямолинейным электронным пучком в условиях циклотронного резонансного поглощения. Показано, что с ростом входной мощности полоса поглощения сдвигается в область более низких частот, и становится возможным незатухающее распространение волны. Это распространение сопровождается развитием МН, что приводит к режимам автомодуляции. Найдены точные аналитические решения в виде периодических стационарных волн, светлых и темных солитонов. Проведён приближенный анализ характера МН в окрестности верхней границы полосы непропускания. Для описания этой ситуации получено НУШ, для которого найдена граница смены характера неустойчивости на плоскости параметров входного сигнала. Условия абсолютной/конвективной МН уточнены на основе более строгого анализа асимптотической формы неустойчивых модуляционных возмущений, вычисленной методом перевала. При малых амплитудах сигнала границы смены характера МН, полученные на основе различных подходов, хорошо согласуются друг с другом.

9. Проведено численное моделирование циклотронного резонансного взаимодействия гармонического сигнала со встречным, изначально прямолинейным электронным пучком на основе усреднённых уравнений. Когда амплитуда входного сигнала превышает амплитуду светлого неподвижного солитона, становится возможным распространение волны. При этом имеет место абсолютная МН, и возникает автомодуляция, в результате чего непрерывный сигнал постоянной амплитуды трансформируется в близкую к периодической

последовательность бегущих светлых солитонов. Если увеличивать частоту входного сигнала, по мере удаления от границы полосы непропускания последовательность солитонов усложняется, в том числе, может становиться хаотической. При дальнейшем увеличении частоты МН становится конвективной и нестационарные автомодуляционные режимы сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала. Принципиальное влияние отражений осложняет сопоставление с теоретическими выводами, в частности, граница смены характера МН зависит от длины системы. Однако при моделировании системы, согласованной на левой границе (что обеспечивается плавным нарастанием магнитного поля) полученная численно граница смены характера МН хорошо согласуется с теоретическими результатами. Также введён критерий определения нижней границы полосы непропускания, согласно которому она соответствует формированию в системе тёмного неподвижного солитона. Если входная амплитуда выше величины «хвостов» тёмного неподвижного солитона, то несмотря на рост амплитуды входного сигнала значение выходной мощности остаётся неизменным, что интерпретируется как непропускание.

10. Проведено 3-D PIC моделирование циклотронного взаимодействия ЭМ волны со встречным прямолинейным потоком электронов. Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы о переходе между различными динамическими режимами при увеличении частоты входного сигнала. В полосе циклотронного поглощения входной сигнал затухает. С ростом частоты становится возможным прохождение волны, причём наблюдается формирование гребёнки солитонов. Продемонстрирована возможность преобразования непрерывного сигнала с частотой 241.3 ГГц в близкую к периодической последовательность импульсов с длительностью порядка 3-4 нс и пиковой амплитудой, превышающей амплитуду входного сигнала. В области более высоких частот нестационарные автомодуляционные режимы сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук Никите Михайловичу Рыскину, за многолетнее научное руководство, всестороннюю поддержку на протяжении всего процесса обучения и неоценимую помощь при работе над диссертацией. Также выражаю признательность нижегородским коллегам д.ф.-м.н. Науму Самуиловичу Гинзбургу и д.ф.-м.н. Ирине Валерьевне Зотовой за плодотворное сотрудничество. Особую благодарность хочу выразить профессорско-преподавательскому составу института физики и бывшего факультета нелинейных процессов СГУ. Отдельную признательность выражаю сотрудникам лаборатории вакуумной микро- и нанoeлектроники СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН за помощь и дружескую поддержку.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЗС – замедляющая система

КСВ – коэффициент стоячей волны

ЛБВ – лампа бегущей волны

ЛОВ – лампа обратной волны

ЛСЭ – лазер на свободных электронах

МН – модуляционная неустойчивость

НУШ – нелинейное уравнение Шрёдингера

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение

СИ – сверхизлучение

СВЧ – сверхвысокие частоты

ЭМ волна – электромагнитная волна

РІС – Particle in cell («частица в ячейке»)

