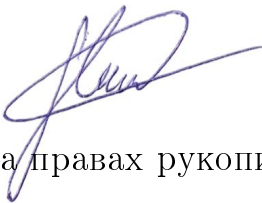


САРАТОВСКИЙ ФИЛИАЛ ФГБУН «ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И
ЭЛЕКТРОНИКИ ИМ. В.А. КОТЕЛЬНИКОВА» РАН



На правах рукописи

Любченко Дмитрий Олегович

**СЛОЖНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ, ОТВЕЧАЮЩИЕ
КОНЦЕПЦИИ ГРУБОСТИ И КОНЦЕПЦИИ ХРУПКОСТИ, В
ПРИЛОЖЕНИИ ДЛЯ СРЕДСТВ КОММУНИКАЦИИ**

1.3.4. — Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук

доцент Исаева О. Б.

Саратов — 2025

Оглавление

Введение	4
1 Основанная на синхронизации коммуникация при помощи однонаправленно связанных генераторов грубых режимов гиперболического хаоса и генераторов со странной нехаоти- ческой динамикой в случае неидентичных по параметрам передатчика и приемника	18
1.1 Базовые модели	23
1.2 Схемы коммуникации на базе генераторов грубых режимов	31
1.3 Демонстрация коммуникации	33
1.4 Коммуникация при расстройках параметров	34
1.5 Альтернативный метод детектирования информации	35
1.6 Влияние информационного сигнала на режим генерации . .	37
1.7 Выводы к Главе 1	43
2 Исследование локальных во времени статистических зако- номерностей характеристик режимов обобщенной синхро- низации однонаправленно связанных грубых генераторов в условиях расстройки по параметрам и при частотных поте- рях в канале связи	46
2.1 Суть исследования и описание методик анализа	49
2.2 Режимы синхронизации в условиях расстройки по параметрам	53
2.3 Устойчивость режимов генератора-приёмника в условиях рас- стройки по параметрам	57
2.4 Статистические закономерности локальных характеристик свя- занных систем в условиях расстройки по параметрам	58
2.5 Моделирование частотных потерь в канале связи	65
2.6 Режимы синхронизации в условиях частотных искажений .	66

2.7	Устойчивость режимов генератора-приёмника в условиях частотных искажений	71
2.8	Статистические закономерности локальных характеристик связанных систем в условиях частотных искажений	73
2.9	Выводы к Главе 2	76
3	Построение и анализ математических моделей динамики бильярда с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей	78
3.1	Вывод уравнений бильярда	80
3.2	Динамика бильярда в консервативном случае	86
3.3	Ускорение Ферми	90
3.4	Динамика слабо диссипативного бильярда	99
3.5	Приближенные модели бильярда	103
3.6	Выводы к Главе 3	112
4	Экстремальная мультистабильность и схема коммуникации на ее основе в приближенной модели бильярда с геометрией типа волновода с гофрированной осциллирующей границей	114
4.1	Модельная система	117
4.2	Методы анализа	119
4.3	Разнообразие динамических режимов	121
4.4	Хаотическая экстремальная мультистабильность	124
4.5	Коммуникация	137
4.6	Выводы к Главе 4	142
	Заключение	144
	Список используемых источников	147

Введение

Актуальность работы

Динамические системы со сложным и хаотическим поведением обладают значительным потенциалом для технических приложений. К ним относятся генерация псевдослучайных чисел [1–5], криптографическое шифрование информации [6–8], создание шумотронов для средств радио-электронного противодействия, радаров и сонаров [9–13], а также конфиденциальная и широкополосная коммуникация [14–18]. При непосредственном использовании генераторов сложной динамики в устройствах для перечисленных приложений важно, чтобы их динамика не меняла критически свойств при возникновении возмущений, параметрических расстройек и воздействия шума [19–21]. Поиск таких систем, называемых грубыми или робустными, как показывает развитие науки за последние 100 лет, является довольно нетривиальной задачей.

Понятие грубости было впервые введено ещё в 1937 году Андроновым и Понтрягиным в докладе [22] и более подробно изложено на примерах в книге [23]. Все эти примеры, однако, касались низкоразмерных автономных систем, не допускающих сложной динамики. Последующее развитие науки – открытие в системах большей размерности возможности хаотического поведения положило начало обширной программе исследований [24].

В 1960-70-е годы в фундаментальной математике введены понятия равномерно гиперболического аттрактора для диссипативных систем и гиперболического инвариантного множества с динамикой Аносова в консервативных системах [25–27]. Именно к подобным, гиперболическим и, при том, хаотическим объектам в фазовом пространстве динамических систем было приковано внимание, обусловленное доказательством их структурной устойчивости и грубости [28]. Казалось, что эта «невыврожденность» ги-

перболических хаотических множеств должна обеспечить высокую вероятность наблюдения их во всевозможных физических системах. Однако, долгое время единственными примерами сложных множеств гиперболического типа являлись лишь искусственные геометрические конструкции: соленоид Смейла-Вильямса, аттрактор Плыкина, DA (derived from Anosov) аттрактор [29, 30].

Многочисленный перечень физически реализуемых, натуралистичных и реальных хаотических систем пополнялся до недавнего времени лишь структурно неустойчивыми обладателями негрубых свойств. К ним иногда применяют введенное в противовес понятие хрупкости, имеющее смысл недолговечности реализующегося в них динамического режима, когда среднее время его существования зависит от точности задания значений управляющих параметров [31–33]. В контексте хаотической динамики проявление её находит выражение в концепции квазиаттрактора [34–36]. Если хаотический аттрактор гиперболического типа представляет собой множество вложенных в него всевозможных траекторий, являющихся невырожденными гиперболическими с трансверсально пересекающимися устойчивым и неустойчивым многообразиями одинаковой размерности, то у хрупкого квазиаттрактора хаотические траектории реализуются совместно с регулярными притягивающими множествами или же такие появляются при сколь угодно малой вариации параметров или функций, задающих систему.

Предложенный в 2005 г. С.П. Кузнецовым метод манипулирования фазами автоколебательных систем позволил получить динамику искусственной математической модели, существовавшей ранее лишь в виде отображения, в реалистичной физической системе [37]. Речь идет об отображении, аттрактором которого является соленоид Смейла-Вильямса. В последующих работах метод был развит и позволил реализовать этот и ряд других

ассоциирующихся с гиперболической динамикой математических артефактов на базе систем электроники и механики, разработать схемотехнические решения и экспериментальные устройства для них [29, 30].

В ряду грубых аттракторов со сложной динамикой, помимо хаотических гиперболических, кроме того, выделяется класс странных нехаотических аттракторов. В частности, аттрактор Ханта-Отта представляет собой пример устойчивого к параметрическим вариациям странного нехаотического аттрактора в классе систем с квазипериодическим воздействием. Несмотря на нехаотический характер, аттрактор обладает фрактальной структурой и, следовательно, сложной динамикой. Впервые описанный в работах [38, 39] на примере динамики двумерного отображения на торе, в дальнейшем он был найден и в специальном образом устроенных непрерывных потоковых системах. Первый пример таковых, работающий по принципу манипулирования фазами автоколебаний связанных систем, представлен в работе А.Ю. Жалнина и С.П. Кузнецова [40], последующие примеры и физические реализации в виде радиотехнических схем – в работах [41–43]. Помимо хаотических аттракторов гиперболического типа грубые странные нехаотические аттракторы расширяют класс режимов, удобных для практических реализаций.

Наряду с исследованием грубых систем активно изучаются и хрупкие режимы динамики. В ряде работ выявлено фундаментальное и чрезмерно хрупкое явление – экстремальная мультистабильность, при которой в фазовом пространстве динамической системы сосуществует бесконечное множество притягивающих множеств. Термин «экстремальная мультистабильность» был введён в работе [44], хотя в литературе также используются альтернативные обозначения – «мегастабильность» [45] и «гипермультистабильность» [46]. Системы с экстремальной мультистабильностью являются примером чрезмерно хрупких систем – структура аттракторов нарушается

не только при варьировании параметров, но и при минимальных изменениях начальных условий. Это явление представляет интерес для задач криптографии [46–51] и защищённой связи [52, 53], поскольку наличие большого числа устойчивых состояний позволяет формировать новые принципы кодирования и сокрытия информации. Такой подход открывает перспективы построения каналов с высокой криптостойкостью, хотя одновременно накладывает жёсткие ограничения на точность совпадения параметров систем и на управление начальными условиями.

Таким образом, одновременное изучение грубости и хрупкости динамических режимов имеет как прикладную, так и теоретическую значимость. С одной стороны, грубые гиперболические генераторы обещают простые и устойчивые к расстройкам схемы синхронизации и передачи аналоговой информации. С другой стороны, хрупкие системы с экстремальной мультистабильностью предлагают новые возможности для защищённой связи.

Цель работы

Исследование особенностей динамических и статистических закономерностей, присущих сложным режимам поведения систем, обладающих свойством грубости, и систем, обладающих свойством хрупкости, и применения их для средств коммуникации.

Основные задачи

1. Провести сравнительный анализ эффективности и устойчивости основанных на синхронизации схем скрытой коммуникации при использовании в качестве передающей и принимающей подсистем грубых генераторов сложных сигналов и негрубых генераторов хаоса негиперболического типа.
2. Найти подтверждения преимуществ применения грубых генераторов по сравнению с негрубыми в системах передачи информации в условиях неидентичности передатчика и приемника и в присутствии спек-

тральных помех в канале связи посредством исследования однородности локальных во времени статистических характеристик режимов обобщенной синхронизации.

3. Построить иерархию приближенных математических моделей для билльярда с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей, исследовать режимы консервативного и диссипативного хаоса в них. Выявить упрощенную приближенную модель, сохраняющую в своей динамике основной присущий полной модели феномен, а именно, разделение режимов медленного и быстрого ускорения Ферми, и обладающую подходящим типом симметрии для возможности наблюдения в ней эффекта экстремальной мультистабильности.
4. Разработать метод хаотической коммуникации на основе систем с экстремальной мультистабильностью, обеспечивающий скрытность передачи данных за счёт формирования бесконечного множества хаотических притягивающих множеств, и исследовать условия их синхронизации.

Методы исследований

В первой и второй главах использовался широко апробированный метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений – метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Для выявления специфических свойств исследуемых динамических режимов применялись методы расчёта спектра показателей Ляпунова, построения фазовых портретов и анализа спектральных плотностей мощности. Исследование синхронизации проводилось с помощью расчёта старшего условного показателя Ляпунова и анализа локальной корреляции, вычисленной в скользящем временном окне. В третьей главе, наряду с анализом индивидуальных траекторий,

был применен разработанный метод статистического анализа для исследования закономерностей в поведении средней по ансамблю скорости частиц. В четвертой главе использовались методы построения карт старшего показателя Ляпунова и якобиана, вычисленного вдоль траектории, а также стандартный метод анализа поиска полной синхронизации в связанных системах.

Достоверность полученных результатов подтверждается согласованностью данных, полученных различными численными методами, их воспроизводимостью при изменении параметров моделирования, а также соответствием фундаментальным теоретическим представлениям о грубой и хрупкой динамике.

Научная новизна работы, отраженной в публикациях [A1–A28], заключается в следующем.

1. В работе предложен новый подход к классификации и выбору генераторов сложных сигналов для прикладных задач на основе противопоставления двух фундаментальных концепций – грубости и хрупкости – демонстрируя их преимущества и недостатки в контексте задач коммуникации.
2. Разработаны и впервые исследованы схемы скрытой коммуникации, в которых в качестве передатчика и приемника используются генераторы грубых режимов динамики – гиперболического хаоса, ассоциированного с аттрактором типа Смейла-Вильямса, и странной нехаотической динамики, ассоциированной с аттрактором типа Ханта-Отта. Показано, что применение таких систем позволяет эффективно решать фундаментальную проблему – невозможности достижения полной идентичности приёмника и передатчика, обеспечивая устойчивое декодирование информации даже в условиях значительного (до 5%) несовпадения параметров передающей и принимающей подсистем, что

недостижимо для схем на основе негрубого хаоса. Предложен и апробирован альтернативный метод детектирования, основанный на расчёте локальной во времени корреляции, эффективность которого обусловлена свойством однородности локальных статистических характеристик грубых систем [A1, A2, A5, A12–A16, A18].

3. Впервые проведено комплексное исследование статистических характеристик режимов обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах грубых сигналов не только в условиях расстройки передающей и принимающей подсистем по параметрам, но и при наличии частотных искажений в канале связи. Установлено и количественно охарактеризовано ключевое преимущество грубых систем: сохранение однородности локальных статистических характеристик при указанных возмущениях, что подтверждает выдвинутую гипотезу [A4, A7].
4. Построена иерархия приближенных математических моделей консервативного и диссипативного бильярда с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей. Впервые для ансамбля частиц в такой системе установлено существование двух качественно различных режимов ускорения Ферми – медленного и быстрого (неограниченного), которые реализуются при значениях начальной скорости ниже и выше критического значения соответственно. Предложена упрощенная приближенная модель бильярда на основе однонаправленно связанных модифицированного отображения Ферми Паста-Улама и отображения Теннисона-Либермана-Лихтенберга, которая демонстрирует аналогичный эффект [A3, A17, A19–A28].
5. Предложен новый метод организации скрытой коммуникации, основанный на явлении экстремальной мультистабильности, возникающем

в моделях в виде диссипативной подсистемы под управлением гамильтоновой. Установлены диапазоны параметров и начальных условий для реализации явления хаотической экстремальной мультистабильности, то есть сосуществования бесконечного числа хаотических притягивающих множеств в фазовом пространстве системы. Впервые для систем данного класса разработана и проанализирована двухканальная схема связи, в которой по скрытому каналу передается управляющее воздействие, определяющее выбор одного из континуума хаотических аттракторов, а по открытому – синхронизирующий хаотический сигнал [А6, А8–А11].

Основные научные положения, выносимые на защиту

1. В случае принадлежности к классу грубых систем генераторов сложных сигналов, используемых в качестве передатчика и приемника в основанных на синхронизации схемах коммуникации, они могут обеспечить эффективное выделение информационного сигнала даже в условиях отсутствия полной синхронизации между передающей и принимающей подсистемами.
2. В режиме полной синхронизации и при переходе к обобщенной синхронизации в результате расстройки параметров или введения частотной полосы непропускания в канале связи однонаправленно связанных генераторов Кузнецова или генераторов Жалнина-Кузнецова при условии генерации ими грубой динамики локальная корреляция между передатчиком и приёмником, вычисленная в скользящем окне, остается однородной при наличии несущей частоты в сигнале, получаемом приёмником, совпадающей с основной частотой генерации приёмника.
3. Особенностью динамики модели консервативного бильярда с геометрией типа волновода с одной гладкой и одной гофрированной осцил-

лирующей границей является возникновение двух режимов ускорения Ферми. Скорости частиц в ансамбле стремятся с течением времени к общей быстро или медленно возрастающей скорости в зависимости от того, превышает или не превышает их начальная скорость некоторое критическое значение.

4. В упрощенной системе, представляющей собой модель бильярда с геометрией типа волновода с одной гладкой и одной гофрированной осциллирующей границей в приближении малой амплитуды и скорости этих осцилляций, возможна реализация экстремальной мультистабильности бесконечного числа хаотических притягивающих множеств. Это позволяет организовать скрытую коммуникацию на основе хаотической синхронизации с повышением уровня скрытности за счёт динамического переключения передатчика между этими множествами.

Научная и практическая значимость работы.

Разработанные в работе схемы связи на базе генераторов грубых режимов представляют собой готовое к экспериментальной реализации решение для задач широкополосной коммуникации, устойчивое к неизбежным в реальных условиях расстройкам приемника и передатчика по параметрам. Результаты, полученные при исследовании синхронизации между передатчиком и приемником, вносят значительный вклад в построение теории обобщенной синхронизации грубых систем, демонстрируя подход к исследованию закономерностей в поведении локальных во времени статистических характеристик. Значимым теоретическим результатом является обнаружение и анализ существования двух качественно различных режимов ускорения Ферми – быстрого (классического) и медленного, что вносит вклад в понимание механизмов замедления ускорения Ферми. Предложенная новая схема связи на основе экстремальной мультистабильности в диссипативных системах, находящихся под управлением гамильтоновых,

задает новое направление в разработке систем защиты информации с повышенным уровнем скрытности за счет динамического переключения между хаотическими множествами.

Личный вклад автора

Все защищаемые результаты и положения, вошедшие в настоящую диссертационную работу, получены соискателем лично. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов осуществлялись совместно с научным руководителем, а также с соавтором опубликованных работ к.ф.-м.н. Савиным А.В.

Апробация работы и публикации

Результаты диссертационной работы были доложены на следующих международных и всероссийских конференциях и конкурсах:

- International Conference-School Shilnikov Workshop, г. Нижний Новгород, 2021, 2023, 2024 гг.
- International Conference Topological Methods in Dynamics and Related Topics, г. Нижний Новгород, 2020 г.
- International Conference Saratov Fall Meeting, г. Саратов, 2020, 2022 гг.
- Международная конференция «Новые информационные технологии в телекоммуникациях и почтовой связи», Республика Беларусь, г. Минск, 2023
- Балтийский форум: нейронаука, искусственный интеллект и сложные системы, г. Калининград, 2024.
- Международная конференция «Ломоносов», МГУ, г. Москва, 2023 г.
- Международная конференция «Математическое Моделирование и Суперкомпьютерные Технологии» , г. Нижний Новгород, 2022 г.

- Международная научная школа "Нелинейные волны" г. Нижний Новгород, 2022 г.
- Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур», г. Саратов, 2019 г.
- Всероссийская научная конференция «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», СФИРЭ РАН, г. Саратов, 2019-2022, 2024 гг.
- Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», СГУ, г. Саратов, 2018-2021, 2023, 2025 гг.
- 19-й, 20-й и 21-й Молодежный конкурс имени Ивана В. Анисимкина, ИРЭ РАН, г. Москва, 2023, 2024, 2025 гг.
- Студенческая научная конференция института физики СГУ 2022 г.
- Студенческая научная конференция факультета нелинейных процессов СГУ 2019 г.

Материалы также докладывались на заседаниях Ученого совета СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Результаты работы были получены в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (FFWZ-2025-0016), а также проекта Российского научного фонда № 21-12-00121.

Выступление на конференции «Ломоносов» (МГУ, Москва, 2023) было удостоено грамоты за лучший доклад. Доклад на конференции «Новые информационные технологии в телекоммуникациях и почтовой связи» (Республика Беларусь, г. Минск, 2023) был удостоен диплома I степени.

По материалам диссертации опубликовано 28 работ, из которых 5 статей в реферируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России для опубликования основных научных результатов диссертации.

ции на соискание ученой степени доктора и кандидата наук или индексируемых в реферативных базах данных и системах цитирования Web of Science и/или Scopus [A1–A5], 2 статьи в сборниках международных конференций, индексируемых в базах данных Web of Science и/или Scopus [A6, A7], 21 работа в сборниках трудов всероссийских и международных конференций [A8–A28].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Диссертация содержит 172 страницы текста, включая 66 рисунков, 2 таблицы и список литературы из 196 наименований на 25 страницах.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, научно-практическая значимость и достоверность полученных результатов, сформулированы цель и задачи диссертации, указаны методы исследования, её научная новизна, приведены основные положения, выносимые на защиту, научно-практическая значимость работы, сведения об апробации работы и публикациях автора.

В **первой главе** диссертации решается фундаментальная проблема хаотической коммуникации – нарушение полной синхронизации между передатчиком и приемником из-за неизбежной в реальных условиях их расстройки по параметрам. В качестве решения предложено использовать генераторы, обладающие свойством структурной устойчивости (грубости). На примере грубых генераторов гиперболического хаоса и странной нехаотической динамики разработаны и проанализированы схемы связи, основанные на нелинейном подмешивании информационного сигнала. Численное моделирование передачи графического изображения при расстройке параметров амплитуды показало, что в случае грубых генераторов информация восстанавливается с существенно большей точностью, чем при использовании негрубых аналогов. На основе гипотезы об однородности ло-

кальных статистических характеристик таких систем предложен и успешно апробирован альтернативный метод расшифровки, показавший свою эффективность именно для грубых систем и неработоспособность для негрубых.

Во **второй главе** проводится поиск подтверждения гипотезы об однородности локальных статистических характеристик, выдвинутой в первой главе. Изучены статистические закономерности локальных во времени характеристик режимов обобщенной синхронизации в условиях не только расстройек по параметру, но и частотных искажений в канале связи. Установлено, что системы на основе грубых аттракторов демонстрируют высокую устойчивость и сохраняют однородность таких локальных во времени характеристик, как значения старшего условного показателя Ляпунова и корреляции между передатчиком и приёмником, что подтверждает выдвинутую гипотезу. В отличие от них, системы с негрубым хаосом характеризуются перемежающимся характером синхронизации, проявляющимся в появлении положительных значений локального старшего условного показателя, и всплесковым поведением локальной корреляции.

Третья глава посвящена построению и анализу математических моделей динамики частицы в бильярде с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей. Была разработана иерархия приближенных моделей, восходящая к выведенному общему отображению. В консервативном пределе обнаружено и исследовано два качественно различных режима ускорения Ферми – медленное и классическое быстрое, разделенные критическим значением начальной скорости частицы. В результате анализа была идентифицирована простая приближенная модель, воспроизводящая эффект, аналогичный «демону Максвелла»: в зависимости от начальной скорости траектории либо притягиваются к низкоскоростным аттракторам, либо ускоряются. Важнейшим результатом данной

главы стало выделение системы, демонстрирующей свойство хрупкости, что закладывает основу для последующего прикладного использования.

В **четвертой главе** на основе приближенной модели, полученной в третьей главе и обладающей свойством хрупкости, разработана и проанализирована новая схема скрытой коммуникации. Под хрупкостью в данном контексте понимается явление экстремальной мультистабильности, проявляющаяся в сосуществовании бесконечного количества притягивающих множеств в фазовом пространстве диссипативной системы под гамильтоновым управлением. Предложенный метод связи, основанный на этом явлении, использует два канала: скрытый, для передачи детерминирующего управляющего воздействия, и открытый, для передачи хаотического сигнала. Такая архитектура обеспечивает повышенную скрытность передачи за счёт возможности динамического переключения между аттракторами. В рамках главы проведён сравнительный анализ двух видов связи между передатчиком и приёмником, обеспечивающих полную синхронизацию, и выбран более оптимальный из них. Численное моделирование итоговой схемы коммуникации подтвердило её эффективность, продемонстрировав возможность удовлетворительного восстановления информационного сигнала.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

Глава I

Основанная на синхронизации коммуникация при помощи однаправленно связанных генераторов грубых режимов гиперболического хаоса и генераторов со странной нехаотической динамикой в случае неидентичных по параметрам передатчика и приемника

Современные методы широкополосной коммуникации хорошо развиты и широко используются на практике [54–56]. Однако они сталкиваются с рядом проблем, тесно связанных между собой:

1. Шум (как тепловой, так и импульсный) и интерференция сигналов ухудшают качество приёма;
2. Ограничения полосы пропускания, обусловленные дефицитом радиочастотного спектра;
3. Предсказуемые линейные сигналы уязвимы к перехвату и атакам злоумышленников, а переменчивость канала связи требует всё более сложных алгоритмов обработки и защиты информации.

Судя по последним работам, решение этих проблем активно ведётся [57–60]. Однако модифицирование существующих схем приводит к их значительному усложнению, что отрицательно сказывается на релевантности использования таких решений.

В качестве альтернативы предлагается использовать хаотические динамические системы, поскольку генерируемые ими хаотические сигналы обладают рядом характеристик, выгодно отличающих их от традиционных несущих [17, 61, 62]:

1. Хаотические колебания по определению покрывают очень широкую полосу частот, что потенциально повышает устойчивость схемы к ин-

терференции и узкополосным помехам, а значит – позволяет более эффективно использовать доступный спектр;

2. Апериодическая и непредсказуемая структура хаотических сигналов затрудняет их перехват и декодирование (для этого требуются специфические методы, например, реконструкция аттракторов [63]), что существенно повышает безопасность передачи по сравнению с традиционными схемами;
3. Хаотические генераторы легко реализуются в радио-, СВЧ- и оптическом диапазонах на основе относительно простых нелинейных элементов, что делает такие схемы перспективными для практической реализации.

Таким образом, применение хаотических носителей информации обладает потенциальными преимуществами по ширине полосы, помехозащищенности, безопасности и простоты реализации, что и обуславливает интерес к исследованию принципов таких коммуникационных схем. Однако следует отметить, что прямое количественное сравнение эффективности хаотических систем с традиционными методами коммуникации затруднено. Это связано со значительным разнообразием подходов к модуляции и демодуляции хаотических сигналов [17, 61, 62], а также с тем, что возможности и принципы построения таких систем связи изучены ещё не полностью. Практическая проверка указанных преимуществ остаётся важным предметом исследований.

В основе хаотической коммуникации лежит генератор хаоса, выполняющий роль передатчика. Существуют различные способы внедрения информационного сигнала в хаотический носитель, в результате чего на выходе формируется смесь информационного и хаотического сигналов. Также известны методы извлечения исходной информации из такого смешанно-

го сигнала. Расшифровка при помощи корреляционных методов, адаптивной фильтрации и других универсальных алгоритмов для сложных сигналов не требует знания точной модели генератора и обладает сравнительно высокой помехозащищённостью. Однако эти подходы не обеспечивают полной конфиденциальности, поскольку сторонний наблюдатель, имея доступ к передаваемому сигналу, потенциально может декодировать сообщение [64, 65].

Для обеспечения более высокой конфиденциальности используются методы, основанные на синхронизации хаотических систем. В таком случае приёмник синхронизируется с хаотическим сигналом, посылаемым передатчиком в канал связи. Полная синхронизация передатчика и приёмника достигается при полной их идентичности и при достаточной силе связи. В такой ситуации динамика переменных передатчика и приёмника становится тождественной [66]. После достижения синхронного состояния на приёмнике становится возможным детектировать информацию, содержащуюся в полученном из канала связи сигнале.

В схемах с синхронизацией традиционно выделяют несколько классических способов передачи информации [61, 62]. Среди них первый способ основан на аддитивном подмешивании (хаотическая маскировка) информационного сигнала к хаотической несущей генератора-передатчика. При полной синхронизации генератора-передатчика и генератора-приёмника расшифровка происходит обычным вычитанием. Данный способ прост в реализации, однако для его работы требуется информационный сигнал очень малой мощности, чтобы не разрушить синхронизацию между передатчиком и приёмником, поэтому он оказывается крайне чувствительным к шуму в канале связи.

Другой способ – применение параметрической модуляции: при совпадении параметров передатчика и приёмника наступает синхронизация, но

если поменять один из параметров передатчика, синхронизация разрушится. В таком случае можно детектировать символ «1» при наличии синхронизации и «0» при её отсутствии. Данный способ обладает высокой помехоустойчивостью, но способен передавать только цифровую информацию, что отрицательно сказывается на скорости передачи.

На фоне описанных выше способов наиболее эффективным представляется третий, основанный на нелинейном подмешивании информации к динамике генератора-передатчика [67–69]. Информационный сигнал вводится в уравнения генератора путём модификации нелинейного члена, и на выходе формируется сложная комбинация информационного и несущего сигналов. На приёмнике реализуется система, осуществляющая инверсное по отношению к передатчику преобразование, позволяющее детектировать информацию. В идеальных условиях информационный сигнал на выходе приёмника извлекается абсолютно точно.

Большое количество численных исследований продемонстрировало ряд преимуществ таких схем передачи информации [67, 70–73], однако при экспериментальной реализации [74] было обнаружено серьёзное ограничение таких схем: в отличие от математической модели, в реальных устройствах добиться абсолютной идентичности генератора-передатчика и генератора-приёмника представляется невозможным: всегда существуют погрешности компонентов схемы, температурные дрейфы, погрешности сборки и внешние возмущения. Даже незначительное изменение одного из параметров делает полную синхронизацию невозможной [17, 61, 75].

Для решения проблемы параметрической расстройки¹ были предложены различные способы: реализация генератора-приёмника и генератора-передатчика в виде цифровых схем [76]; использование усовершенствован-

¹Под параметрической расстройкой понимается неидентичность значений параметров передатчика и приёмника.

ных схем на основе параметрической модуляции [77, 78]; разработка систем автоматической подстройки параметров [79].

В настоящей главе будет предложен ещё один способ решения проблемы параметрической расстройки, основанный на использовании генераторов грубых режимов динамики, поскольку структурная устойчивость аттракторов, как можно предположить, должна обеспечивать устойчивую синхронизацию в условиях параметрических расстроек. По сравнению с перечисленными выше существующими решениями, такой подход прост в реализации, реализуем на базе аналоговых элементов и способен передавать аналоговый сигнал.

Реализация такого решения стала возможной благодаря развитию С.П. Кузнецовым и соавторами, начиная с 2005 года, большой коллекции физически реализуемых систем с грубой гиперболической динамикой (обзор многих из них представлен, например, в [80]). Для демонстрации подхода был выбран уже классический генератор Кузнецова, реализующий аттрактор Смейла-Вильямса [37]. Помимо гиперболических аттракторов свойством грубости могут обладать и другие динамические режимы, например, в классе систем с квазипериодическим воздействием структурно устойчивым является аттрактор Ханта-Отта, который демонстрирует странную динамику нехаотического типа. Жалниным и Кузнецовым была предложена система, схожая по структуре с генератором гиперболического хаоса, но реализующая аттрактор типа Ханта-Отта [40]; эта система также была выбрана для демонстрации универсальности подхода.

В настоящей главе будут продемонстрированы и проанализированы коммуникационные схемы на базе данных генераторов. Для демонстрации значительных преимуществ использования грубых режимов в сравнении с хаосом негиперболического типа в условиях параметрических расстроек будет численно смоделирована передача графического изображения. Ви-

зуальный контроль позволит провести качественный анализ успешности кодирования сигнала и его детектирования приёмником.

1.1 Базовые модели

Физически реализуемый генератор гиперболического хаоса впервые был предложен Кузнецовым в работе [37]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (A \cos \frac{\omega_0}{T} t - x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon y \sin \omega_0 t, \\ \ddot{y} - (-A \cos \frac{\omega_0}{T} t - y^2) \dot{y} + (2\omega_0)^2 y = \varepsilon x^2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Система состоит из двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с характерными частотами ω_0 и $2\omega_0$, x и y – переменные осцилляторов, ε – параметр связи. Параметры возбуждения осцилляторов колеблются в противофазе с одинаковой частотой ω_0/T , что вызывает попеременную генерацию x и y .

Режим гиперболического хаоса реализуется, в частности, при параметрах:

$$A = 8, \quad T = 6, \quad \varepsilon = 0.5, \quad \omega_0 = 2\pi. \quad (1.2)$$

На рис. 1.1*a* показаны временные реализации этих переменных при указанных параметрах.

Принцип функционирования системы (1.1) определяется описанным в [30, 40, 81] механизмом эстафетной передачи фазы, который работает следующим образом. Пусть генерация переменной x в полупериоде, отвечающем за возбуждение первого осциллятора, описывается выражением $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где φ – сдвиг фазы. Воздействие x на второй осциллятор $y \sim x^2 \sim -\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ происходит на резонансной для него второй гармонике с передачей удвоенной фазы. Обратное резонансное воздействие второго осциллятора на первый в полупериоде, отвечающем за возбуждение второго осциллятора и подавление первого $x \sim y \sin \omega_0 t \sim \sin(\omega_0 t + 2\varphi)$

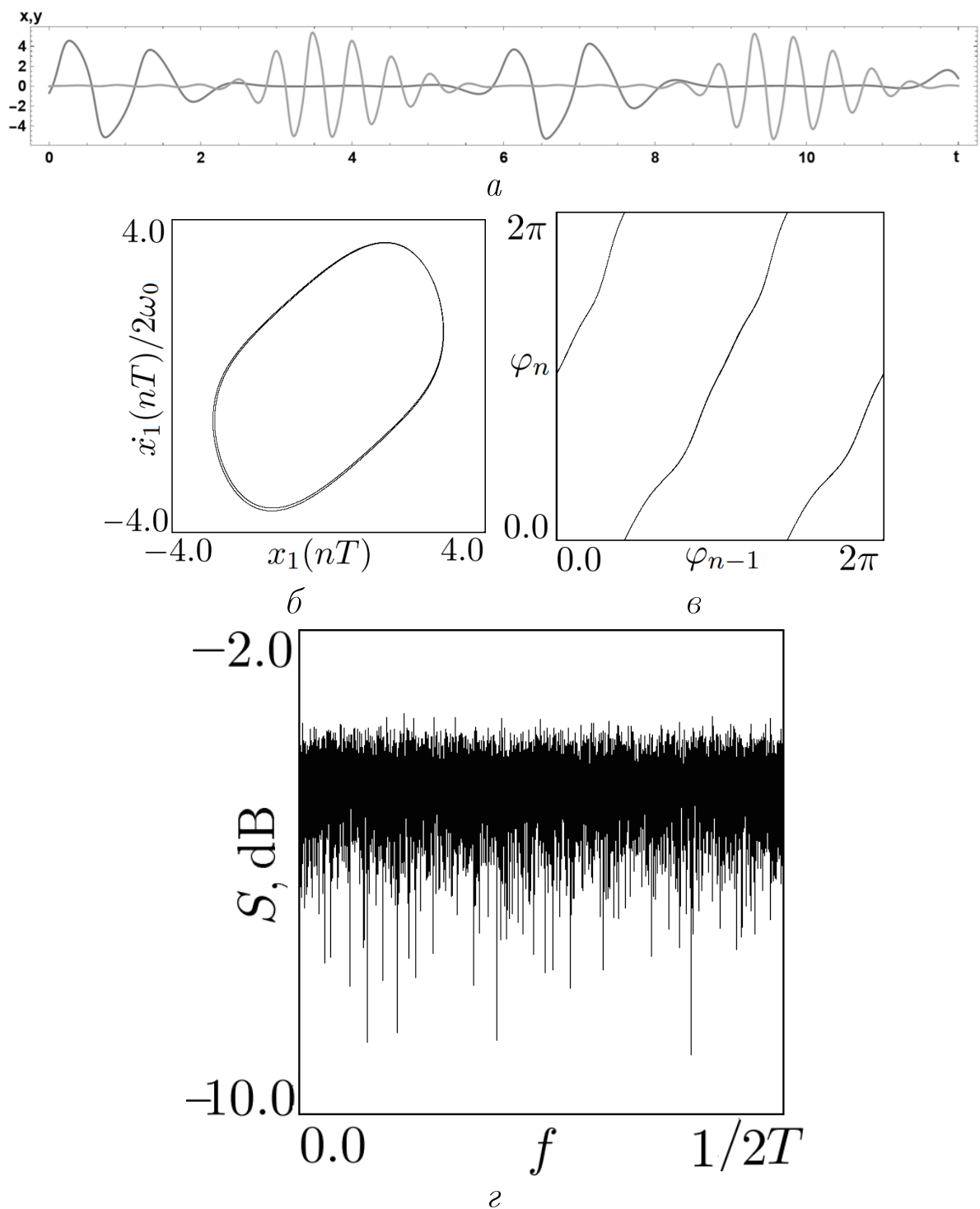


Рис. 1.1. Временные реализации переменных x и y (*a*); проекция гиперболического аттрактора на плоскость $(x, \dot{x})$ в стробоскопическом сечении с периодом T (*б*); итерационная диаграмма фазы переменной x (*в*); соответствующий спектр переменной x (*г*); генератора (1.1) при параметрах (1.2).

происходит на исходной гармонике с передачей удвоенной фазы. Следовательно, за полный цикл возбуждения и затухания фаза колебаний каждого отдельного осциллятора Ван-дер-Поля увеличивается вдвое. Подобная закономерность справедлива как для переменной x , так и для переменной y . Поведение фазы через каждый период генерации подчиняется отображению Бернулли:

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \mod 2\pi, \quad (1.3)$$

которое определяет развитую хаотическую динамику аттрактора гиперболического типа – соленоида Смейла-Вильямса.

Аттрактор именно такого типа реализуется у генератора Кузнецова в стробоскопическом сечении с периодом T . На плоскости $(x, \dot{x})$ наблюдаемая структура топологически эквивалентна соленоиду Смейла-Вильямса (рис. 1.1б). Итерационная диаграмма фазы колебаний первого осциллятора $\varphi = \arg(x + i\frac{\dot{x}}{\omega_0})$ показана на рис. 1.1в, на которой видно, что динамика фазы эквивалентна динамике отображения Бернулли.

Важным свойством гиперболического хаоса является шумоподобный широкополосный спектр [80], представленный на рис. 1.1г, что согласуется с экспериментальным исследованием данной системы [19].

При параметрах:

$$A = 3.79981, \quad T = 6, \quad \varepsilon = 0.5, \quad \omega_0 = 2\pi, \quad (1.4)$$

в описываемом генераторе (1.1) возможно возникновение хаотического аттрактора негиперболического типа. Из-за уменьшения параметра A временные реализации для негиперболического случая имеют меньшую амплитуду, чем для гиперболического (рис. 1.2а).

Проведём аналогичный анализ в стробоскопическом сечении с периодом T . На плоскости $(x, \dot{x})$ показан аттрактор, у которого не наблюдается структура соленоида Смейла-Вильямса (рис. 1.2б)². Итерационная диа-

²Структура негрубого хаотического аттрактора включает в себя устойчивые циклы с узким бассей-

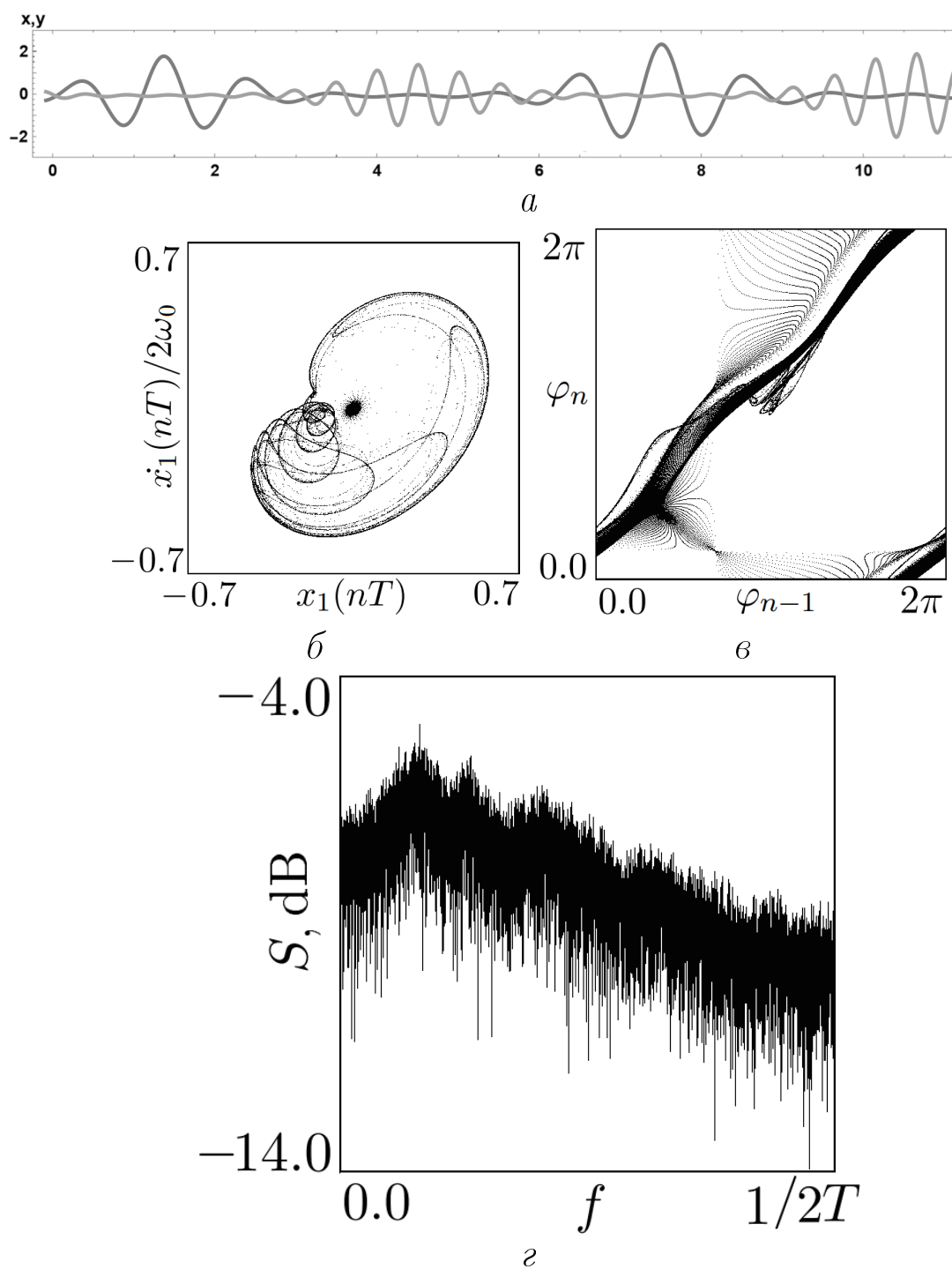


Рис. 1.2. Временные реализации переменных x и y (*a*); проекция хаотического аттрактора негиперболического типа на плоскость $(x, \dot{x})$ в стробоскопическом сечении с периодом T (*б*); итерационная диаграмма фазы переменной x (*в*); соответствующий спектр переменной x (*г*); генератора (1.1) при параметрах (1.4).

грамма фазы переменной x не демонстрирует динамику отображения Бернулли (рис. 1.2в), при этом спектр имеет широкополосный, но спадающий характер (рис. 1.2г). Согласно теории [82], спектр негрубого хаоса не обладает непрерывным континуумом частот; например, он может содержать бесконечное, но счётное количество гармоник. Наличие гиперболического и негиперболического типов генерации одной системы при разных настройках значений параметров даёт возможность провести сравнительный анализ коммуникационных схем на базе этого генератора в режимах грубого и негрубого хаоса.

Модификация генератора (1.1) путём добавления к нему квазипериодического воздействия позволяет трансформировать его в генератор странного нехаотического аттрактора Жалнина-Кузнецова, описанный в работе [40]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (A \cos \frac{\omega_0}{T} t - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon y \sin(\omega_0 t + \theta), \\ \ddot{y} - (-A \cos \frac{\omega_0}{T} t - y^2)\dot{y} + (2\omega_0)^2 y = \varepsilon x \sin \omega_0 t, \\ \dot{\theta} = \frac{\xi \omega_0}{T}, \end{cases} \quad (1.5)$$

где θ – переменная, отвечающая за квазипериодическое воздействие с частотой, несоизмеримой с ω_0 ;

$$\xi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (1.6)$$

– иррациональный параметр, обеспечивающий эту несоизмеримость. На рис. 1.3а показаны временные реализации этих переменных при параметрах (1.2). Стоит отметить, что параметры для первого генератора в режиме гиперболического хаоса и для второго генератора в режиме генерации

ном притяжения, в который можно попасть при длительном моделировании из-за накопления численных ошибок и ограничений машинной точности. В этой связи в центре рисунка наблюдается множество точек, отвечающих уходу траектории от хаотического множества и гибели хаотических колебаний по прошествии интервала времени $\sim 2 \times 10^6 T$. В дальнейшем будет использоваться период времени, не превышающий этого значения.

странного нехаотического аттрактора выбраны одинаковыми для максимального сходства между их реализациями.

Рассмотрим механизм эстафетной передачи фазы. Пусть переменная x совершает колебания с начальной фазой φ : $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Воздействие на второй осциллятор $x \sin \omega_0 t \sim -\cos(2\omega_0 t + \varphi)$ происходит на резонансной второй гармонике. В результате такого воздействия второй осциллятор унаследует фазу φ , плюс фазовый сдвиг k_0 , вызванный неидеальностью передачи. В результате $y \sim -\cos(2\omega_0 t + \varphi + k_0)$. Обратное воздействие на первый осциллятор $y \sin(\omega_0 t + \theta) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi - \theta + k_0)$ происходит на исходной частоте. Таким образом, фаза первого осциллятора за цикл генерации изменится: $\varphi' = \varphi - \theta + k_0 + k_1$, где k_1 – дополнительный фазовый сдвиг. Строго говоря, суммарный сдвиг $k_0 + k_1$ является функцией $\nu(\varphi, \theta)$. Такое поведение фазы, с точностью до переобозначений, совпадает с выражением для фазы в отображении Ханта-Отта:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n + \eta F(\varphi_n, \theta_n) & \text{mod } 2\pi, \\ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\xi & \text{mod } 2\pi. \end{cases} \quad (1.7)$$

Проанализируем аттрактор, полученный в стробоскопическом сечении с периодом T . На плоскости $(x, \dot{x})$ представлено сложно устроенное множество, характерное для странных нехаотических аттракторов (рис. 1.3б). Для выявления структуры аттрактора Ханта-Отта была построена диаграмма зависимости фазы переменной x от фазы внешнего воздействия θ (рис. 1.3в), на которой наблюдаются данные структуры. Спектр странного нехаотического аттрактора, согласно теоретическим результатам [83, 84], должен быть сингулярно-непрерывным – в континууме частот спектра отсутствует счётное множество гармоник. В рассматриваемом случае (рис. 1.3г) спектр выглядит как широкополосный, что согласуется с исследованием спектра в программной среде Multisim [41], поскольку не входящее в спектр счётное множество точек имеет нулевую меру Лебега.

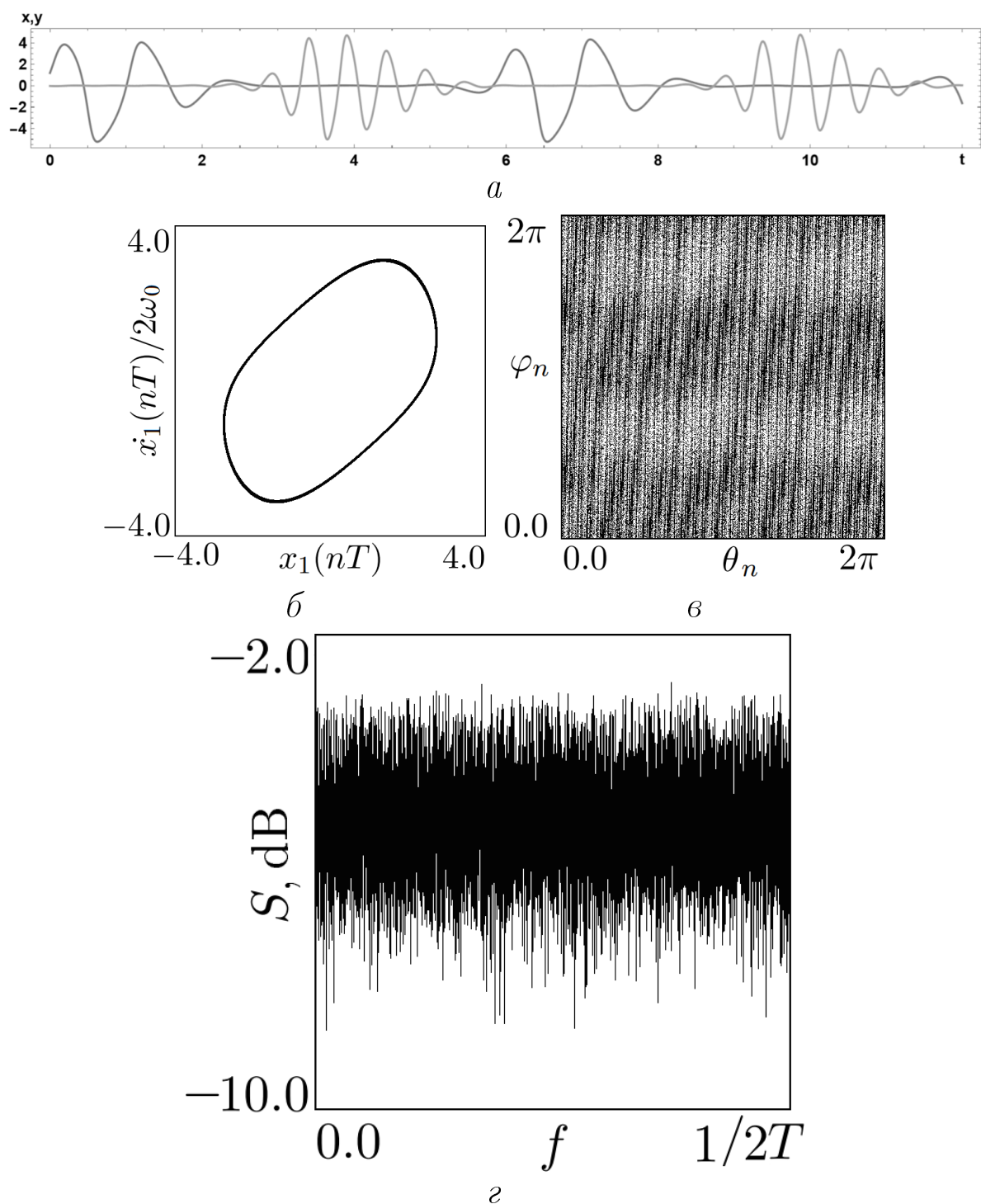


Рис. 1.3. Временные реализации переменных x и y (*a*); проекция странного нехаотического аттрактора на плоскость $(x, \dot{x})$ в стробоскопическом сечении с периодом T (*б*); итерационная диаграмма фаз θ и переменной x (*в*); соответствующий спектр переменной x (*г*); генератора (1.5) при параметрах (1.2) и (1.6).