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Диденко А.Н., Юшков Ю.Г. Мощные СВЧ импульсы наносекундной длительности. М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. High-power microwave sources and technology / R.J. Barker, E. Schamiloglu, Eds. New York, NY: IEEE Press / John Wiley and Sons, 2001.
3. Месяц Г.А. Импульсная энергетика и электроника. М.: Наука, 2004.
4. Benford J., Swegle J., Schamiloglu E. High Power Microwaves. 2<sup>nd</sup> ed. Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 2007.
5. Бердышев В.П., Гарин Е.Н., Фомин А.Н и др. Радиолокационные системы / Под общ. ред. В.П. Бердышева. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011.
6. Хилд М., Уортон С. Микроволновая диагностика плазмы. Пер. с англ. Д.К. Акулиной. М.: Атомиздат, 1968.
7. Wiedemann H. Particle accelerator physics. 4<sup>th</sup> ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
8. Пентин Ю.А., Вилков Л.В. Физические методы исследования в химии. М.: Мир, 2003.
9. Benirschke D.J., Han N., Burghoff D. Frequency comb ptychography // Nat. Commun. 2021. Vol. 12, № 1. P. 4244.
10. Hagmann M.J. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy // AIP Advances. 2018. Vol. 8, № 12. P. 125203.
11. Frantz L.M., Nodvik J.S. Theory of pulse propagation in a laser amplifier // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34, № 8. P. 2346-2349.
12. Dicke R.H. Coherence in spontaneous radiation processes // Phys. Rev. 1954. Vol. 93, № 1. P. 99-110.
13. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 18, № 21. P. 908-911.
14. Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С., Кочаровская Е.Р., Яландин М.И., Шунайлов С.А., Шарыпов К.А., Рыскин Н.М. Эффекты усиления, компрессии и самоиндуцированной прозрачности при распространении ультракоротких электромагнитных импульсов вдоль квазистационарных электронных потоков // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 8-9. С. 599-606.
15. Ginzburg N.S., Zotova I.V., Cross A.W., Phelps A.D.R., Yalandin M.I., Rostov V.V. Generation, amplification, and nonlinear self-compression of powerful superradiance pulses // IEEE Trans. Plasma Sci. 2013. Vol. 41, № 4. P. 646-660.
16. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Нестационарные нелинейные явления при взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных полях, с обратной электромагнитной волной // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 2. С. 300-312.

17. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н. Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037-1052.
18. Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С., Розенталь Р.М., Шпак В.Г., Яландин М.И., Фелпс А.Д.Р., Кросс А.В. Генерация субнаносекундных микроволновых импульсов на основе эффекта черенковского сверхизлучения // ЖТФ. 2002. Т.72, № 3. С. 53-60.
19. Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Novozhilova Yu.V., Rozental R.M., Phelps A.D.R., Cross A.W., Aitken P., Shpak V.G., Yalandin M.I., Shunailov S.A, Ulmaskulov M.R. Experimental observation of Cherenkov superradiance from an intense electron bunch // Opt. Comm. 2000. Vol. 175, № 1-3. P. 139-146.
20. Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С. Теория эффекта циклотронного сверхизлучения движущегося электронного сгустка в условиях группового синхронизма // ЖТФ. 2000. Т. 70, № 7. С. 1-8.
21. Ginzburg N.S., Zotova I.V., Sergeev A.S., Konoplev I.V., Phelps A.D.R., Cross A.W., Cooke S.J., Shpak V.G., Yalandin M.I., Shunailov S.A., Ulmaskulov M.R. Experimental observation of cyclotron superradiance under group synchronism conditions // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 12. P. 2365-2368.
22. Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Zotova I.V. Theory of wiggler superradiance from an extended electron bunch under the group synchronism condition // Opt. Comm. 2010. Vol. 283, № 1. P. 78-83.
23. Ginzburg N.S., Peskov N.Yu., Zotova I.V., Sergeev A.S., Phelps A.D.R., Cross A.W., He W., Ronald K., Shpak V.G., Yalandin M.I., Shunailov S.A., Ulmaskulov M.R. Experimental observation of wiggler superradiance under group synchronism condition // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 1999. Vol. 429, № 1-3. P. 94-100.
24. Korovin S.D., Eltchaninov A.A., Rostov V.V., Shpak V.G., Yalandin M.I., Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Zotova I.V. Generation of Cherenkov superradiance pulses with a peak power exceeding the power of the driving short electron beam // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, № 1. P. 016501.
25. Rostov V.V., Romanchenko I.V., Pedos M.S., Rukin S.N., Sharypov K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Ul'masculov M.R., Yalandin M.I. Superradiant Ka-band Cherenkov oscillator with 2-GW peak power // Phys. Plasmas. 2016. Vol. 23, № 9. P. 093103.
26. Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С. Об особенностях усиления коротких электромагнитных импульсов при распространении вдоль стационарных электронных потоков // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, № 23. С. 8-15.