Удобной демонстрацией и подтверждением специфических свойств используемых в работе динамических режимов, помимо показанных спектров мощности, может служить распределение величин локального старшего ляпуновского показателя.³

Для вычисления локальных значений старшего показателя Ляпунова λ_1 у рассматриваемых генераторов можно воспользоваться уравнениями в вариациях:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} - (A \cos \frac{\omega_0}{T}t - x^2)\dot{\tilde{x}} + 2x\dot{x}\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x} = \varepsilon\tilde{y} \sin \omega_0 t, \\ \ddot{\tilde{y}} - (-A \cos \frac{\omega_0}{T}t - y^2)\dot{\tilde{y}} + 2y\dot{y}\tilde{y} + (2\omega_0)^2\tilde{y} = 2\varepsilon x\tilde{x}; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} - (A \cos \frac{\omega_0}{T}t - x^2)\dot{\tilde{x}} + 2x\dot{x}\tilde{x} + \omega_0^2\tilde{x} = \varepsilon\tilde{y} \sin (\omega_0 t + \frac{\xi\omega_0}{T}t), \\ \ddot{\tilde{y}} - (-A \cos \frac{\omega_0}{T}t - y^2)\dot{\tilde{y}} + 2y\dot{y}\tilde{y} + (2\omega_0)^2\tilde{y} = \varepsilon\tilde{x} \sin \omega_0 t. \end{cases} \quad (1.9)$$

Системам (1.1) и (1.5) соответствуют системы уравнений в вариациях (1.8) и (1.9).

Для получения распределений локальных показателей Ляпунова λ_1^i использовался алгоритм Бенеттина [85]:

1. В начальный момент времени $t = 0$ для точки, принадлежащей типичной траектории на аттракторе, выбирается начальный вектор возмущений $\mathbf{l}_0'$ единичной длины ($\|\mathbf{l}_0'\| = 1$).
2. На протяжении времени τ совместно решаются (1.1) и (1.8) (или (1.5) и (1.9) в зависимости от анализируемого генератора).
3. В конце интервала $(t, t + \tau)$ вычисляется локальное значение показателя Ляпунова $\lambda_1^i = \ln \|\mathbf{l}_i\|$, где вектор возмущений $\mathbf{l}_i = \{\tilde{x}(t + \tau), \dot{\tilde{x}}(t + \tau)/\omega_0, \tilde{y}(t + \tau), \dot{\tilde{y}}(t + \tau)/(2\omega_0)\}$.

³Под распределением подразумевается плотность вероятности – функция, характеризующая сравнительную вероятность реализации тех или иных значений локального показателя Ляпунова.

4. Вектор возмущений нормируется: $\mathbf{l}_i' = \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|}$. Этот нормированный вектор используется как начальное условие для уравнений в вариациях для вычислений на следующем интервале.

Процедура (шаги 2-4) повторяется N раз для установившейся траектории на аттракторе, что даёт набор из N значений λ_1^i , и по этому набору строится гистограмма (оценка плотности вероятности). Полный старший показатель Ляпунова Λ_1 вычисляется как: $\Lambda_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_1^i$.

Полученные для $N = 10^5$ и $\tau = 5T$ распределения отвечают известным закономерностям (рис. 1.4). Для гиперболического хаоса (рис. 1.4а) локальные показатели хорошо сгруппированы и находятся в положительной области; значение Λ_1 располагается в максимуме распределения. Для негиперболического хаоса (рис. 1.4б) распределение имеет два чётко выраженных максимума – в положительной и отрицательной области. Полный показатель Ляпунова Λ_1 , однако, положителен. Распределение, соответствующее странному нехаотическому аттрактору (рис. 1.4в), при малом по абсолютной величине, но отрицательном полном показателе, захватывает и отрицательную, и положительную области. Это отвечает наличию неоднородной локальной неустойчивости на аттракторе, приводящей к его фрактализации.

1.2 Схемы коммуникации на базе генераторов грубых режимов

Будем рассматривать две следующие математические модели коммуникационных схем. Первая модель:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - (A_1 \cos(\frac{\omega_1}{T}t) - x_1^2)x_1 + \omega_1^2 x_1 = \varepsilon y_1 \sin(\omega_1 t + \rho(t)), \\ \ddot{y}_1 - (-A_1 \cos(\frac{\omega_1}{T}t) - y_1^2)y_1 + (2\omega_1)^2 y_1 = \varepsilon x_1^2, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$s(t) = y_1 \sin(\omega_1 t + \rho(t)), \quad (1.11)$$

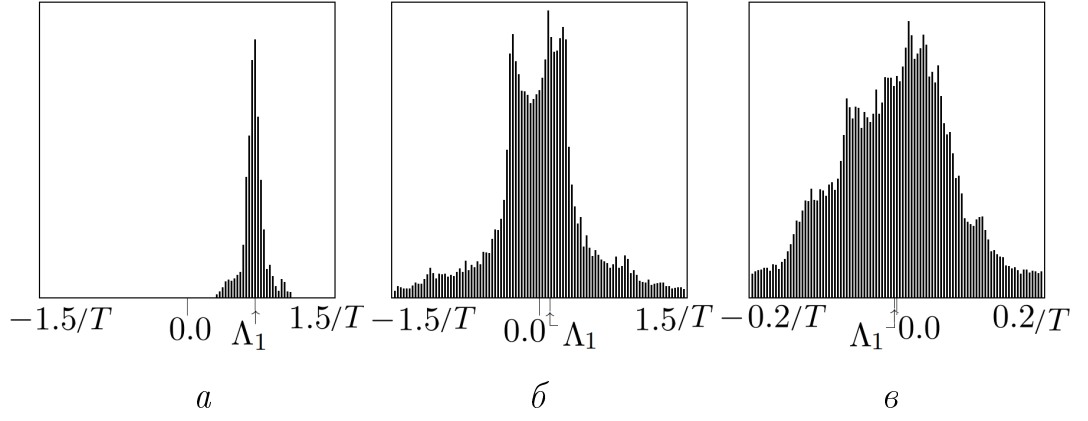


Рис. 1.4. Функция распределения по величине локального старшего показателя Ляпунова, оцененного за период $\tau = 5T$ для стробоскопического отображения генерации, ассоциирующей с гиперболическим хаотическим аттрактором (а), негиперболическим аттрактором (б) и странным нехаотическим аттрактором (в).

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 - (A_2 \cos(\frac{\omega_2}{T}t) - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \varepsilon s(t), \\ \ddot{y}_2 - (-A_2 \cos(\frac{\omega_2}{T}t) - y_2^2)\dot{y}_2 + (2\omega_2)^2 y_2 = \varepsilon x_2^2. \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь (1.10) – передатчик, (1.11) – сигнал в канале связи, (1.12) – приёмник.

Вторая модель:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - (A_1 \cos(\frac{\omega_1}{T}t) - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \varepsilon y_1 \sin(\omega_1 t + \xi \frac{\omega_1}{T}t + \rho(t)), \\ \ddot{y}_1 - (-A_1 \cos(\frac{\omega_1}{T}t) - y_1^2)\dot{y}_1 + (2\omega_1)^2 y_1 = \varepsilon x_1 \sin \omega_1 t, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$s(t) = y_1 \sin(\omega_1 t + \xi \frac{\omega_1}{T}t + \rho(t)), \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 - (A_2 \cos(\frac{\omega_2}{T}t) - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \varepsilon s(t), \\ \ddot{y}_2 - (-A_2 \cos(\frac{\omega_2}{T}t) - y_2^2)\dot{y}_2 + (2\omega_2)^2 y_2 = \varepsilon x_2 \sin \omega_1 t, \end{cases} \quad (1.15)$$

Аналогично уравнения (1.13), (1.14) и (1.15) – передатчик, сигнал в канале связи и приёмник, соответственно.

В обеих схемах передатчик и приёмник представляют собой одинаковые генераторы, связанные друг с другом через сигнал в канале связи $s(t)$. Передаваемый информационный сигнал $\rho(t)$, как видно, подмешивается

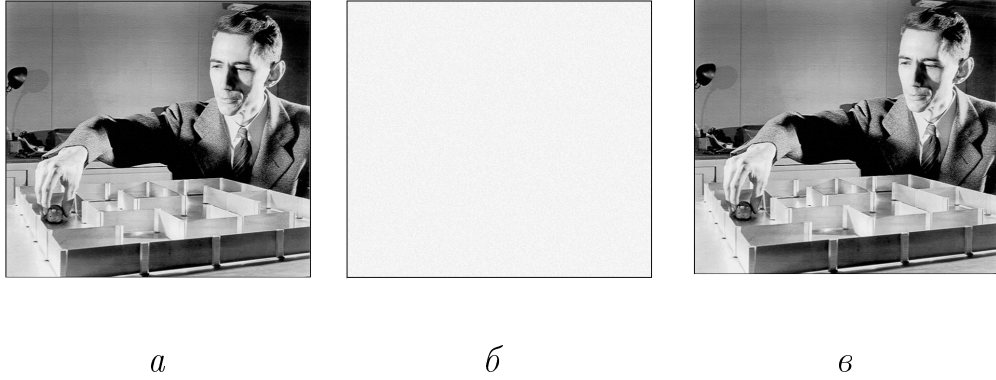


Рис. 1.5. Передаваемый информационный сигнал – фотография Клода Шеннона с разрешением 571×630 пикселей и кодировкой «256 оттенков серого цвета» (*a*). Пропущенный через низкочастотный фильтр сигнал в канале связи (*б*) и декодированный сигнал (*в*). Применена коммуникационная схема (1.10)–(1.12) в режиме работы гиперболического хаоса. Передатчик и приёмник идентичны: $A_1 = A_2$, $\omega_1 = \omega_2$.

нелинейным образом к фазе колебаний генерируемого передатчиком сигнала. Выбранный способ введения информации позволяет смешать его непосредственно с нетривиально ведущей себя фазой колебаний генераторов, что даёт преимущества с точки зрения повышения конфиденциальности по сравнению с обычным аддитивным [67–69].

1.3 Демонстрация коммуникации

Далее приведем демонстрацию численного моделирования рассматриваемых схем. В качестве передаваемого информационного сообщения было выбрано графическое изображение (рис. 1.5*a*). Информационный сигнал представлял собой ступенчатую функцию времени. Каждая ступенька имела длину τ , а её высота соответствовала одной из 256 градаций серого цвета отдельного пикселя, так что размах всей ступенчатой функции составлял от 0 до $\pi/2$.

На рис. 1.5 показана демонстрация коммуникации посредством схемы

(1.10–1.12) в режиме гиперболического хаоса при $A_2 = A_1$, $\omega_2 = \omega_1$. Результаты действия схем связи с негиперболической хаотической и странной нехаотической несущей визуально не отличаются и потому не приведены. На рис. 1.5б виден сигнал в канале связи, на рис. 1.5в – идеально детектированная информация.

Детектирование в схеме (1.10–1.12) произведено по следующей методике:

$$\sin \rho' = \langle 2s(t) \cos(\omega_2 t) / y_2(t) \rangle_\tau, \quad (1.16)$$

где угловые скобки означают усреднение за период τ . Этот период должен составлять как минимум несколько периодов медленной модуляции (огибающей) несущего сигнала. Для представленных в работе результатов $\tau = 5T$. Такое усреднение удаляет высокочастотные компоненты из результата умножения на косинус отношения соответствующих друг другу переменных приёмника и передатчика $(y_1/y_2) \sin(\omega_1 t + \rho(t)) \cos(\omega_2 t)$ для сигнала $s(t)$ вида (1.11). Эти переменные в случае полной синхронизации совпадают. При совпадающих же частотах $\omega_1 = \omega_2$, в соответствии с правилом, произведение тригонометрических функций распадается на сумму высокочастотной компоненты и медленно меняющейся составляющей $\sin \rho$: $\sin(\omega_1 t + \rho(t)) \cos(\omega_1 t) = (1/2)(\sin \rho + \sin(2\omega_1 t + \rho))$. Таким образом, для идентичных приёмника и передатчика очевиден результат $\sin \rho' = \sin \rho$. Сходные рассуждения могут быть проделаны и для случая сигнала (1.14) в канале связи при детектировании вида:

$$\sin \rho' = \langle 2s(t) \cos(\omega_2 t + \xi \frac{\omega_2}{T} t) / y_2(t) \rangle_\tau. \quad (1.17)$$

1.4 Коммуникация при расстройках параметров

Полная синхронизация при одинаковых значениях параметров в коммуникационных схемах (1.10–1.12) и (1.13–1.15) достигается благодаря достаточно сильной односторонней связи через сигнал $s(t)$. При расстройке же

параметров полная синхронизация нарушается. Как видно (рис. 1.6), это сильно сказывается на результате. При расстройке параметров A_1 и A_2 , отвечающих за амплитуду генерации, на 5% детектированное изображение оказывается достаточно зашумленным, причём в гораздо большей степени это происходит для негиперболического хаоса (рис. 1.6а-в). Расстройка частотных параметров приёмника и передатчика приводит к полной невозможности распознать передаваемое сообщение в этом случае (рис. 1.6г-е). Однако для гиперболической и странной нехаотической несущих часть сообщения приближённо восстанавливается. Это возможно в промежутки времени передачи информации, когда накачка осцилляторов передатчика и приёмника происходит в одной фазе.

1.5 Альтернативный метод детектирования информации

Предполагается, что даже при нарушении полной синхронизации между грубым передатчиком и грубым приёмником локальные во времени статистические характеристики динамики связанных систем могут оставаться однородными. В качестве такой локальной характеристики должна выступать оцененная в относительно коротком окне корреляция между переменными передатчика и приёмника. Исходя из этой гипотезы, предложен альтернативный метод детектирования информации для схемы (1.10–1.12):

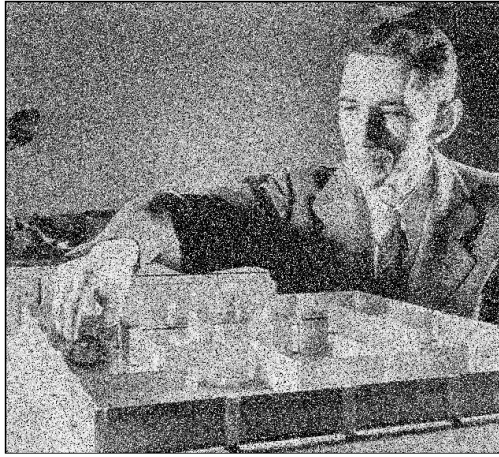
$$\sin \rho' = \langle 2s(t) \cos(\omega_2 t) y_2(t) \rangle_\tau, \quad (1.18)$$

и аналогичный ему для схемы (1.13–1.15):

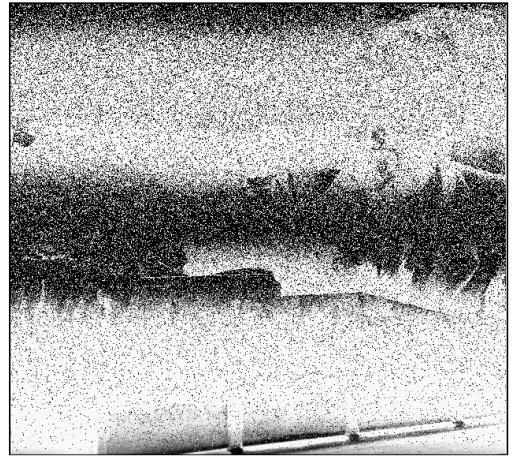
$$\sin \rho' = \langle 2s(t) \cos(\omega_2 t + \xi \frac{\omega_2}{T} t) y_2(t) \rangle_\tau. \quad (1.19)$$

Здесь, в отличие от (1.16) и (1.17), усредняется не отношение, а произведение переменных y_1 и y_2 ⁴. Усреднение даёт величину $C_\tau(t) = \langle y_1(t) y_2(t) \rangle_\tau$,

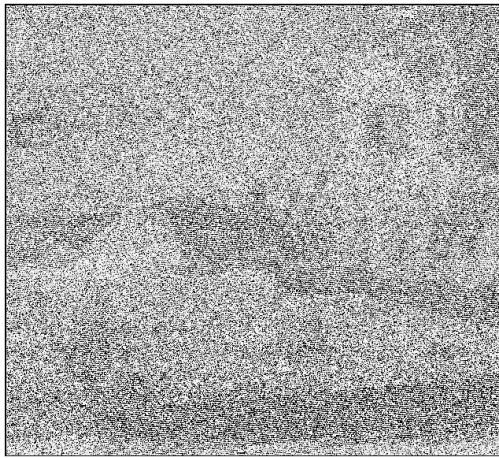
⁴Оперирование с произведением, в отличие от отношения динамических переменных, помимо всего прочего, гораздо удобнее для аналоговой радиофизической реализации. Оно снимает проблему возможности малых знаменателей, приводящую к резкому возрастанию тока и напряжения в цепи.



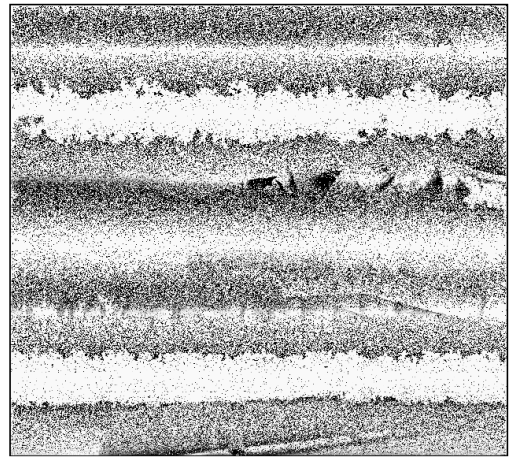
a



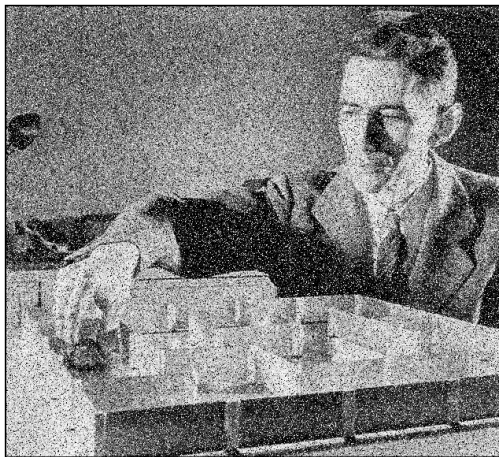
z



б



д



в



e

Рис. 1.6. Изображение, детектированное методами (1.16) или (1.17) в зависимости от используемой схемы, при неидентичности приёмника и передатчика с отстройкой $A_2 = 1.05A_1$ (*a-в*) и $\omega_2 = \omega_1 + 10^{-7}$ (*z-e*). Рисунки *a, z* отвечают коммуникации с гиперболической хаотической несущей, *б, д* – негиперболической, *в, e* – странной нехаотической.

имеющую смысл локального значения корреляции.

Из результатов альтернативного детектирования на рис. 1.7*а,в* можно предположить, что для грубых связанных передающей и принимающей подсистем коммуникации эта величина $C_\tau(t)$, по-видимому, остаётся постоянной во времени. Восстановленное изображение в гиперболическом и нехаотическом случаях практически не зашумлено, но его тон несколько темнее, чем у оригинального изображения. Это объясняется умножением на константу корреляции: $\sin \rho' = C_\tau \sin \rho$. Также чуть лучше выглядят детектированные по альтернативному методу изображения и при частотной расстройке. Кардинально отличаются результаты применения метода (1.18) или (1.19) при любых неидентичностях параметров для хаоса негиперболического типа: локальная корреляция неоднородна и детектировать информацию абсолютно невозможно.

1.6 Влияние информационного сигнала на режим генерации

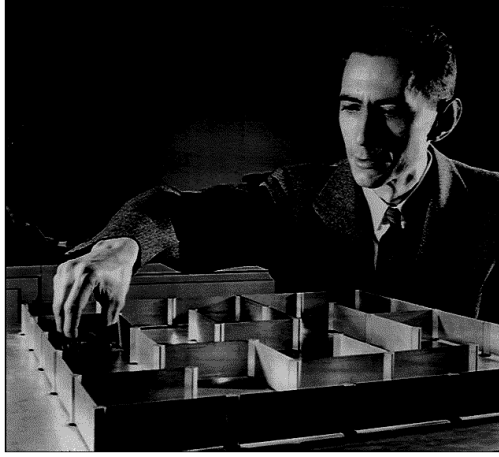
Теперь рассмотрим, насколько существенно влияние подмешиваемой информации на фазу колебаний генераторов. В данном разделе будет использоваться тестовая информация, которая представляет собой аperiodические колебания:

$$\rho(t) = a_i \cos(O_1 t + a_m \cos O_2 t) \sin O_w t; \quad (1.20)$$

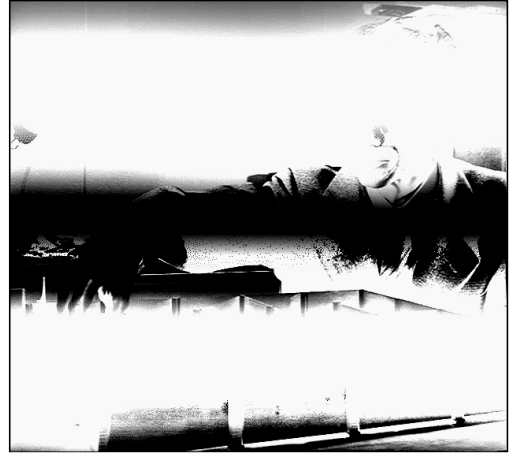
где $O_2 = \xi O_1$, $O_w = 0.9 O_1$, $a_m = 2.0$, значению ξ соответствует (1.6), O_1 – характерная частота, a_i – амплитуда информационного сигнала, которые можно менять для оценки влияния информации на аттрактор.

Выберем характерную частоту $O_1 = 1.0$, сравнимую с характерной частотой колебаний огибающей $\omega_0/T = 2\pi/6$ переменной x в исследуемых генераторах (рис. 1.8).