27. Барышев В.Р., Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С., Розенталь Р.М., Яландин М.И. Усиление ультракоротких электромагнитных импульсов при распространении вдоль квазинепрерывных электронных пучков // ЖТФ. 2009. Т. 79, № 1. С. 105-111.
28. Яландин М.И., Реутова А.Г., Ульмаскулов М.Р., Шарыпов К.А., Шунайлов С.А., Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Кочаровская Е.Р., Сергеев А.С. Эффект нелинейной компрессии ультракоротких микроволновых импульсов в процессе усиления квазистационарными электронными потоками // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91, № 11. С. 620-625.
29. Ельчанинов А.А., Коровин С.Д., Пегель И.В., Ростов В.В., Яландин М.И. Генерация мощных сверхкоротких импульсов СВЧ-излучения // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 10. С. 874-882.
30. Ginzburg N.S., Malkin A.M., Sergeev A.S., Zheleznov I.V., Zotova I.V., Zaslavsky V.Yu., Boltachev G.Sh., Sharypov K.A., Shunailov S.A., Ul'masculov M. R., Yalandin M.I. Generation of subterahertz superradiance pulses based on excitation of a surface wave by relativistic electron bunches moving in oversized corrugated waveguides // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117, № 20. P. 204801.
31. Bonifacio R., De Salvo Souza L., Pierini P., Piovella N. The superradiant regime of a FEL: analytical and numerical results // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. 1990. Vol. 296, № 1-3. P. 358-367.
32. Bonifacio R., Piovella N., Robb G.R.M., Cola M.M. Propagation effects in the quantum description of collective recoil lasing // Opt. Commun. 2005. Vol. 252, № 4-6. P. 381-396.
33. Рыскин Н.М., Гинзбург Н.С., Зотова И.В. Автомодельные режимы усиления и компрессии электромагнитных импульсов при взаимодействии с электронными потоками // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39, № 9. С. 86-94.
34. Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С. Самоиндуцированная прозрачность, компрессия и остановка электромагнитных импульсов при взаимодействии с пучками невозбужденных классических осцилляторов // ЖЭТФ. 2011. Т. 140, № 5 (11). С. 890-899.
35. Зотова И.В., Гинзбург Н.С., Железнов И.В., Сергеев А.С. Модуляция интенсивного СВЧ-излучения при резонансном взаимодействии со встречным потоком невозбужденных циклотронных осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, № 12. С. 1-10.
36. Zotova I.V., Ginzburg N.S., Sergeev A.S., Kocharovskaya E.R., Zaslavsky V.Yu. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 113, № 14. P. 143901.
37. Newell A.C. Nonlinear tunneling // J. Math. Phys. 1978. Vol. 19, № 5. P. 1126-1133.

38. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
39. Benjamin T.B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems // Proc. R. Soc. Lond. A. 1967. Vol. 299, № 1456. P. 59-76.
40. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Пер. с англ. под ред. А.Б. Шабата. М.: Мир, 1988. 696 с.
41. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003.
42. Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulation instability: The beginning // Physica D. 2009. Vol. 238, № 5. P. 540–548.
43. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: URSS, 2021.
44. Рыскин Н.М. Колебания и волны в нелинейных активных средах. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2017.
45. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 5. С. 6-13.
46. Balyakin A. A., Ryskin N. M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2004. Vol. 7, № 1. P. 34-42.
47. Eggleton B.J., Martijn de Sterke C., Aceves A.B., Sipe J.E., Strasser T.A., Slusher R.E. Modulational instability and tunable multiple soliton generation in apodized fiber gratings // Opt. Commun. 1998. Vol. 149, № 4-6. P. 267-271.
48. Leon J., Spire A. Gap soliton formation by nonlinear supratransmission in bragg media // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 327, № 5-6. P. 474-480.
49. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
50. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
51. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Ленинград: Гидрометеиздат, 1982.
52. Lie S., Engel F. Theorie der transformationsgruppen (Bd. 1, 2, 3). Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.
53. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
54. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989.
55. Oliveri F. Lie symmetries of differential equations: classical results and recent contributions // Symmetry. 2010. Vol. 2, № 2. P. 658-706.
56. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

57. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. 10-е изд. М.: Наука, 1987.
58. Ryskin N.M. Lie symmetry analysis of electron–electromagnetic wave interaction under condition of the anomalous Doppler effect // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. Vol. 19, № 9. P. 2942-2950.
59. Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // *Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа–семинар инженеров)*. Кн. 5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 25-77.
60. Рыскин Н.М., Балякин А.А., Дмитриева Т.В. Нелинейная динамика распределенных систем: системы с запаздыванием, вакуумные микроволновые приборы, системы взаимодействующих нелинейных волн. М.: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
61. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
62. Цейтлин М.Б., Кац А.М. Лампа с бегущей волной. М.: Сов. радио, 1964.
63. Antonsen T.M., Safier P., Chernin D.P., Levush B. Stability of traveling-wave amplifiers with reflections // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2002. Vol. 30, № 3. P. 1089-1107.
64. Skribanowitz N., Herman I.P., MacGillivray J.C., Feld M.S. Observation of Dicke superradiance in optically pumped HF gas // *Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 30, № 8. P. 309-312.
65. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы. М.: Наука, 1988.
66. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах. *УФН.* 1989. Т. 159, №2. С. 193-260.
67. Меньшиков Л.И. Сверхизлучение и некоторые родственные явления // *УФН.* 1999. Т. 169, № 2. С. 113-154.
68. Вайнштейн Л.А., Клеев А.А. Кооперативное излучение электронов-осцилляторов // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311, №4. С. 862-866.
69. Кузнецов С.П. Нелинейная динамика лампы обратной волны: автомодуляция, мультистабильность, контроль // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 4. С. 3-35.
70. Bandurkin I.V., Savilov A.V. Super-radiant Cherenkov backward-wave oscillator with cyclotron absorption // *Appl. Phys. Lett.* 2011. Vol. 99, № 19. P. 193506.
71. Пегель И.В. Нестационарные процессы генерации сильнооточных электронных пучков и мощных импульсов электромагнитного излучения. Дисс. ... д.ф.-м.н. Томск, ИСЭ СО РАН, 2006.
72. Rostov V.V., Savilov A.V. Super-radiant backward-wave oscillators with enhanced power conversion // *Phys. Plasmas.* 2013, Vol. 20, № 2. P. 024501.

73. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987.
74. Гинзбург Н.С., Юровский Л.А., Назаровский А.В., Сергеев А.С., Зотова И.В. Генерация импульсов сверхизлучения терагерцового диапазона в процессе вынужденного рассеяния лазерного излучения на попутном сильноточном релятивистском электронном пучке // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 23. С. 8-12.
75. Гинзбург Н.С., Юровский Л.А., Зотова И.В., Сергеев А.С. Преобразование частоты излучения мощных гиротронов в условиях обратного рамановского рассеяния на дополнительном электронном пучке // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, № 4. С. 13-16.
76. Nusinovich G.S., Korol M., Jerby E. Theory of the anomalous Doppler cyclotron-resonance-maser amplifier with tapered parameters // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59, № 2. P. 2311-2321.
77. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Резонансные явления при движении частицы в плоской электромагнитной волне // ЖЭТФ. 1963. Т. 44, №1. С. 261-266.
78. LaPointe M.A., Yoder R.B., Wang C., Ganguly A.K., Hirshfield J.L. Experimental demonstration of high efficiency electron cyclotron autoresonance acceleration // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 15. P. 2718-2721.
79. Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И. Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 3. С. 930-934.
80. Kivshar Y.S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications // Phys. Rep. 1998. Vol. 298, № 2-3. P. 81-197.
81. Agrawal G.P. Nonlinear fiber optics. 6<sup>th</sup> ed. USA: Academic Press, 2019.
82. Ablowitz M.J. Nonlinear dispersive waves: Asymptotic analysis and solitons. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
83. Kalithasan B., Porsezian K., Tchofo Dinda P., Malomed B.A. Modulational instability and generation of self-induced transparency solitons in resonant optical fibers // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2009. Vol. 11. P. 045205.
84. Заболотский А. А. Плазмон-поляритонная самоиндуцированная прозрачность // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91, № 10. С. 551–555.
85. Ginzburg N.S., Yurovskiy L.A., Sergeev A.S., Zotova I.V., Malkin A.M. Formation of microwave frequency-chirped solitons of self-induced transparency under conditions of cyclotron resonance absorption // Phys. Rev. E. 2021. Vol. 104, № 3. P. 034218.
86. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
87. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.

88. Taverner D., Broderick N.G.R., Richardson D.J., Laming R.I., Ibsen M. Nonlinear self-switching and multiple gap-soliton formation in a fiber Bragg grating // *Opt. Lett.* 1998. Vol. 23, № 5. P. 328-330.
89. Pelinovsky D., Sargent E.H. Stable all-optical limiting in nonlinear periodic structures. II. Computations // *J. Opt. Soc. Am.* 2002. Vol. 19, № 8. P. 1873-1889.
90. CST Studio Suite Electromagnetic Field Simulation Software, Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, France, 2020. [Online]. Available: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/cst-studio-suite>
91. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Об автомодельном характере генерации импульсов сверхизлучения в электронно-волновом генераторе обратной волны // *ЖЭТФ.* 2018. Т. 154, № 4 (10). С. 691–697.
92. Rostuntsova A.A., Ryskin N.M., Ginzburg N.S. Self-similar amplification and self-compression of short microwave pulses during Cherenkov-type interaction with relativistic electron beams // *Phys. Plasmas.* 2020. Vol. 27, № 5. P. 053108.
93. Sergeev A.S., Yurovskiy L.A., Ginzburg N.S., Zotova I.V., Zheleznov I.V., Rozental R.M., Rostuntsova A.A., Ryskin N.M. Entrainment, stopping, and transmission of microwave solitons of self-induced transparency in counter-propagating magnetized electron beam // *Chaos.* 2022. Vol. 32, № 5. P. 053123.
94. Rostuntsova A. A., Ryskin N. M., Zotova I. V., Ginzburg N.S. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption // *Phys. Rev. E.* 2022. Vol. 106, № 1. P. 014214.
95. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2023. Т. 31, №5. С. 597-609.
96. Rostuntsova A.A., Ryskin N.M., Ginzburg N.S. Self-similar analysis of short pulse amplification and generation in Cherenkov-type devices // 2019 International Vacuum Electronics Conference (IVEC). Busan, South Korea, April 28–May 1, 2019. P. 1-2.
97. Rostuntsova A.A., Ryskin N.M., Ginzburg N.S., Zotova I.V., Fedotov A.E., Zheleznov I.V. Formation of microwave soliton trains due to modulation instability under cyclotron resonance interaction of an initially rectilinear electron beam with a backward electromagnetic wave // 2021 22nd International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 27-30 April 2021. P. 1-2.
98. Rostuntsova A.A., Ryskin N.M. Interaction of an electromagnetic wave with a counter-propagating electron beam under the condition of cyclotron resonance absorption: nonlinear