На рис. 1.9*а-в* представлены итерационные диаграммы $(\varphi_{n+1}, \varphi_n)$ для



a



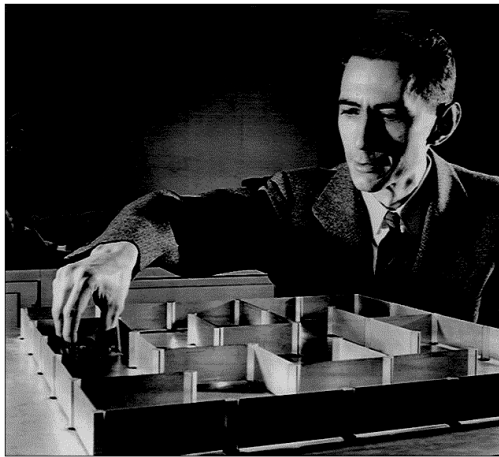
г



б



д



в



е

Рис. 1.7. Изображение, детектированное методами (1.18) или (1.19) в зависимости от используемой схемы, при неидентичности приёмника и передатчика с отстройкой $A_2 = 1.05A_1$ (*a*–*в*) и $\omega_2 = \omega_1 + 10^{-7}$ (*г*–*е*). Рисунки *a, г* отвечают коммуникации с гиперболической хаотической несущей, *б, д* – негиперболической, *в, е* – странной нехаотической.

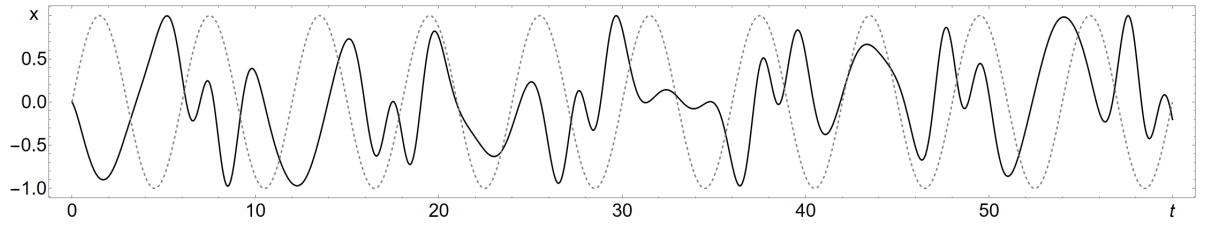


Рис. 1.8. Информационный сигнал (1.20) при $O_1 = 1.0$ и $a_i = 1.0$ (сплошной график), синусоидальные колебания с частотой $\omega_0/T = 2\pi/6$, описывающие колебания огибающей переменной x генераторов (1.1) и (1.5) (пунктирный график).

генератора-передатчика (1.10) в режиме гиперболического хаоса при различных значениях амплитуды подмешанной информации a_i , на которых видно, как изменяется поведение траектории на гиперболическом аттракторе. При амплитуде $a_i = 0.01$ информационного сигнала существенных отличий по сравнению с отсутствием информации не наблюдается (рис. 1.9а). При амплитуде $a_i = 0.1$ видно, что немного смазывается структура аттрактора, но визуально сохраняются его черты (рис. 1.9б). При достаточно сильном возмущении $a_i = 1.0$ траектория сильнее отклоняется от исходного аттрактора, хотя в среднем находится на гиперболическом множестве (рис. 1.9в). Похожие трансформации наблюдаются и в случае негиперболического хаоса (рис. 1.9г-е).

На рис. 1.9ж-и представлены фазовые диаграммы (φ_n, θ_n) при различных значениях амплитуды a_i для генератора-передатчика (1.13). Поскольку точки на фазовой диаграмме распределены по всей плоскости из-за фрактальной структуры странного нехаотического аттрактора, заметить визуальные отличия затруднительно, однако можно увидеть тенденцию по уровню размазанности точек по плоскости. При $a_i = 0.01$ существенных отличий от случая отсутствия информации не наблюдается (рис. 1.9ж). Ощутимые искажения возникают при $a_i = 0.1$ (рис. 1.9з), картинка становится заметно смазанной, но черты странного нехаотического аттракто-

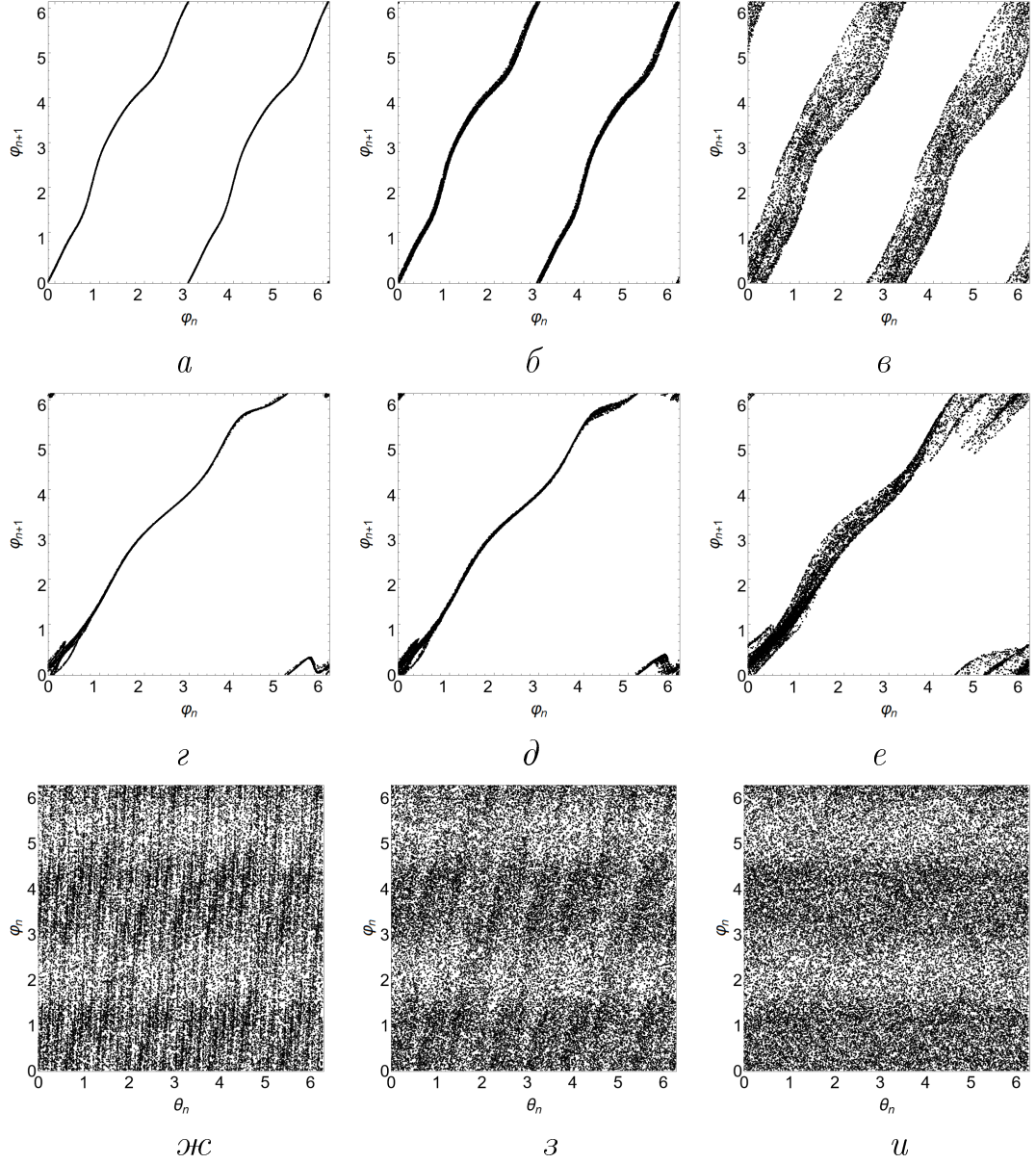


Рис. 1.9. Итерационные диаграммы фазы генератора-передатчика (1.10) в режиме гиперболического хаоса с подмешанной информацией (1.20) (при $O_1 = 1.0$) амплитуда которой: $a_i = 0.01$ (а), $a_i = 0.1$ (б), $a_i = 1.0$ (в); в режиме негиперболического хаоса: $a_i = 0.01$ (г), $a_i = 0.1$ (д), $a_i = 1.0$ (е). Фазовая диаграмма генератора-передатчика (1.13) в режиме странной нехаотической динамики с амплитудой подмешанной информации: $a_i = 0.01$ (ж), $a_i = 0.1$ (з), $a_i = 1.0$ (и).

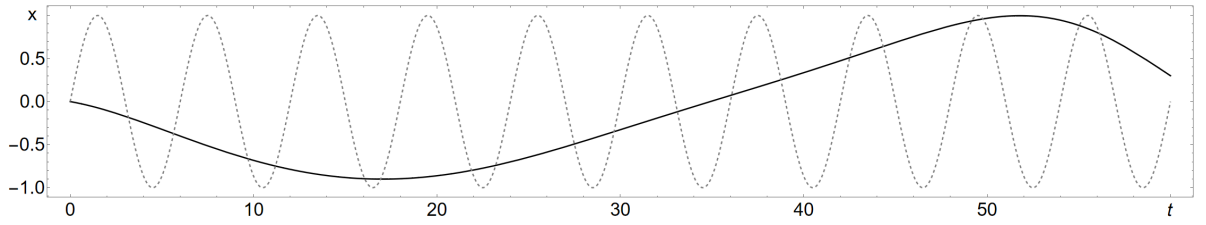


Рис. 1.10. Информационный сигнал (1.20) при $O_1 = 0.1$ и $a_i = 1.0$ (сплошной график), синусоидальные колебания с частотой $\omega_0/T = 2\pi/6$, описывающие колебания огибающей переменной x генераторов (1.1) и (1.5) (пунктирный график).

ра всё ещё прослеживаются. При амплитуде $a_i = 1.0$ (рис. 1.9*u*) картина полностью размывается, и фрактальная структура аттрактора визуально не идентифицируется. Это означает, что с добавлением информационного сигнала поведение системы становится менее предсказуемым: затрудняется визуальное выделение какой-либо структуры.

Теперь рассмотрим информационный сигнал (1.20) с меньшей характерной частотой $O_1 = 0.1$. В этом случае одно характерное колебание информационного сигнала охватывает несколько периодов огибающей сигнала генераторов (рис. 1.10). Как видно на рис. 1.11*a, в, д*, при $a_i = 1.0$ искажения на диаграммах оказываются существенно меньше по сравнению с предыдущим случаем. Для достижения уровня искажений динамики, аналогичного предыдущему случаю при $a_i = 1.0$, требуется увеличить амплитуду до $a_i = 3.0$ (рис. 1.11*б, з, е*).

Поскольку информационный сигнал подмешивается как сдвиг фазы, для обеспечения однозначности детектирования фазы его амплитуду a_i следует ограничивать значением $\pi/2$. Такую амплитуду целесообразно выбирать, когда одно колебание информационного сигнала в среднем охватывает несколько периодов колебаний несущей предложенных генераторов; это позволяет сохранить особенности их динамики. При передаче рассмотренного выше цифрового изображения использовался ступенчатый сигнал с

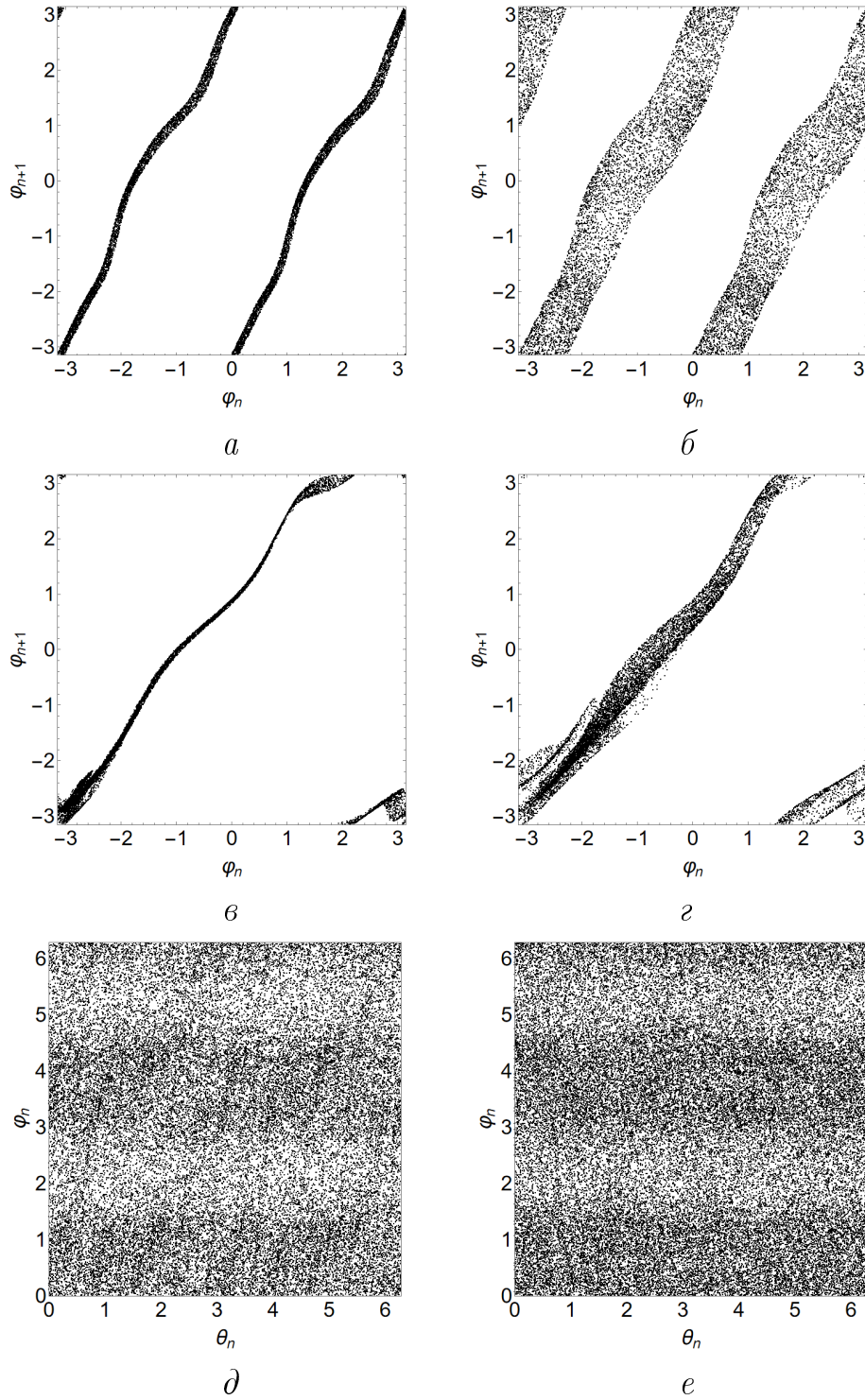


Рис. 1.11. Итерационные диаграммы фазы генератора-передатчика (1.10) в режиме гиперболического хаоса с подмешанной информацией (1.20) (при $O_1 = 0.1$) амплитуда которой: $a_i = 1.0$ (а), $a_i = 3.0$ (б); в режиме негиперболического хаоса: $a_i = 1.0$ (в), $a_i = 3.0$ (г). Фазовая диаграмма генератора-передатчика (1.13) в режиме странной нехаотической динамики с амплитудой подмешанной информации: $a_i = 1.0$ (д), $a_i = 3.0$ (е).

длительностью интервалов постоянного значения $\tau = 5T$ и максимальным размахом значений от 0 до $\pi/2$. Такой информационный сигнал удовлетворяет указанным условиям.

1.7 Выводы к Главе 1

Установлено, что в системах связи на основе синхронизации генераторов грубых режимов даже при нарушении полной синхронизации генератора-передатчика и генератора-приёмника информационный сигнал может быть успешно декодирован. Продемонстрированы результаты детектирования с помощью метода, ориентированного на полную синхронизацию, при расстройке параметра, отвечающего за амплитуду генерации, на 5% (рис. 1.6). Сравнительный анализ показал, что при использовании грубых гиперболических и странных нехаотических сигналов достигается более высокая точность детектирования информации, чем при использовании сигналов, ассоциированных с негрубым хаосом.

Используя свойство однородности локальных во времени характеристик грубых систем, разработан альтернативный метод расшифровки, основанный на расчёте локальной во времени корреляции между переменными передатчика и приёмника. Данный метод продемонстрировал повышенную эффективность для грубых систем в условиях параметрических расстройек (рис. 1.7*а,в*). Однако метод неработоспособен для систем, не обладающих структурной устойчивостью (рис. 1.7*б*). Поскольку предложенный метод основан на гипотезе об однородности во времени локальных характеристик для грубых систем при неполной синхронизации, эта гипотеза требует обоснования и верификации, что является предметом исследования следующей главы.

Следует подчеркнуть, что вопросы безопасности передачи данных в системах хаотической связи, включая предложенные схемы на основе грубых

режимов, требуют отдельного и глубокого анализа в связи с тем, что многочисленные исследования (например, [86–89]) показали уязвимость схем хаотической коммуникации к атакам. В рамках настоящей главы получены результаты (рис. 1.9 и рис. 1.11), визуально подтверждающие существенное влияние информационного сигнала на динамические характеристики аттрактора, что позволяет достаточно просто вычленив информацию из сигнала в канале связи. Рассмотренный генератор С.П. Кузнецова 2005 г., как наиболее простой, был использован в качестве прецедента, поэтому данная проблема может быть решена путём использования генераторов гиперболического хаоса с аттракторами высокой размерности. В этом смысле передатчик, основанный на странной нехаотической динамике (ассоциирующейся с аттрактором Ханта-Отта), демонстрирует повышенную скрытность передачи за счет своей высокой фрактальной размерности. Таким образом, несанкционированное детектирование данных без существенных знаний о структуре генераторов приёмника и передатчика для предложенных в главе методик представляется практически невозможным для схемы со странным нехаотическим аттрактором и может быть легко устранено для схем, использующих гиперболический хаос.

Более существенным недостатком схем коммуникации на базе синхронизации грубых подсистем является, отражающий и их преимущество, факт их слабой чувствительности к расстройкам параметров. Несмотря на трудоёмкость, структуру генератора-передатчика можно реконструировать по сигналу из канала связи. При этом для достижения синхронизации с реконструированным генератором не требуется точного знания значений его параметров. Указанный недостаток, касающийся вопросов безопасности передачи, не отменяет жизнеспособности и практической значимости предложенных схем с грубой динамикой. Это обосновано, в первую очередь, их надежностью, качеством передачи и, что принципиально, возможно-

стью функционирования в неидеальных условиях при использовании простых коммуникационных моделей на основе синхронизации, предложенных в данной работе, в отличие от известных аналогов.

Таким образом, основной вклад данной главы заключается в демонстрации применения свойства грубости (структурной устойчивости) динамических режимов для решения фундаментальной проблемы – обеспечения устойчивости декодирования информации в хаотических системах связи при параметрических расстройствах.

Глава II

Исследование локальных во времени статистических закономерностей характеристик режимов обобщенной синхронизации однонаправленно связанных грубых генераторов в условиях расстройки по параметрам и при частотных потерях в канале связи

Предложенные в предыдущей главе схемы коммуникации на основе генераторов структурно устойчивых (грубых) режимов демонстрируют значительную устойчивость к параметрическим расстройкам между передатчиком и приёмником. Ключевым элементом предложенного нового метода расшифровки информации является гипотеза о том, что даже при нарушении режима полной синхронизации локальные во времени статистические характеристики, такие как корреляция, связанных грубых систем могут быть во времени однородными. Представляется необходимой проверка данной гипотезы.

Режим полной синхронизации хаотических связанных подсистем, определяемый полным совпадением их временных реализаций при даже слабом нарушении идентичности этих подсистем или иных возмущениях (неизбежных, в частности, в условиях реального эксперимента) нарушается. На пути к полностью асинхронному режиму динамики могут возникать промежуточные состояния. Среди них, например, различают фазовую, обусловленную захватом фазы колебаний, лаг, определяющуюся сдвинутыми по времени реализациями, и др. синхронизацию [66, 90]. По признаку наличия некой функциональной связи между связанными подсистемами, выражающейся в выполнении критерия вспомогательной системы, метода ближайших соседей или более точного метода расчёта старшего условного показателя Ляпунова для однонаправленно связанных систем [91–93] выделяют введенную В.С. Афраймовичем и соавторами обобщённую син-

хронизацию [94].

Теоретической основой для предположения об однородности во времени локальных статистических характеристик динамики связанных генераторов Кузнецова при нарушениях полной синхронизации служат фундаментальные результаты, полученные для систем с гиперболической динамикой. В частности, благодаря работам Л.А. Бунимовича и Я.Г. Синая [95, 96] было обосновано сохранение присущих гиперболичности сильных хаотических свойств в сетях слабо связанных (находящихся в асинхронном режиме) одномерных отображений с гиперболической динамикой. Естественно предположить, что проявления структурной устойчивости должны характеризовать и возникающий в случае сильной связи симметричный аттрактор, отвечающий полной синхронизации. Следовательно, нарушение идентичности связанных подсистем в ограниченных пределах не должно приводить к разрушению однородности свойств хаотического поведения. В немногочисленных работах, касающихся пар и ансамблей связанных гиперболических хаотических элементов, вопросу грубости синхронного режима уделено довольно мало внимания.

В работе [97] на примере сетей связанных потоковых систем посредством некоторых специальных методов продемонстрирована устойчивость как асинхронного режима при слабой связи, так и, при достижении силы связи некоторого значения, синхронного режима. Различия перехода между когерентным и некогерентным состояниями в ансамблях связанных гиперболических и негиперболических хаотических отображений обнаружены в работе [98]. Непосредственно для двух связанных генераторов Кузнецова (вернее, для их представления в терминах медленно меняющихся амплитуд) для случая идентичных подсистем в работе [99] описаны классические явления on-off перемежаемости на границе устойчивости симметричного синхронного аттрактора. Кроме того, следует упомянуть доволь-

но старые работы по обнаружению синхронизации в связанных сингулярно гиперболических осцилляторах Лоренца и применения их для хаотической коммуникации [100, 101] и более свежие аналоги [102, 103].

Большинство существующих исследований обобщённой синхронизации и её применения в системах связи фокусируются на параметрических расстройках передатчика и приёмника. Между тем, в реальных условиях эксплуатации систем связи наряду с неидентичностью параметров аппаратуры неизбежны искажения сигнала при его передаче по каналу связи. Передача хаотического сигнала через реальные каналы связи, имеющие, к примеру, ограниченную полосу пропускания, может не только разрушать режим полной синхронизации, но и существенно искажать сам хаотический режим передатчика к моменту его поступления на приёмник. Первые работы с попытками решения этой проблемы, появившиеся около 30 лет назад [104–108] и более поздние аналоги с развитием этих решений [109–112] предлагали модификации коммуникационных схем различного рода с привлечением подстраиваемых цифровых фильтров в приёмнике и передатчике. Такие решения, как отмечали и сами авторы, представляются технически довольно сложными. Несколько совсем новых работ обосновывают актуальность исследования частотных искажений в канале связи непосредственно с точки зрения влияния их на динамические режимы, устанавливающиеся для связанных через такой канал систем [113–116].

Приведённый обзор подчеркивает важность представляемого в данной главе исследования по изучению режимов обобщённой синхронизации для гиперболических хаотических генераторов не только при параметрических расстройках, но и при наличии ограничений полосы пропускания канала связи.

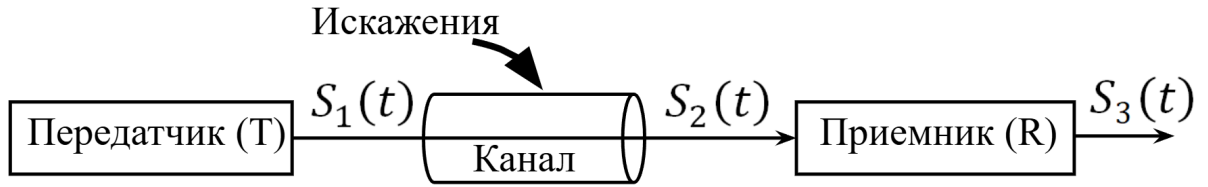


Рис. 2.1. Схема коммуникации, где сложный сигнал передатчика S_1 проходит через канал связи, в котором могут быть искажения, и на приёмник попадает сигнал S_2 . S_3 – генерируемый приёмником отклик на воздействие S_2 , аналог сигнала S_1 .

2.1 Суть исследования и описание методик анализа

В данной главе будут исследованы коммуникационные схемы (1.10)–(1.12) и (1.13)–(1.15), представленные в главе 1, функционирующие при тех же параметрах, но при отсутствии передаваемой информации ($\rho = 0$). Такой подход позволяет сместить фокус исследования непосредственно на изучение закономерностей статистических характеристик режимов обобщённой синхронизации между передатчиком и приёмником, возникающих в системе как при параметрических расстройках, так и в условиях частотных искажений. Изучаемые системы коммуникации удобно представить в виде схемы (рис. 2.1), где: $S_1(t) = y_1 \sin \omega'_1 t$ – исходный сигнал передатчика; $S_2(t)$ – сигнал, поступающий на вход приёмника, представляющий собой сигнал $S_1(t)$, искажённый в канале связи; $S_3(t) = y_2 \sin \omega'_2 t$ – сигнал-отклик, генерируемый приёмником. Величины $\omega'_{1,2}$ определяются типом используемого генератора. Для гиперболического хаотического генератора: $\omega'_{1,2} = \omega_{1,2}$; для генератора со странной нехаотической динамикой: $\omega'_{1,2} = \omega_{1,2} + \xi \omega_{1,2}/T$, где ξ – иррациональный параметр (1.6). Исследование режимов синхронизации будет проводиться путём анализа взаимосвязей между сигналами $S_1(t)$, $S_2(t)$ и $S_3(t)$.

Для диагностики наличия обобщённой синхронизации в однонаправленно связанных системах традиционным методом является расчёт старшего

условного показателя Ляпунова (Λ_c) [117, 118]. Расчёт как полного (Λ_c), так и локальных ($\lambda_c(t)$) значений старшего условного показателя Ляпунова основан на численном интегрировании уравнений в вариациях для возмущений $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ в подсистеме приёмника, при фиксированной траектории передатчика. Вид уравнений зависит от типа генератора. Для системы с гиперболическим хаосом (1.10)–(1.12):

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_2 - (A \cos \frac{\omega_0}{T} t - x_2^2) \dot{\tilde{x}}_2 + 2x_2 \dot{x}_2 \tilde{x}_2 + \omega_0^2 \tilde{x}_2 = 0, \\ \ddot{\tilde{y}}_2 - (-A \cos \frac{\omega_0}{T} t - y_2^2) \dot{\tilde{y}}_2 + 2y_2 \dot{y}_2 \tilde{y}_2 + (2\omega_0)^2 \tilde{y}_2 = 2\varepsilon x_2 \tilde{x}_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

для системы со странной нехаотической динамикой (1.13)–(1.15):

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_2 - (A \cos \frac{\omega_0}{T} t - x_2^2) \dot{\tilde{x}}_2 + 2x_2 \dot{x}_2 \tilde{x}_2 + \omega_0^2 \tilde{x}_2 = 0, \\ \ddot{\tilde{y}}_2 - (-A \cos \frac{\omega_0}{T} t - y_2^2) \dot{\tilde{y}}_2 + 2y_2 \dot{y}_2 \tilde{y}_2 + (2\omega_0)^2 \tilde{y}_2 = \varepsilon \tilde{x}_2 \sin \omega_0 t. \end{cases} \quad (2.2)$$

Используя алгоритм Бенеттина, описанный в разделе 1.1, совместно решая системы (1.10)–(1.12) и (1.13)–(1.15) с (2.1) и (2.2) соответственно, можно вычислить локальные значения $\lambda_c(t)$ и полный показатель Λ_c .

Отрицательное значение Λ_c свидетельствует об устойчивости синхронного режима между передатчиком и приёмником в обобщённом смысле в пределе усреднения за бесконечный (на несколько порядков более длительный, чем характерный колебательный временной масштаб системы) промежуток времени наблюдения. Однако этот глобальный показатель не отражает возможных локальных во времени нарушений синхронизации – появление $\lambda_c(t) > 0$, свидетельствующее о перемежающемся характере синхронизации [119]. Поэтому в рамках данного исследования будет проводиться анализ распределения и динамики локальных значений $\lambda_c(t)$, вычисленных на конечном интервале времени $\tau = 5T$. Этот анализ позволит подтвердить повышенную устойчивость режима синхронизации для схем коммуникаций на базе грубых систем по сравнению с негрубыми при наличии параметрических расстройок и частотных искажений в канале связи.

Помимо условных показателей Ляпунова, для комплексного анализа закономерностей характеристик режимов обобщённой синхронизации будет использоваться корреляционный анализ, в частности, локальная корреляция между ключевыми сигналами системы. Такой простой статистический инструментарий является с точки зрения теории динамического хаоса более примитивным по сравнению с расчётом ляпуновских показателей. Однако в контексте введённого в разделе 1.5 нового перспективного метода детектирования информации расчёт локальной корреляции имеет прикладное значение.

Локальная во времени корреляция между сигналами S_i и S_j ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$) может быть вычислена в скользящем временном окне длительностью τ по формуле:

$$\psi_{t_0}(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} S_i(t') S_j(t' + t_0) dt'. \quad (2.3)$$

Здесь ненулевое значение переменной t_0 позволяет учесть корреляции между сдвинутыми по времени друг относительно друга сигналами. Это полезно, например, при поиске лаг синхронизации. В противном случае $t_0 = 0$, и для локальной корреляции этот индекс будет опущен.

Целесообразно нормировать корреляции следующим образом:

$$\Psi_{t_0}(t, \tau) = \frac{\psi_{t_0}(t, \tau)}{\sigma[S_i] \cdot \sigma[S_j]}. \quad (2.4)$$

$$\sigma[S_{i,j}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t S_{i,j}^2(t') dt'} \quad (2.5)$$

– стандартное отклонение¹. Равенство единице корреляции при используемой нормировке соответствует совпадению (в статистическом смысле) во временном окне сигналов S_i и S_j . Кроме того, такая нормировка удобна для

¹В записи формулы для стандартного отклонения и формулы для корреляции не фигурирует математическое ожидание сигнала $S_{i,j}$, поскольку у рассматриваемых сигналов оно принимает нулевое значение.

обеспечения сравнимости результатов исследований для различных систем с различающимися амплитудами колебаний.

Для обнаружения в глобальном смысле качественных признаков полной синхронизации или её обобщённого варианта пригодна полная корреляция, которая вычисляется в пределе:

$$\Psi_{t_0} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Psi_{t_0}(t, \tau). \quad (2.6)$$

В дальнейшем изложении будет опускаться нижний индекс у корреляционных функций в случае $t_0 = 0$. Также может опускаться аргумент τ у локальной корреляции, например:

$$\Psi(t) = \Psi_0(t, \tau). \quad (2.7)$$

Локальные корреляции между парами сигналов отражают различные аспекты функционирования коммуникационной схемы.

1. Между S_1 и S_2 – характеризует качество передачи сигнала от передатчика к приёмнику через канал связи.
2. Между S_2 и S_3 – отражает точность воспроизведения входного сигнала приёмником на основе его внутренней динамики. Эта пара напрямую связана с эффективностью детектирования при передаче информации.
3. Между S_1 и S_3 – характеризует общую эффективность синхронизации во всей цепи «передатчик-канал-приёмник», показывая степень согласованности исходного сигнала передатчика и отклика приёмника.

Ожидается, что для коммуникационных схем на базе грубых генераторов, в условиях параметрических расстройек и частотных искажений, представленные локальные корреляции будут демонстрировать более высокие средние значения и существенно меньшую дисперсию по сравнению со схемами на негрубом хаосе. Это станет демонстрацией временной однород-

ности и устойчивости статистических характеристик режимов обобщённой синхронизации при использовании систем с грубыми аттракторами.

2.2 Режимы синхронизации в условиях расстройки по параметрам

Рассмотрим случай отстройки параметра приёмника $A_2 = 1.05A_1$, аналогичный главе 1. Вычисленные полные старшие условные показатели Ляпунова для систем на базе генераторов: с гиперболическим хаотическим аттрактором $\Lambda_c = -0.88$; с негиперболическим хаотическим аттрактором $\Lambda_c = -0.092$; со странным нехаотическим аттрактором $\Lambda_c = -0.77$, свидетельствуют о существовании синхронного режима в среднем за время наблюдения во всех трёх случаях. При этом значительно большие по модулю значения Λ_c для гиперболического и странного нехаотического аттракторов, по сравнению с негиперболическим хаотическим аттрактором, указывают на более устойчивый синхронный режим.

При рассмотрении параметрических расстройек искажения в канале связи отсутствуют ($S_2 = S_1$), что позволяет непосредственно сравнивать сигналы передатчика S_1 и генерируемый приёмником отклик S_3 . Для наглядной визуализации состояния синхронизации и его диагностики удобно рассмотреть два типа плоскостей: плоскость амплитуд синхронных сигналов (S_1, S_3) и плоскость фаз соответствующих колебаний (φ_1, φ_3) .

На рис. 2.2 представлена плоскость (S_1, S_3) для исследуемых систем. Вероятность посещения траекторией каждого пикселя изображения отображена оттенком серого (более тёмные области соответствуют большей плотности вероятности). Во всех случаях наблюдаются структурированные объекты, локализованные в окрестности диагонали $S_1 = S_3$. Важно отметить, что наиболее тёмные участки (области максимальной плотности) сосредоточены преимущественно в центральной части этих структур.

На рис. 2.3 представлена плоскость (φ_1, φ_3) , где φ_j – фаза колебаний сигнала S_j , вычисленная как $\varphi_j(t) = \arg \left(S_j(t) + i \frac{dS_j(t)}{dt} \right)$. Наиболее тёмные (часто встречающиеся) участки на диаграммах располагаются преимущественно вблизи диагонали $\varphi_1 = \varphi_3$, однако глобальное распределение точек в фазовой плоскости демонстрирует более сложный характер.

Рассмотрим второй вариант расстройки – для частотного параметра. Исследуем схемы с частотой генератора-передатчика $\omega_1 = 2.0\pi$ и расстроенной частотой генератора-приёмника $\omega_2 = 2.001\pi$. Вычисленные полные старшие условные показатели Ляпунова (Λ_c) демонстрируют следующие значения: для системы с гиперболическим хаотическим аттрактором $\Lambda_c = -0.59$, с негиперболическим хаосом $\Lambda_c = -0.038$, со странным нехаотическим аттрактором $\Lambda_c = -0.54$. Отрицательные значения во всех случаях подтверждают существование устойчивого синхронного режима в среднем за время наблюдения. При этом значения показателей для гиперболического и странного нехаотического аттракторов также оказываются на порядок больше по модулю, чем у негиперболического хаотического аттрактора.

Для анализа синхронных режимов при частотной расстройке обратимся к амплитудным и фазовым диаграммам, построенным в стробоскопическом сечении, выбранном в максимумах огибающей сигналов². На рис. 2.4 представлены амплитудные соотношения сигналов S_1 и S_3 . Во всех исследуемых системах точки распределены по плоскости сложным образом с выраженной концентрацией вблизи линии $S_3 = 0$. Аналогичная картина наблюдается на фазовых диаграммах φ_1 и φ_3 (рис. 2.5).

Объяснение наблюдаемых закономерностей даёт анализ временных реализаций в стробоскопическом сечении (рис. 2.6). Сигнал передатчика S_1

²Такой подход оказывается удобным при наличии огибающей у сигнала: если сигналы ведут себя синхронно, то на таких диаграммах будут наблюдаться структуры, выстроенные вдоль диагонали.

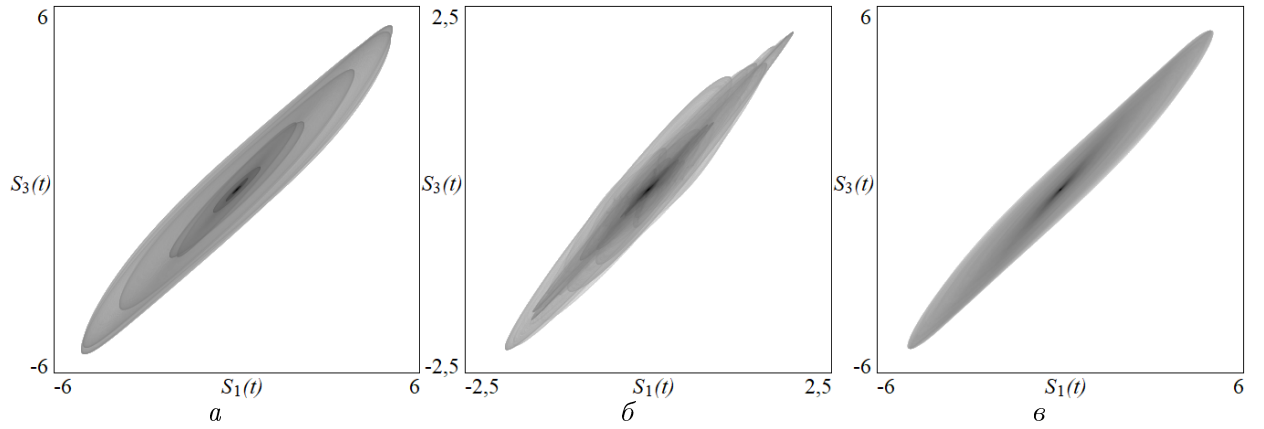


Рис. 2.2. Соотношение сигналов S_1 и S_3 при $A_2 = 1.05A_1$ для случая гиперболического (а), негиперболического (б), странного нехаотического (в) режимов. Плотность вероятности пребывания траектории в пикселе отображена оттенком серого.

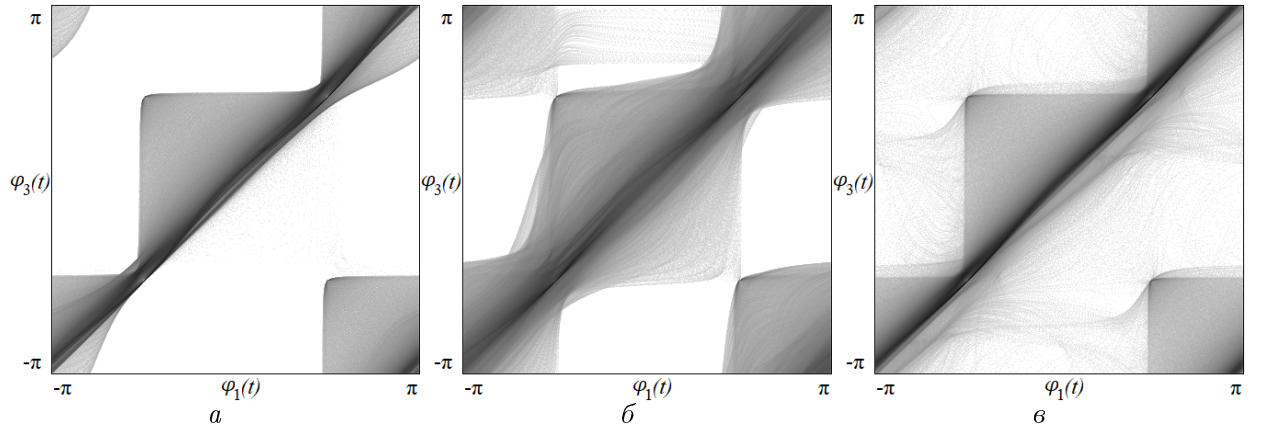


Рис. 2.3. Соотношение фаз колебаний φ_1 и φ_3 при $A_2 = 1.05A_1$ для случая гиперболического (а), негиперболического (б), странного нехаотического (в) режимов. Плотность вероятности пребывания траектории в пикселе отображена оттенком серого.

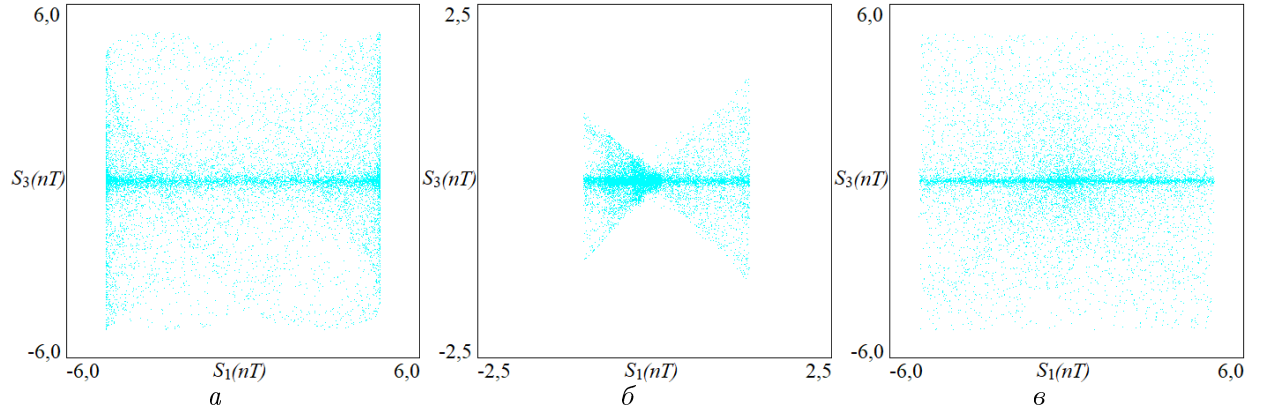


Рис. 2.4. Амплитудные соотношения сигналов S_1 и S_3 , построенные в стробоскопическом сечении при расстройке по частотному параметру $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ для случая гиперболического хаотического (а), негиперболического хаотического (б) и странного нехаотического (в) режимов.

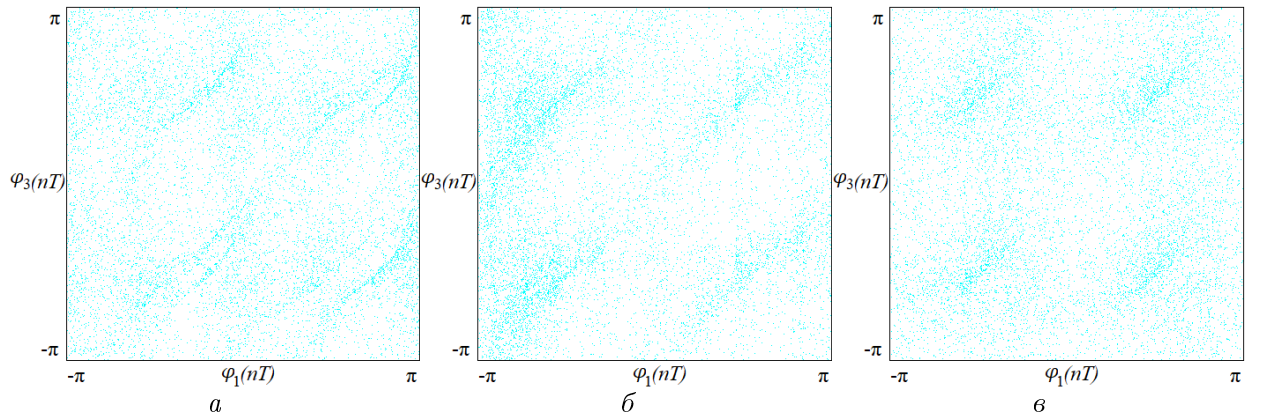


Рис. 2.5. Соотношения фаз колебаний φ_1 и φ_3 , построенные в стробоскопическом сечении при расстройке по частотному параметру $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ для случая гиперболического хаотического (а), негиперболического хаотического (б) и странного нехаотического (в) режимов.

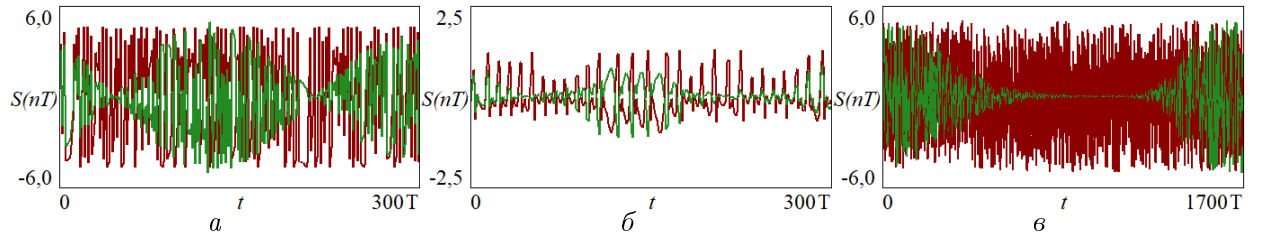


Рис. 2.6. Реализации сигналов S_1 (красный), S_3 (зелёный) в стробоскопическом сечении при расстройке по частотному параметру $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ для случая гиперболического (а), негиперболического (б), странного нехаотического (в) режимов.

(тёмно-красный) демонстрирует стабильную автономную генерацию. Однако сигнал приёмника S_3 (зелёный) демонстрирует выраженные биения с регулярными падениями амплитуды до нуля в стробоскопическом сечении. Этот эффект обусловлен несовпадением фаз возбуждения генераторов приёмника и передатчика: при совпадении фазы входного сигнала S_1 с фазой собственного цикла генерации приёмника происходит полное возбуждение, тогда как рассогласование фаз приводит к подавлению генерации S_3 .

2.3 Устойчивость режимов генератора-приёмника в условиях расстройки по параметрам

Проведём оценку сохранения структурных свойств аттракторов при расстройке $A_2 = 1.05A_1$. Для этого исследуем образы аттракторов сигналов передатчика (S_1) и приёмника (S_3), построенные при помощи стробоскопического сечения. На рис. 2.7 представлены аттракторы, полученные от сигнала передатчика S_1 (тёмно-красный) и отклика приёмника S_3 (зелёный). На нём видно, что аттрактор отклика приёмника S_3 во всех случаях демонстрирует качественное сохранение структуры аттрактора передатчика S_1 . Эти результаты согласуются с ранее наблюдавшейся локализацией точек вблизи диагонали на амплитудных и фазовых диаграммах. Это свидетельствует об устойчивости рассматриваемых схем коммуникации к вариациям

амплитудного параметра.

Аналогичный анализ проведём при расстройке частотного параметра: $\omega_1 = 2.0\pi$, $\omega_2 = 2.001\pi$ с помощью рис. 2.8. На нём видно, что аттрактор отклика приёмника S_3 не воспроизводит динамику передатчика S_1 из-за несовпадения фаз возбуждения генераторов приёмника и передатчика. Визуально это проявляется как «размазывание» и концентрация точек у нуля образа аттрактора S_3 по сравнению с S_1 .

2.4 Статистические закономерности локальных характеристик связанных систем в условиях расстройки по параметрам

Исследуем закономерности в поведении локального старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_c(t)$ при амплитудной расстройке параметра приёмника. На рис. 2.9 представлены временные зависимости $\lambda_c(t)$ для систем с различными типами аттракторов. Во всех случаях наблюдаются флуктуации $\lambda_c(t)$ около постоянного среднего значения: для систем с гиперболическим хаотическим аттрактором (рис. 2.9а) и странным нехаотическим аттрактором (рис. 2.9в) график $\lambda_c(t)$ полностью расположен в отрицательной области; в случае же системы с негиперболическим хаотическим аттрактором (рис. 2.9б) значения $\lambda_c(t)$ периодически принимают положительные значения.

Статистические свойства этих реализаций подробнее раскрывают гистограммы распределения значений λ_c (рис. 2.10). Для гиперболического (рис. 2.10а) и странного нехаотического (рис. 2.10в) аттракторов распределение полностью локализовано в отрицательной области, что подтверждает устойчивость синхронизации грубых режимов. Распределение для негиперболического хаоса (рис. 2.10б) имеет значительную часть в положительной области, что является свидетельством локальных нарушений синхронизации - явления перемежающейся синхронизации.