- periodic waves, modulation instability, and generation of solitons // 2022 23rd International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 25-29 April 2022. Monterey CA, USA. P. 292-293.
99. Rostuntsova A.A., Ryskin N.M. 3-D Particle-in-Cell Simulation of an Electromagnetic Wave Cyclotron Resonance Interaction with a Counterpropagating Electron Beam // 2024 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE'2024). Materials of the International Scientific and Technical Conference. Saratov State Technical University, September 26-27, 2024. Saratov, Russia. P. 29-32.
  100. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Об автомодельном характере генерации коротких импульсов в лампе обратной волны // Материалы XVII международной зимней школы-семинара по радиофизике и электронике сверхвысоких частот. 05-10 февраля 2018 г. Саратов. С. 97.
  101. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Автомодельные режимы усиления и генерации коротких импульсов электронными потоками // Материалы XII Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019, Саратов. Саратов: ООО «Издательский центр «Наука». С. 42.
  102. Ростунцова А.А. Автомодельные режимы усиления и компрессии коротких импульсов в приборах черенковского типа // «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика»: сборник трудов XIV Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2019. С. 210-211.
  103. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Анализ автомодельных процессов усиления и генерации импульсов в приборах черенковского типа // Нелинейные волны – 2020. XIX научная школа. 29 февраля – 6 марта 2020 года, Нижний Новгород. Тезисы докладов. Ниж. Новгород: ИПФ РАН. С. 206-207.
  104. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Исследование модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным электронным пучком // «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика»: тез. докл. XV Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2020. С. 216-217.
  105. Rostuntsova A.A., Ginzburg N.S., Ryskin N.M. Self-similar character of short pulse amplification and generation by rectilinear electron beams // 2020 IEEE International Conference on Plasma Science (ICOPS). 6-10 Dec. 2020.
  106. Rostuntsova A.A., Ginzburg N.S., Zotova I.V., Fedotov A.E., Rozental R.M., Zheleznov I.V., Zaslavsky V.Yu., Ryskin N.M. Formation of microwave solitons trains due to modulation instability under cyclotron resonance interaction of initially rectilinear electron beam with backward electromagnetic wave // 2020 IEEE International Conference on Plasma Science (ICOPS). 6-10 Dec. 2020.

107. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Формирование солитонов самоиндуцированной прозрачности в потоке циклотронных электронов-осцилляторов при возбуждении непрерывным сигналом // В сб. Нелинейные дни в Саратове для молодых. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2021. Вып. 29: Материалы XXIX Всероссийской научной конференции, 26–29 апреля 2021. С. 86-87.
108. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Модуляционная неустойчивость и формирование солитонов самоиндуцированной прозрачности в потоке циклотронных электронов осцилляторов при возбуждении непрерывным сигналом // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: тез. докл. XVI Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2021. С. 155-156.
109. Ростунцова А.А., Торгашов Р.А., Рыскин Н.М. 3D PIC моделирование распространения электромагнитной волны при взаимодействии со встречным прямолинейным потоком электронов в условиях циклотронного резонанса // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: Докл. XVII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2022. С. 165-166.
110. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Взаимодействие электромагнитной волны со встречным пучком электронов в условиях циклотронного резонанса: нелинейные волны, модуляционная неустойчивость и генерация солитонов // Нелинейные волны–2022. XX Научная школа. Тезисы докладов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 7–13 ноября 2022 г. С. 218-219.
111. Ростунцова А.А. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов // Нелинейные дни в Саратове для молодых: сборник научных трудов. Саратов: Изд-во СГУ, 2023. 162 с. Вып. 17: материалы XXX Всероссийской научной конференции, 15–19 мая 2023, Саратов. С. 73-74.
112. Ростунцова А.А., Рыскин Н.М. Генерация солитонных частотных гребенок в процессе нелинейного циклотронно-резонансного взаимодействия электромагнитной волны со встречным потоком электронов // Нелинейные волны–2024. XXI Научная школа. Тезисы докладов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 5–11 ноября 2024 г. С. 205-206.
113. Ростунцова А.А. Автомодельный характер генерации импульсов сверхизлучения в лазерах на свободных электронах с электромагнитной накачкой // «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: Докл. XIX Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2024. С. 99-100.