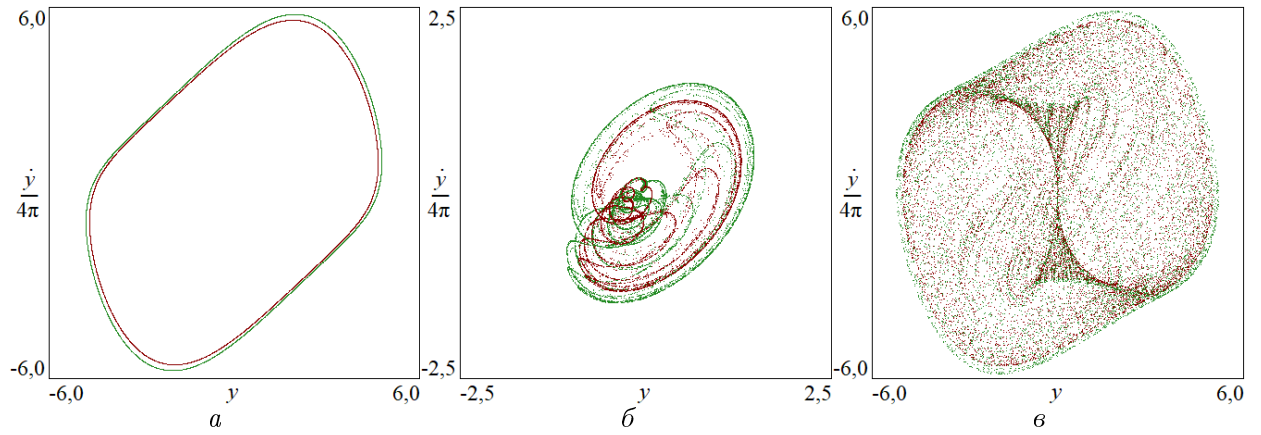


Рис. 2.7. Образы аттракторов сигналов S_1 (тёмно-красный), S_3 (зелёный) в стробоскопическом сечении при $A_2 = 1.05A_1$ для случая гиперболического (а), негиперболического (б), странного нехаотического (в) режимов.

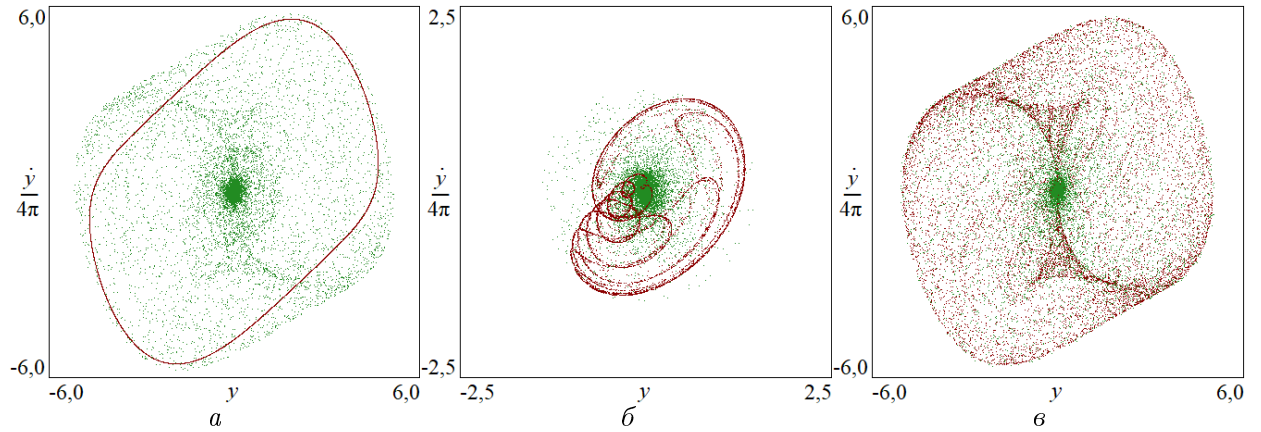


Рис. 2.8. Образы аттракторов сигналов S_1 (тёмно-красный), S_3 (зелёный) в стробоскопическом сечении при расстройке по частотному параметру $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ для случая гиперболического хаотического (а), негиперболического хаотического (б) и странного нехаотического (в) режимов.

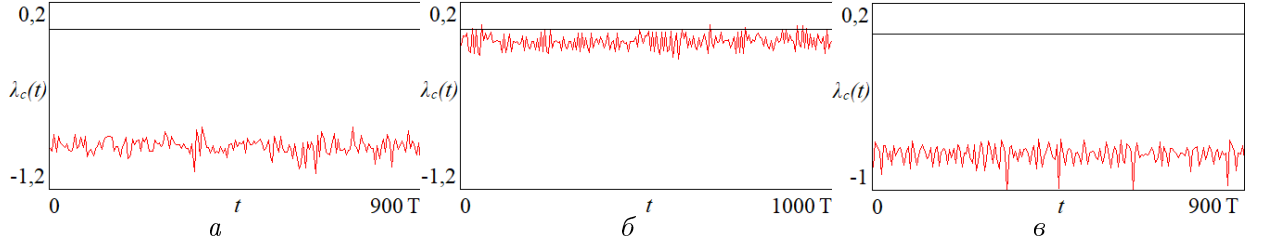


Рис. 2.9. Зависимость от времени локальных значений старшего условного показателя Ляпунова при расстройке $A_2 = 1.05A_1$ в гиперболическом (а), негиперболическом (б), странном нехаотическом (в) случае. Серая горизонталь отвечает нулевому значению.

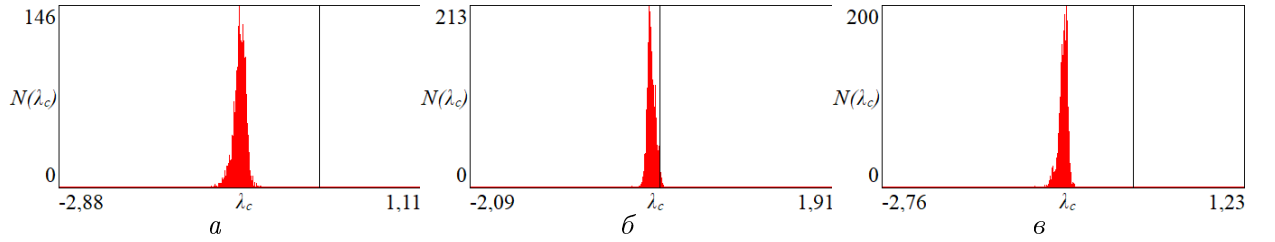


Рис. 2.10. Гистограмма распределения локальных значений старшего условного показателя Ляпунова при расстройке $A_2 = 1.05A_1$ в гиперболическом (а), негиперболическом (б), странном нехаотическом (в) случае. Серая вертикаль отвечает нулевому значению.

Перейдём к анализу закономерностей корреляции (2.6) при расстройке параметра A . На рис. 2.11 представлены зависимости автокорреляции сигнала S_1 (голубая кривая) и корреляции между S_1 и S_3 (зелёная кривая). Для систем с гиперболическим (рис. 2.11а) и странным нехаотическим (рис. 2.11в) аттракторами обе корреляционные функции монотонно спадают до нуля. Это означает, что сигналы некоррелированы. В случае же негиперболического хаоса (рис. 2.11б) наблюдается иное поведение: после быстрого начального спада проявляются биения с неизменной амплитудой, причём у автокорреляции амплитуда биений оказывается большей, чем у корреляции. Схожие закономерности наблюдаются и в рассмотренных далее ситуациях.

Отличными закономерностями обладает локальная корреляция (2.7). На

рис. 2.12 представлены зависимости локальной автокорреляции сигнала S_1 (голубая кривая) и локальной корреляции между сигналами S_1 и S_3 (зелёная кривая) для различных размеров окна τ . Локальная автокорреляция S_1 демонстрирует поведение корреляции в идеальных условиях без расстроек параметров передатчика и приёмника и помех в канале связи, служа эталоном для сравнения с локальной корреляцией между S_1 и S_3 .

Для систем с гиперболическим хаотическим (рис. 2.12а,г,ж) и странным нехаотическим (рис. 2.12в,е,и) аттракторами наблюдаются устойчивые корреляционные зависимости. Обе кривые (автокорреляция и взаимная корреляция) проявляются как квазистационарные линии с флуктуациями около среднего значения. Амплитуда этих флуктуаций систематически уменьшается с увеличением размера окна усреднения τ . При этом среднее значение локальной автокорреляции S_1 несколько превышает среднее значение корреляции между S_1 и S_3 . Такое устойчивое поведение корреляции подтверждает гипотезу об её однородности в условиях установившейся грубой синхронизации, что обеспечивает стабильное функционирование схем связи на основе грубых генераторов и принципиальную возможность качественной расшифровки замаскированной информации.

В случае системы с негиперболическим хаотическим аттрактором (рис. 2.12б,д,з) локальная автокорреляция (голубая кривая) и локальная корреляция между S_1 и S_3 (зелёная кривая) демонстрируют выраженные всплески с амплитудой, зависящей от размера окна τ . Следовательно, неустойчивое поведение локальной корреляции негиперболического хаоса делает невозможной передачу и расшифровку информации при параметрических расстройках.

Учитывая, что увеличение τ преимущественно влияет на уменьшение амплитуды флуктуаций без изменения качественной картины, для последующего анализа локальных корреляций целесообразно выбрать $\tau = 5T$.

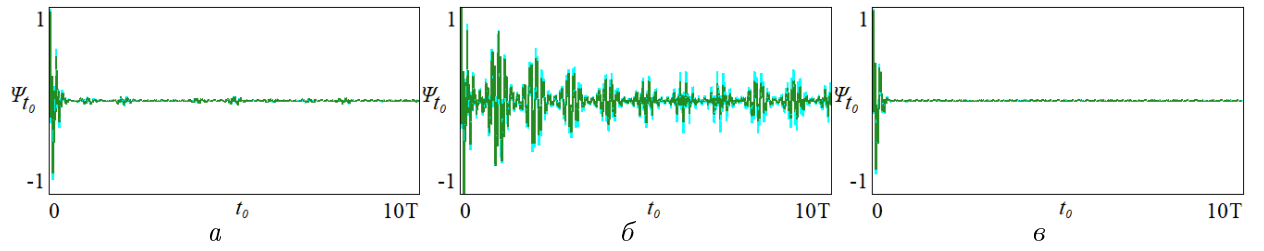


Рис. 2.11. Автокорреляция сигнала S_1 (голубая кривая) и корреляция между S_1 и S_3 (зелёная кривая) при $A_2 = 1.05A_1$, вычисленные по формуле (2.6) в случае гиперболического (а), негиперболического (б), странного нехаотического (в) режимов.

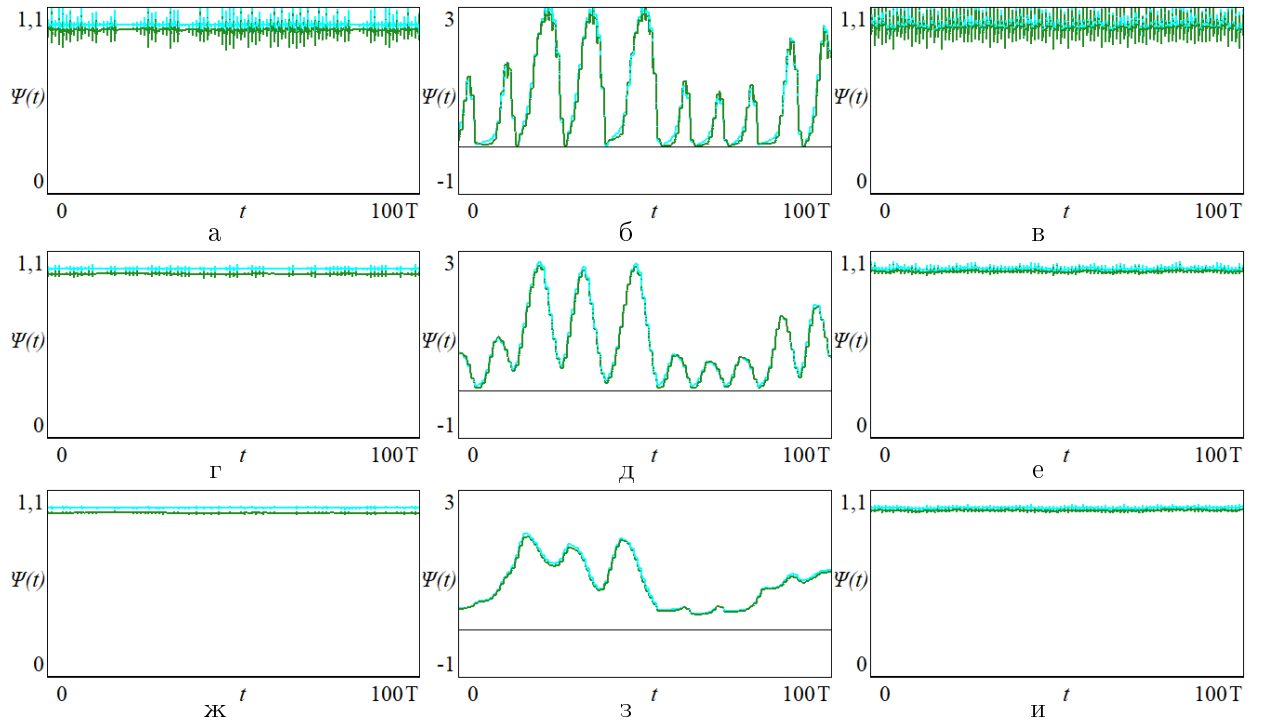


Рис. 2.12. Локальные нормированные автокорреляция сигнала S_1 (голубая кривая) и корреляция между S_1 и S_3 (зелёная кривая), вычисленные по формуле (2.7), при $A_2 = 1.05A_1$ и $\tau = T$ (а-в), $5T$ (г-е), $10T$ (ж-и) для случаев гиперболического (а, г, ж), негиперболического (б, д, з), странного нехаотического (в, е, и) режимов. Серая горизонталь – нулевое значение.

Перейдём к анализу локальных характеристик при частотной расстройке: $\omega_1 = 2.0\pi$, $\omega_2 = 2.001\pi$.

На рис. 2.13 представлены временные зависимости $\lambda_c(t)$. Для систем с гиперболическим хаотическим (рис. 2.13а) и странным нехаотическим (рис. 2.13б) аттракторами наблюдается ярко выраженный колебательный характер поведения $\lambda_c(t)$. Максимальные по модулю отрицательные значения соответствуют моментам совпадения фазы возбуждений передатчика и приёмника. Минимальные по модулю значения (приближающиеся к нулю, но остающиеся отрицательными) наблюдаются при максимальном рассогласовании фаз. Это согласуется с тем фактом, что генератор приёмника не способен возбудиться без сигнала передатчика. Различие между графиками, относящимися к рассматриваемым аттракторам, заключается в длительности интервалов с максимальным по модулю значением $\lambda_c(t)$: для странного нехаотического аттрактора эти интервалы существенно продолжительнее. Для системы с негиперболическим хаотическим аттрактором (рис. 2.13б) также наблюдается колебательное поведение $\lambda_c(t)$, однако оно сопровождается регулярными флуктуациями в положительную область.

Распределения значений λ_c , представленные на рис. 2.14, для грубых аттракторов (рис. 2.14а,б) широкие и бимодальные: наибольший пик расположен в области наиболее отрицательных значений λ_c , соответствующих совпадению фаз генерации передатчика и приёмника, а второй пик – в области значений, близких к нулю. Наличие основного пика с наибольшей вероятностью указывает на значительное время, в течение которого фазы передатчика и приёмника согласованы, что создает временные окна, потенциально пригодные для расшифровки информации. Для негиперболического хаоса (рис. 2.14б) распределение хорошо локализовано и аналогично распределению, наблюдаемому при амплитудной расстройке.

На рис. 2.15 представлены зависимости локальной автокорреляции S_1

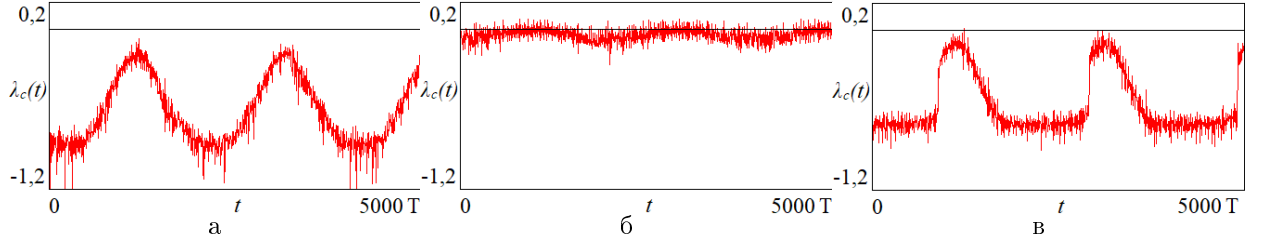


Рис. 2.13. Зависимость от времени локальных значений старшего условного показателя Ляпунова при расстройке $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ в гиперболическом (а), негиперболическом (б), странном нехаотическом (в) случае.

Серая горизонталь отвечает нулевому значению.

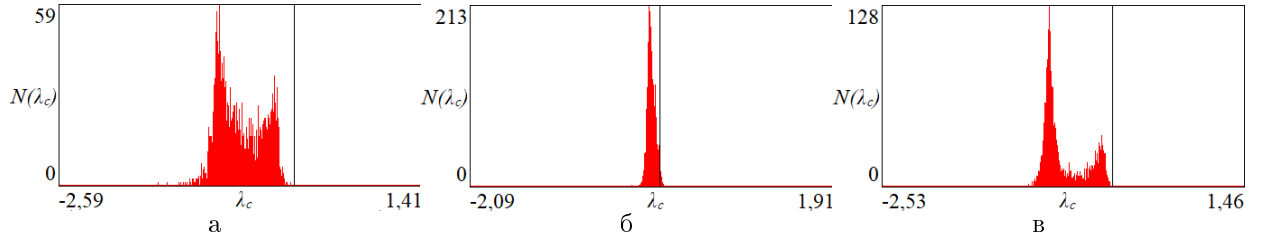


Рис. 2.14. Гистограмма распределения локальных значений старшего условного показателя Ляпунова при расстройке $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ в гиперболическом (а), негиперболическом (б), странном нехаотическом (в) случае.

Серая вертикаль отвечает нулевому значению.

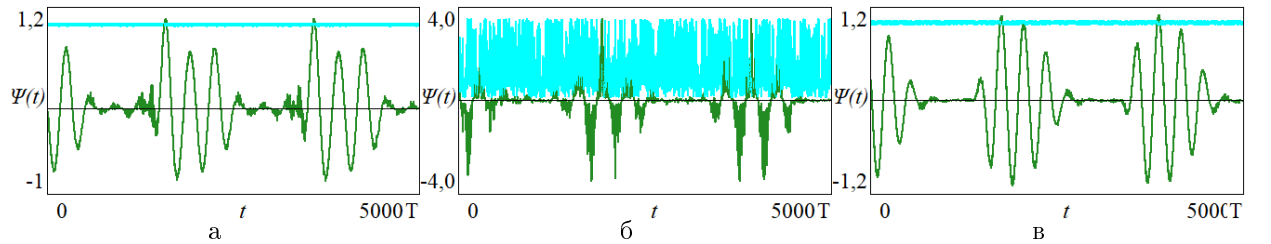


Рис. 2.15. Локальные нормированные автокорреляция сигнала S_1 (голубая кривая) и корреляция между S_1 и S_3 (зелёная кривая), вычисленные по формуле (2.7), при $\omega_2 = 1.0005\omega_1 = 2.001\pi$ и $\tau = 5T$ для случаев гиперболического (а), негиперболического (б), странного нехаотического (в) режимов.

Серая горизонталь – нулевое значение.

(голубая) и корреляции между S_1 и S_3 (зелёная) для $\tau = 5T$. Ключевая особенность поведения взаимной корреляции S_1 – S_3 (зелёная кривая) во всех исследуемых системах – наличие медленных биений с периодом порядка $1000T$ и значительной амплитудой: около 2 для систем с гиперболическим (рис. 2.15а) и странным нехаотическим аттракторами (рис. 2.15в), и около 8 для системы с негиперболическим хаосом (рис. 2.15б). Такие биения локальной корреляционной связи между сигналами передатчика и приёмника объясняют невозможность стабильной расшифровки передаваемой информации в условиях частотной расстройки.

2.5 Моделирование частотных потерь в канале связи

Как отмечалось ранее, наряду с параметрическими расстройками, в канале связи могут возникать искажения, в частности, реальные каналы связи обладают ограниченной полосой пропускания, что также может повлиять на режим синхронизации и, следовательно, на качество передачи информации. Поэтому целенаправленное введение полосы непропускания (f_1, f_2) в канал связи служит эффективным инструментом для создания режима обобщённой синхронизации и последующего изучения поведения его локальных во времени статистических характеристик.

На рис. 2.16 представлены спектры мощности сигналов S_1 , соответствующих передатчикам на базе исследуемых аттракторов, где под f понимается нормированная на 2π частота. Все сигналы характеризуются широкополосным спектром. В спектре каждого сигнала отчётливо выделяются два наибольших пика. Первый из них совпадает с основной частотой генерации и локализован в диапазоне $0 < f < 2$. Помимо этих основных пиков, спектры содержат множество побочных пиков меньшей интенсивности.

Для численного моделирования влияния частотных искажений в канале связи на режим синхронизации и локальные характеристики были выбра-

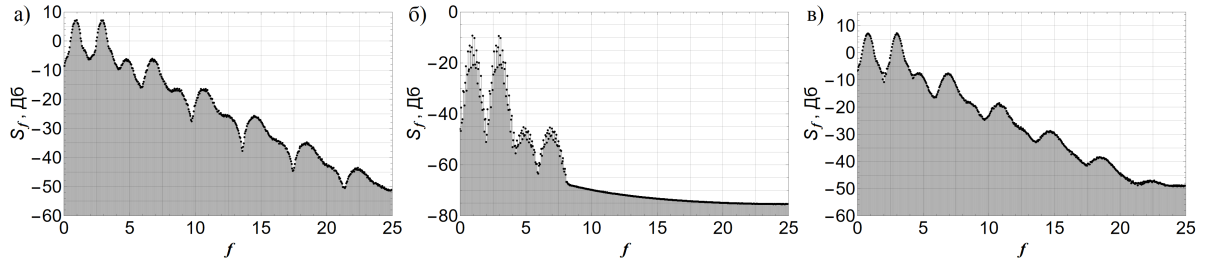


Рис. 2.16. Спектры сигнала S_1 , ассоциированные с (а) гиперболическим аттрактором, (б) негиперболическим хаотическим аттрактором и (в) странным нехаотическим аттрактором.

ны три характерных сценария применения полосы непропускания (f_1, f_2) :

1. Потери в высокочастотной части спектра: $f_1 = 2, f_2 \rightarrow \infty$.
2. Потери в низкочастотной части спектра: $f_1 = 0, f_2 = 0.7$.
3. Потери в окрестности основной несущей частоты: $f_1 = 0.9, f_2 = 1.1$.

Моделирование искажённого сигнала S_2 , поступающего на вход приёмника, осуществляется путём применения преобразования Фурье к сигналу S_1 , обнуления спектральных компонент в выбранной полосе непропускания (f_1, f_2) и последующего обратного преобразования Фурье.

Данный подход, строго говоря, не обладает должной степенью физичности. Однако он позволяет в численном эксперименте более простым образом выявлять закономерности разрушения сложного режима, ассоциирующегося с проходящим через канал сигналом, и синхронизации с этим сигналом приёмника.

2.6 Режимы синхронизации в условиях частотных искажений

В отличие от рассмотренных ранее параметрических расстройек, здесь сигнал S_2 , поступающий на вход приёмника, отличается от исходного сигнала передатчика S_1 из-за применения полосы непропускания (f_1, f_2) . Вы-

численные значения полного старшего условного показателя Ляпунова (Λ_c) для различных случаев приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Значения полного старшего условного показателя Ляпунова Λ_c для различных полос непропускания (f_1, f_2) .

	$(f_1, f_2) = (2, \infty)$	$(f_1, f_2) = (0, 0.7)$	$(f_1, f_2) = (0.9, 1.1)$
Гиперболич.	-0.833	-0.836	-0.688
Негиперболич.	-0.074	-0.072	-0.042
Стран. нехаотич.	-0.708	-0.711	-0.704

Во всех случаях значения Λ_c остаются отрицательными, что подтверждает существование синхронного режима в среднем за время наблюдения. Наименьшие по модулю значения показателя характерны для полосы непропускания вблизи основного пика ($f = 1$), что указывает на повышенную чувствительность синхронизации к искажениям в его окрестности.

На рис. 2.17 и рис. 2.18 представлены амплитудные и фазовые соотношения сигналов, построенные в стробоскопическом сечении по максимумам огибающей. Учитывая наличие промежуточного искажённого сигнала S_2 , анализ включает две пары соотношений: между сигналом передатчика и откликом приёмника (S_1, S_3) ; (φ_1, φ_3) (голубой), а также между входным сигналом приёмника и его откликом (S_2, S_3) ; (φ_2, φ_3) (тёмно-красный).

Рассмотрим случай низкочастотных искажений. На амплитудных диаграммах (рис. 2.17а-в) наблюдаются структуры, выстроенные вдоль диагонали как для пар (S_1, S_3) , так и для пар (S_2, S_3) , что свидетельствует о режиме, близкому к лаг, обобщённой синхронизации. Это указывает, что удаление низкочастотных компонент не разрушает синхронизацию полностью, а приводит к её обобщённому варианту. Фазовые соотношения (рис. 2.18а-в) демонстрируют диагональные полосы (толстые линии) с незначительными отклонениями, хотя для сигналов со странными неха-

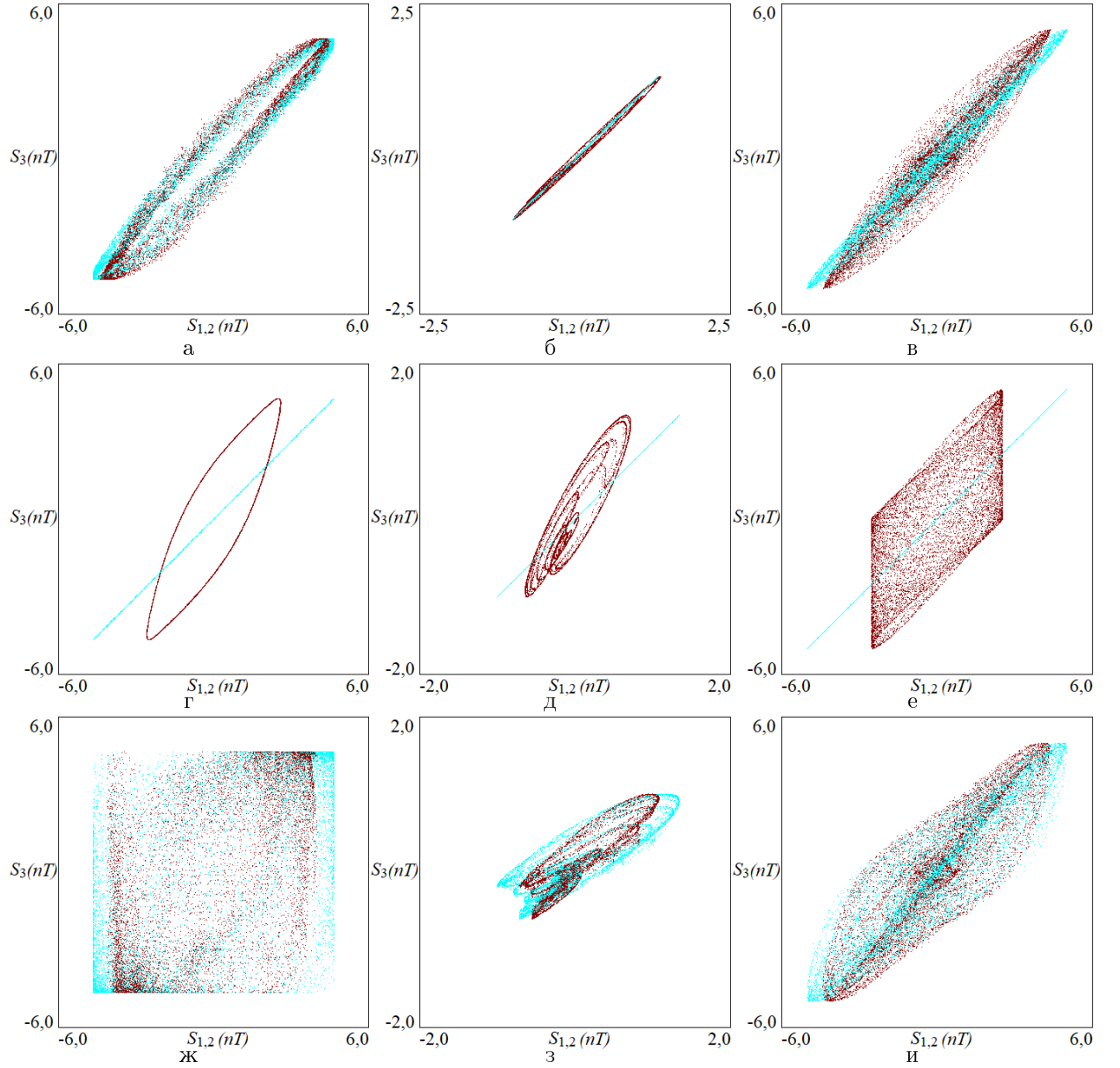


Рис. 2.17. Амплитудные соотношения сигналов S_1 и S_3 (голубой) и сигналов S_2 и S_3 (красный), построенные в стробоскопическом сечении при наличии полосы непропускания канала $f \in (0, 0.7)$ (а-в), $f \in (2, \infty)$ (г-е) и $f \in (0.9, 1.1)$ (ж-и). Сигналы ассоциируются с гиперболическим (а, г, ж), негиперболическим (б, д, з) и странным нехаотическим (в, е, и) режимами.

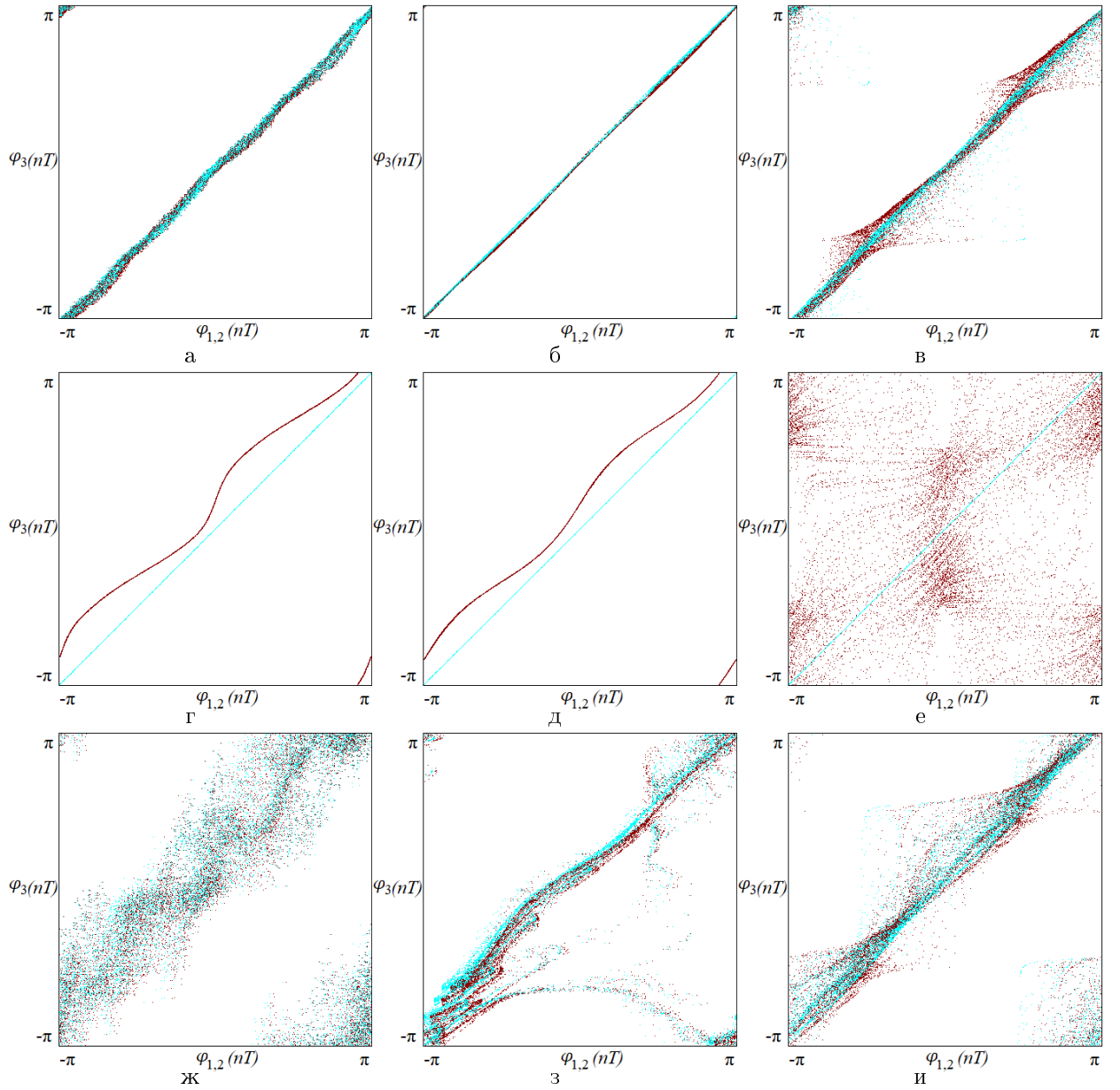


Рис. 2.18. Соотношения фаз колебаний φ_1 и φ_3 (голубой), φ_2 и φ_3 (красный), построенные в стробоскопическом сечении при наличии в канале полосы непропускания $f \in (0, 0.7)$ (а-в), $f \in (2, \infty)$ (г-е), $f \in (0.9, 1.1)$ (ж-и). Сигналы ассоциируются с гиперболическим (а, г, ж), негиперболическим (б, д, з) и странным нехаотическим (в, е, и) режимами.

отическими аттракторами отмечаются заметные соскальзывания фазы.

В случае высокочастотных искажений (рис. 2.17*г-е*) амплитудные соотношения S_1 и S_3 образуют чёткие диагональные линии, что указывает на сохранение полной синхронизации между передатчиком и приёмником. Данный факт свидетельствует о достаточности наличия в сигнале, попадающего на приёмник, частотных компонент из диапазона $(0, 2)$, включающего в себя основной пик на частоте $f = 1$, чтобы воспроизвести динамику передатчика. Соотношения S_2 и S_3 (тёмно-красные точки) формируют сложные структуры вдоль диагонали, характерные для обобщённой синхронизации. Отмечается также заметное уменьшение амплитуды S_2 вследствие применённой фильтрации. На соответствующих фазовых диаграммах (рис. 2.18*г-е*) соотношения φ_1 и φ_3 образуют чёткую диагональ, подтверждая наличие полной синхронизации. Структуры соотношений φ_2 и φ_3 для гиперболического и хаотического аттракторов представляют собой кривые, близкие к диагонали с незначительными искажениями, тогда как для странного нехаотического аттрактора наблюдается хаотичный разброс точек. Это, вероятно, связано с тем, что сигналы странного нехаотического режима содержат квазипериодическую составляющую, информация о которой теряется при высокочастотных потерях.

Наиболее критичным оказывается случай искажений в окрестности основной частоты. На амплитудных диаграммах (рис. 2.17*ж-и*), как для соотношений (S_1, S_3) , так и для (S_2, S_3) , наблюдаются следующие особенности: для гиперболического аттрактора наблюдается хаотичный разброс точек (несмотря на отрицательное значение Λ_c), тогда как для систем с негиперболическим хаосом и странным нехаотическим аттрактором визуализируются сложные структуры, выстроенные вдоль диагонали. Фазовые соотношения (рис. 2.18*ж-и*) демонстрируют сложную структуру распределения точек. При этом для сигнала со странным нехаотическим аттрак-

тором фаза демонстрирует ограниченное поведение, что характерно для режима фазовой синхронизации.

2.7 Устойчивость режимов генератора-приёмника в условиях частотных искажений

Проведём визуальную оценку влияния частотных искажений на структуру аттракторов. На рис. 2.19 представлены образы аттракторов сигналов передатчика S_1 (голубой), искажённого сигнала в канале связи S_2 (тёмно-красный) и отклика приёмника S_3 (зелёный).

Рассмотрим рис. 2.19а-в, соответствующие низкочастотным ($f_1 = 0$, $f_2 = 0.7$) искажениям, где наблюдается заметная деформация образа S_2 по сравнению с эталонным образом S_1 для всех типов аттракторов. При этом образ отклика приёмника S_3 качественно повторяет структуру аттрактора передатчика S_1 , отличаясь фазовым сдвигом. Это подтверждает предположение, что системы способны восстанавливать исходную динамику передатчика даже при отсутствии низкочастотных компонент в принимаемом сигнале.

На рис. 2.19г-е, отражающие высокочастотные ($f_1 = 2$, $f_2 \rightarrow \infty$) искажения, заметны существенные искажения образа S_2 относительно S_1 . Несмотря на это, образ S_3 полностью идентичен образу S_1 для всех типов аттракторов. Данный факт подтверждает вывод о достаточности сохранения частотных компонент в диапазоне $(0, 2)$, включающем основную несущую ($f = 1$), для точного воспроизведения динамики передатчика приёмником.

Наиболее информативными оказываются рис. 2.19ж-и, соответствующие искажениям в окрестности основной частоты ($f_1 = 0.9$, $f_2 = 1.1$). Здесь образ S_2 демонстрирует заметные искажения относительно S_1 . Ключевое наблюдение заключается в различном поведении S_3 : для систем с

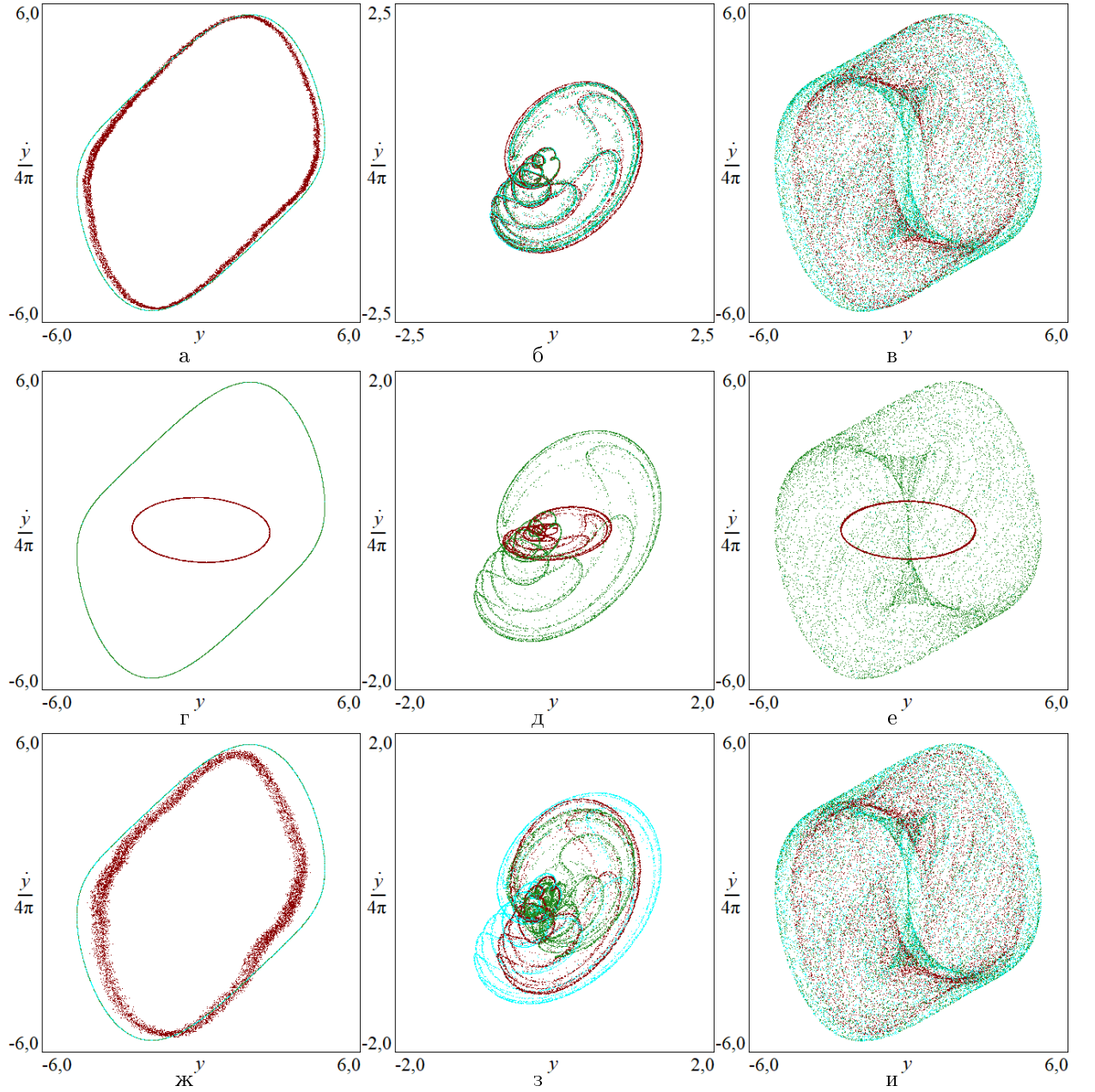


Рис. 2.19. Образы аттракторов сигналов S_1 (тёмно-красный), S_3 (зелёный) в стробоскопическом сечении при наличии в канале полосы непропускания $f \in (0, 0.7)$ (a-v), $f \in (2, \infty)$ (z-e), $f \in (0.9, 1.1)$ (ж-и). Сигналы ассоциируются с гиперболическим (a, г, ж), негиперболическим (б, д, з) и странным нехаотическим (в, е, и) режимами.

гиперболическим хаосом и странным нехаотическим аттрактором образ S_3 качественно повторяет структуру S_1 . В то же время для системы с негиперболическим хаосом (з) образ S_3 кардинально отличается от S_1 . Это демонстрирует принципиальное преимущество генераторов с грубыми аттракторами в условиях таких искажений: способность сохранять структурную целостность динамики приёмника даже при существенном повреждении сигнала в канале связи.

2.8 Статистические закономерности локальных характеристик связанных систем в условиях частотных искажений

Обратимся к анализу локальных статистических характеристик в условиях частотных искажений. На рис. 2.20 представлены распределения во времени локального старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_c(t)$. Во всех исследованных сценариях наблюдаются флуктуации $\lambda_c(t)$ около отрицательного среднего значения, что согласуется с ранее полученными отрицательными значениями полного показателя Λ_c . Для систем с гиперболическим хаосом (рис. 2.20а,г,жс) и странными нехаотическими аттракторами (рис. 2.20в,е,и) графики $\lambda_c(t)$ полностью расположены в отрицательной области, демонстрируя устойчивость синхронизации. Ожидаемо, что для системы с негиперболическим хаосом (рис. 2.20б,д,з) регулярно наблюдаются всплески $\lambda_c(t)$ в положительную область.

Перейдём к анализу локальных корреляционных зависимостей, представленных на рис. 2.21. В случае негиперболического хаоса (рис. 2.21б,д,з) поведение локальных корреляций, ожидаемо имеет характер всплесков, что делает расшифровку информации невозможной.

При низкочастотных искажениях ($f_1 = 0$, $f_2 = 0.7$) для грубых аттракторов (рис. 2.21а,в) корреляции демонстрируют устойчивое поведение с медленными флуктуациями. Сохранение значительной однородности ло-

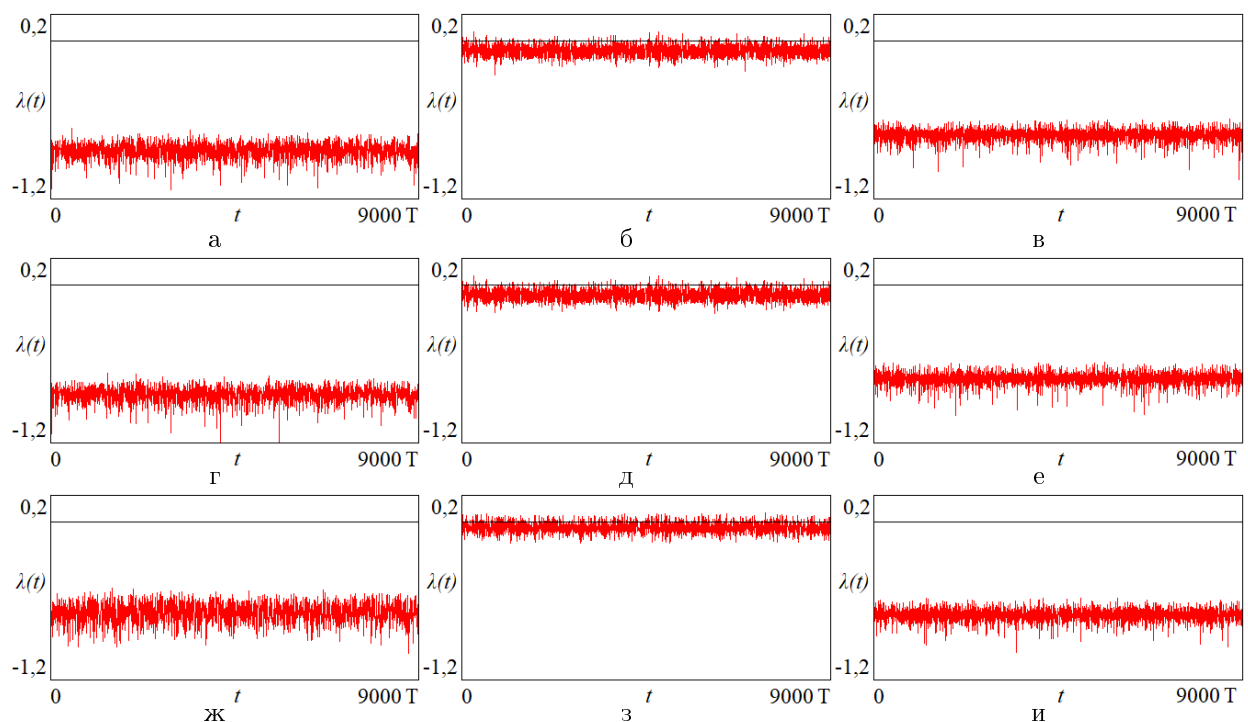


Рис. 2.20. Зависимость от времени локальных значений старшего условного показателя Ляпунова при наличии в канале полосы непропускания $f \in (0, 0.7)$ (а-в), $f \in (2, \infty)$ (г-е) и $f \in (0.9, 1.1)$ (ж-и). Сигналы ассоциируются с гиперболическим (а, г, ж), негиперболическим (б, д, з), странным нехаотическим (в, е, и) режимами.

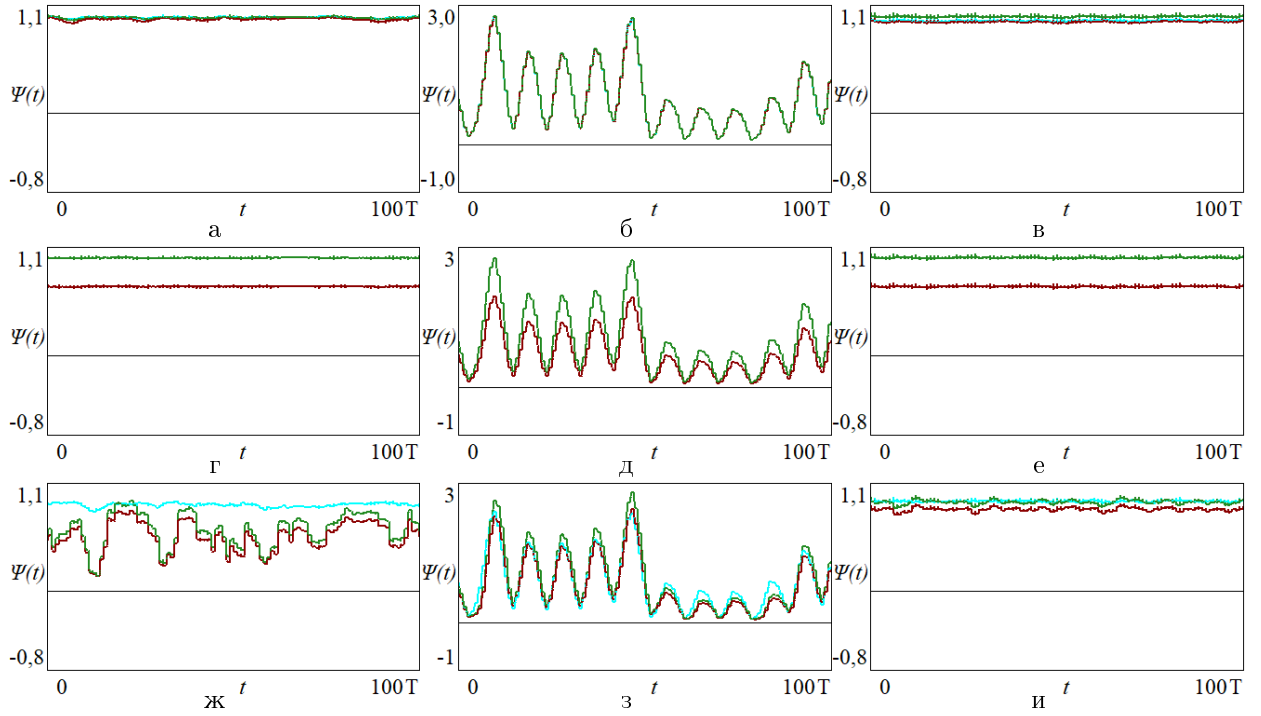


Рис. 2.21. Локальная корреляция между S_1 и S_2 (голубая кривая), S_2 и S_3 (красная кривая), S_1 и S_3 (зелёная кривая) при наличии в канале полосы непропускания $f \in (0, 0.7)$ (а-в), $f \in (2, \infty)$ (г-е) и $f \in (0.9, 1.1)$ (ж-и). Сигналы ассоциируются с гиперболическим (а, г, ж), негиперболическим (б, д, з), странным нехаотическим (в, е, и) режимами.

кальной корреляции в течение всего времени наблюдения указывает на принципиальную возможность детектирования информации. Лучше ситуация обстоит при высокочастотных искажениях ($f_1 = 2, f_2 \rightarrow \infty$): все три корреляционные (на рис. 2.21 *з,е*) зависимости приближаются к стабильным горизонтальным линиям с минимальными флуктуациями, что обеспечивает наилучшие условия для расшифровки передаваемой информации среди всех рассмотренных сценариев искажений.

Хуже обстоят дела при искажениях в окрестности основной частоты ($f_1 = 0.9, f_2 = 1.1$, рис. 2.21 *ж,и*). Для гиперболического хаоса корреляции S_1-S_3 и S_2-S_3 теряют устойчивость, демонстрируя хаотичные осцилляции значительной амплитуды, что существенно затруднит расшифровку. С другой стороны, корреляции для странного нехаотического аттрактора сохраняют удовлетворительную однородность с умеренными флуктуациями, что позволяет предполагать возможность приемлемого детектирования информации в данных условиях. Данное обстоятельство подтверждает, что сохранение части спектра в окрестности основного пика ($f = 1$) является достаточным для сохранения однородности локальных характеристик.

2.9 Выводы к Главе 2

Настоящая глава наглядно подтверждает принципиальные преимущества применения генераторов, характеризующихся свойством грубости, перед негрубыми генераторами в системах передачи информации. Во-первых, системы на базе грубых аттракторов демонстрируют значительно более устойчивые режимы обобщённой синхронизации, характеризуясь на порядок большими по модулю значениями полного старшего условного показателя Ляпунова. Во-вторых, системы на грубых аттракторах способны качественно воспроизводить динамику передатчика как при частотных искажениях в канале связи, так и при расстройке амплитудного параметра.

Ключевым подтверждением выдвинутой гипотезы об однородности во времени локальных характеристик является демонстрация этой однородности для локального старшего условного ляпуновского показателя $\lambda_c(t)$ и локальной корреляции $\psi(t)$. Последнее обеспечивает принципиальную возможность использования локальной корреляции для расшифровки информации. В отличие от этого, для негрубого хаоса характерны перемежающаяся синхронизация (появление значений $\lambda_c(t) > 0$) и выраженные всплески $\psi(t)$, делающие расшифровку невозможной.

У рассмотренных генераторов, в силу их конструкции, обнаружено фундаментальное ограничение: сколь угодно малая расстройка частотного параметра генератора приёмника относительно генератора передатчика, равно как и частотные потери вблизи основной несущей частоты передатчика, приводят к потере однородности локальных характеристик. При частотной расстройке возникает фазовое рассогласование, вызывающее периодические сбои возбуждения приёмника и, как следствие, биения локальной корреляции между сигналами передатчика и приёмника, что делает расшифровку невозможной. При искажениях вблизи основной несущей частоты также наблюдается рост неоднородностей в поведении $\psi(t)$. Это указывает на то, что устойчивая работа системы связи возможна лишь при условии совпадения несущей частоты с частотой генерации приёмника и сохранности её спектрального окружения.

Глава III

Построение и анализ математических моделей динамики бильярда с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей

В предыдущей главе было продемонстрировано, что свойство грубости динамических систем, используемых в качестве генераторов передатчика и приёмника, является ключевым преимуществом для реализации устойчивых схем связи на основе синхронизации. Оно обеспечивает установление и поддержание грубой обобщённой синхронизации. Однако это же самое свойство грубости является и недостатком с точки зрения конфиденциальности: для восстановления информации не обязательно точно знать параметры передатчика. Противоположным свойству грубости является концепция хрупкости [31–33]. Хрупкие системы характеризуются чувствительностью к малым возмущениям: сколь угодно малые изменения параметров или иные возмущения могут приводить к качественным изменениям в динамике. Эта экстремальная чувствительность делает хрупкие системы потенциально привлекательными для приложений, требующих высокого уровня безопасности связи. В отличие от грубых систем, в хрупких системах точное соответствие параметров передатчика и приёмника становится критически важным условием для успешного детектирования информации.

Интересными иллюстративными примерами хрупкости, в определённом смысле, могут служить системы с фазовым пространством, содержащим подпространство, внутри которого выполняется условие сохранения фазового объёма. Речь идет, например, про диссипативные системы, находящиеся под воздействием гамильтоновых или, в более общем случае, консервативных. В таких системах могут реализовываться притягивающие инвариантные множества, резко трансформирующиеся при сколь угодно малых

возмущениях даже не уравнений или параметров в них, а самой траектории. Они могут обладать несчётным количеством предельных множеств, в проекции на консервативное подпространство отвечающих континууму инвариантных траекторий ведущей подсистемы. Сколь угодно малое возмущение начальных условий в них может приводить к смене динамического режима.

Концептуальной основой для выявления таких «хрупких» систем, перспективных для задач безопасной коммуникации, как будет показано в настоящей и следующей главах, могут быть исследования динамики частицы в бильярде с геометрией типа волновода, обладающей одной гофрированной осциллирующей границей. По результатам данной главы будет введена в рассмотрение новая система, являющаяся одной из приближённых моделей указанного бильярда и демонстрирующая «хрупкую» чувствительность к возмущениям.

Мотивацией к исследованию бильярдов с осциллирующими границами послужила работа Ливорати, Лоскутова и Лионеля [120], в которой в бильярде типа «стадион» было продемонстрировано явление, интерпретированное как «демон Максвелла». Суть этого явления заключается в возникновении критического значения начальной скорости в случае слабой кривизны границы и малой амплитуды ее колебаний. Частицы с начальной скоростью ниже этого критического значения демонстрируют замедление, в то время как частицы с начальной скоростью выше критического значения испытывают неограниченный рост кинетической энергии, что соответствует феномену ускорения Ферми [121] – неограниченному росту средней скорости ансамбля частиц. Сам феномен ускорения Ферми в бильярдах с осциллирующими границами хорошо изучен как теоретически [122–124], так и численно [125–129]. В частности, теория, развитая в серии работ [130–132], установила, что условием возникновения ускорения Ферми в зависящих

от времени хаотических бильярдов является наличие хаотической динамики в соответствующем статическом бильярде. Кроме того, обнаружено, что в некоторых ситуациях ускорение Ферми может существенно замедляться [133] или подавляться [134–136]. Данное обстоятельство порождает интерес к исследованию появления феномена «демона Максвелла» для бильярдов и с иной, отличной от «стадиона», геометрией типа волновода. Модели подобного рода имеют большее значение для физических приложений (к примеру, могут быть полезны для описания так называемых распределенных оптоволоконных датчиков [137, 138]).

Таким образом настоящая глава посвящена построению и всестороннему анализу математических моделей бильярда с геометрией типа волновода с осциллирующей границей. Основными целями являются разработка иерархии приближенных моделей, описывающих динамику частицы; исследование режимов консервативного хаоса в этих моделях.

3.1 Вывод уравнений бильярда

Классический бильярд – это динамическая система, состоящая из частицы или ансамбля невзаимодействующих частиц, которые движутся внутри замкнутой области и упруго сталкиваются с её границей. Бильярд – популярный тип консервативных динамических систем, демонстрирующий как регулярную, так и хаотическую динамику и в настоящее время хорошо изучён [139–142]. Рассмотрим бильярд, граница которого состоит из двух стенок. Нижняя стенка ровная и неподвижная, а верхняя описывается функцией

$$F(x, t) = b \cos kx + a \cos \omega t + h. \quad (3.1)$$

Вид системы представлен на рис. 3.1, где: x_n – координата n -го соударения с верхней стенкой; α_n – угол между перпендикуляром, проведённым от нижней стенки до точки соударения, и вектором скорости v_n ; v_n – скорость

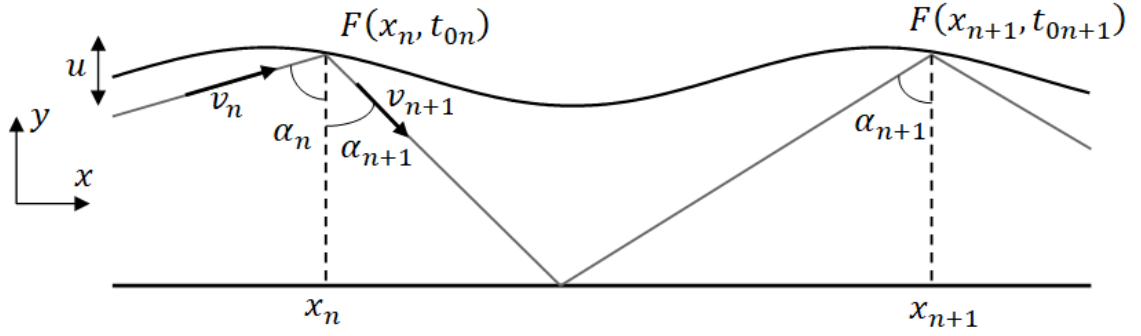


Рис. 3.1. Схематическая иллюстрация системы.

частицы после $(n - 1)$ -го соударения о верхнюю стенку; t_{0n} – время, которое прошло с момента начала движения частицы до момента n -го удара о верхнюю стенку.

Для получения отображения, описывающего систему, нужно поэтапно решить несколько задач. Для начала рассмотрим задачу, в которой частица ударяется о подвижную стенку. Скорость стенки во время соударения:

$$u_n = F'_t(x_n, t_{0n}) = -a\omega \cos \omega t. \quad (3.2)$$

Введем ортогональную систему координат, в которой ось y' параллельна касательной к стенке в точке соударения, а ось x' перпендикулярна ей, как показано на рис. 3.2. Данная система координат связана с исходной нештрихованной системой xy поворотом на угол γ_n – угол наклона касательной. На рисунке также показаны: δ – угол между вектором скорости частицы и касательной, β – угол между вектором скорости стенки u_n и касательной. Скорость $v_{n_{\text{отн.}}}$ в системе отсчёта, связанной со стенкой, в момент удара можно записать в проекциях:

$$v_{n_{\text{отн.}}x'} = v_n \sin \delta - u \sin \beta, \quad (3.3)$$

$$v_{n_{\text{отн.}}y'} = v_n \cos \delta - u \cos \beta. \quad (3.4)$$

Пусть при ударе о границу частица теряет часть нормальной компоненты скорости, пропорциональную величине ε . Также, после удара, знак $v_{\text{отн.}x'}$

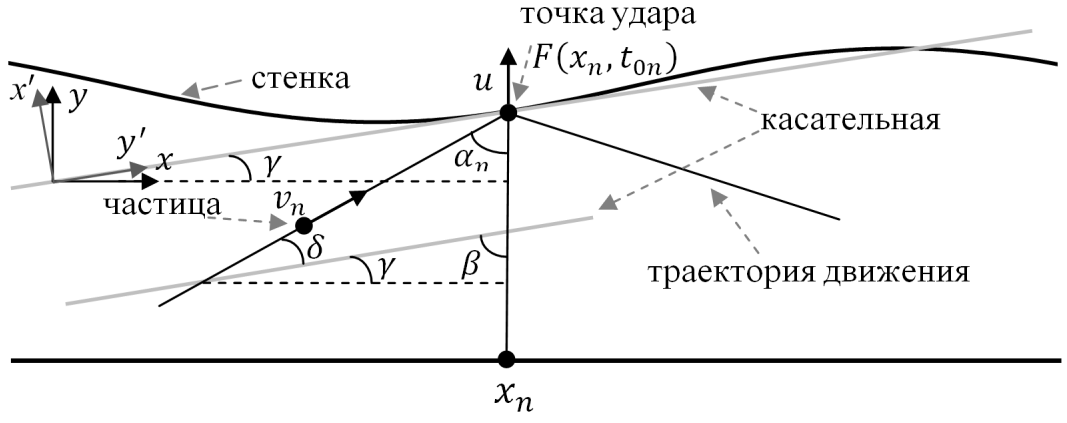


Рис. 3.2. Схема движения частицы в волноводе.

меняется на противоположный. В исходной системе отсчёта можно записать:

$$v_{n+1_{x'}} = (1 - \varepsilon)(-v_n \sin \delta + u \sin \beta) + u \sin \beta, \quad (3.5)$$

$$v_{n+1_{y'}} = v_n \cos \delta, \quad (3.6)$$

$v_{n+1_{x'}}$ и $v_{n+1_{y'}}$ – проекции скорости после удара v_{n+1} на оси x' и y' .

С помощью рис. 3.2 можно выразить углы δ и β следующим образом:

$$\delta = 90 - \alpha_n - \gamma_n, \quad \beta = 90 - \gamma_n, \quad (3.7)$$

где γ_n – угловой коэффициент касательной:

$$\gamma_n = \arctg F'_x(x_n, t_{0n}) = \arctg(-kb \sin kx_n), \quad (3.8)$$

Подставим (3.7) в (3.5) и (3.6), получим:

$$v_{n+1_{x'}} = (1 - \varepsilon)[-v_n \cos(\alpha_n + \gamma_n) + u \cos \gamma_n] + u \cos \gamma_n, \quad (3.9)$$

$$v_{n+1_{y'}} = v_n \sin(\alpha_n + \gamma_n). \quad (3.10)$$

Перейдём в нештрихованные координаты, спроектировав $v_{n+1_{x'}}$ и $v_{n+1_{y'}}$ на оси x и y :

$$v_{n+1_x} = v_{n+1_{y'}} \cos \gamma_n - v_{n+1_{x'}} \sin \gamma_n; \quad (3.11)$$

$$v_{n+1_y} = v_{n+1_{y'}} \sin \gamma_n + v_{n+1_{x'}} \cos \gamma_n. \quad (3.12)$$

Подставим (3.9) и (3.10) в (3.11) и (3.12), получим:

$$v_{n+1_x} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})v_n \sin(\alpha_n + 2\gamma_n) + \frac{\varepsilon}{2}v_n \sin \alpha_n - (1 - \frac{\varepsilon}{2})u_n \sin 2\gamma_n, \quad (3.13)$$

$$v_{n+1_y} = -(1 - \frac{\varepsilon}{2})v_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n) + (1 - \frac{\varepsilon}{2})u_n (\cos 2\gamma_n + 1) + \frac{\varepsilon}{2}v_n \cos \alpha_n. \quad (3.14)$$

Воспользуемся приближением $kb \ll 1$, тогда:

$$\gamma_n \approx -kb \sin kx_n, \quad (3.15)$$

$$\cos 2\gamma_n \approx 1, \quad \sin 2\gamma_n \approx 2\gamma_n. \quad (3.16)$$

Подставим (3.16) в (3.13) и (3.14) для получения приближённых уравнений:

$$v_{n+1_x} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})v_n \sin(\alpha_n + 2\gamma_n) + \frac{\varepsilon}{2}v_n \sin \alpha_n - 2(1 - \frac{\varepsilon}{2})\gamma_n u_n, \quad (3.17)$$

$$v_{n+1_y} = -(1 - \frac{\varepsilon}{2})v_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n) + \frac{\varepsilon}{2}v_n \cos \alpha_n + 2(1 - \frac{\varepsilon}{2})u_n. \quad (3.18)$$

Новый угол α_{n+1} можно определить как:

$$\alpha_{n+1} = \arctg \left(-\frac{v_{n+1_x}}{v_{n+1_y}} \right). \quad (3.19)$$

Здесь знак « $-$ » стоит потому, что угол отсчитывается от отрицательного направления оси y .

Далее определим координату и время для следующего удара:

$$x_{n+1} = x_n + (F(x_n, t_{0n}) + F(x_{n+1}, t_{0n+1})) \tan \alpha_{n+1}. \quad (3.20)$$

Воспользуемся приближением статичной стенки со слабой гофрировкой $a, b \ll h$; $a\omega, bk \ll 1$, тогда:

$$x_{n+1} \approx x_n - 2h \frac{v_{n+1_x}}{v_{n+1_y}}. \quad (3.21)$$

Подобное приближение часто используется [120, 143, 144] для получения отображения в явном виде. Оценка влияния такого приближения приведена в разделе 3.2.

Время, за которое частица пройдет от точки соударения x_n до точки соударения x_{n+1} , можно найти по следующей формуле:

$$t_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{v_{n+1_x}} = -\frac{2h}{v_{n+1_y}}. \quad (3.22)$$

Тогда время, которое прошло с момента начала движения частицы до момента $(n + 1)$ -го удара о верхнюю стенку:

$$t_{0n+1} = t_{n+1} + t_{0n}. \quad (3.23)$$

Соберём формулы вместе:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{n+1x} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})v_n \sin(\alpha_n + 2\gamma_n) + \frac{\varepsilon}{2}v_n \sin \alpha_n - 2(1 - \frac{\varepsilon}{2})\gamma_n u_n, \\ v_{n+1y} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})v_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n) - \frac{\varepsilon}{2}v_n \cos \alpha_n - 2(1 - \frac{\varepsilon}{2})u_n, \\ v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1x}^2 + v_{n+1y}^2}, \\ \alpha_{n+1} = \arctan\left[\frac{v_{n+1x}}{v_{n+1y}}\right], \\ x_{n+1} = x_n + 2h \frac{v_{n+1x}}{v_{n+1y}}, \\ t_{0n+1} = t_{0n} + \frac{2h}{v_{n+1y}}. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Выражения для v_{n+1} , α_{n+1} , x_{n+1} , t_{0n+1} задают четырёхмерное отображение.

Сделаем следующие замены:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= kx_n, \quad \psi_n = \omega t_{0n}, \quad \Omega_{n,x,y} = \frac{v_{n,x,y}}{2h\omega}, \\ A &= 2hk, \quad B = \frac{a}{h}, \quad C = bk. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Получим четырехпараметрическую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{n+1x} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})\Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma_n) + \frac{\varepsilon}{2}\Omega_n \sin \alpha_n - (2 - \varepsilon)\gamma_n u_n, \\ \Omega_{n+1y} = (1 - \frac{\varepsilon}{2})\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n) - \frac{\varepsilon}{2}\Omega_n \cos \alpha_n - (2 - \varepsilon)u_n, \\ \Omega_{n+1} = \sqrt{\Omega_{n+1x}^2 + \Omega_{n+1y}^2}, \\ \alpha_{n+1} = \arctg\left(\frac{\Omega_{n+1x}}{\Omega_{n+1y}}\right), \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \frac{\Omega_{n+1x}}{\Omega_{n+1y}}, \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{\Omega_{n+1y}}, \end{array} \right. \quad (3.26)$$

здесь $\gamma_n = -C \sin \varphi_n$, $u_n = -B \sin \psi_n$, Ω_n – безразмерная скорость, Ω_{n_x} и Ω_{n_y} – проекции Ω_n на соответствующие координатные оси, α_n – угол падения на стенку, φ_n – фаза пространственных колебаний стенки, ψ_n – фаза

временных колебаний стенки, A – безразмерное расстояние между стенками, B – безразмерная амплитуда временных колебаний стенки, C – безразмерная амплитуда пространственных колебаний (гофрировки) стенки, ε – параметр, отвечающий за диссипацию. С учетом физического смысла переменные φ_n и ψ_n определены на $[-\pi, \pi]$, а α_n – на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Если для данной системы положить $\varepsilon = 0$ (консервативный случай) и $B = 0$ (неподвижная стенка), то отображение сводится к модельной системе Теннисона-Либермана-Лихтенберга [145]:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2C \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \tan \alpha_{n+1}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Устройство фазового пространства такой системы типично для неинтегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы: имеются области с регулярными траекториями – КАМ-торы и области хаоса, которые формируются разрушенными торами¹. Регулярный или хаотический режим будет наблюдаться в зависимости от начальных условий.

На рис. 3.3 показано устройство фазового пространства системы (3.27) при различной амплитуде гофрировки границы (параметр C). В случае слабой нелинейности $C = 0.05$ (рис. 3.3а) большая часть фазового пространства заполнена инвариантными кривыми. Частоты инвариантных торов обусловлены двумя основными типами движения частицы: колебаниями между стенками (вертикальное движение), характерный масштаб которых связан с параметром A , и перемещением вдоль стенок (горизонтальное движение), характерный масштаб которых связан с параметром C . В центре ($\alpha = \varphi = 0$) расположена эллиптическая неподвижная точка. Ги-

¹Широкий класс консервативных систем составляют гамильтоновы системы. Известно, что в интегрируемых гамильтоновых системах траектории могут находиться только на поверхности торов, т.е. возможны только квазипериодические и периодические (резонансные) режимы. В неинтегрируемых системах вследствие разрушения резонансных торов появляются хаотические режимы. Сценарий их появления с ростом амплитуды возмущения хорошо известен (см., например, [134, 146]).

перболические точки расположены по краям рисунка ($\alpha = 0, \varphi = \pm\pi$). Разрушенные торы формируют «толстый» хаотический слой. Также можно видеть цепочки неподвижных точек и островки устойчивости в хаотическом слое. При $C = 0.1$ часть инвариантных торов разрушается, что ведет к увеличению хаотического слоя (рис. 3.3б). Из-за разрушения резонансов появляется всё больше цепочек неподвижных точек. Хорошо виден «тонкий» хаотический слой, образовавшийся в результате расщепления сепаратрисы и отделённый от «толстого» инвариантными кривыми. В случае достаточно большой нелинейности ($C = 0.3$) почти все структуры разрушены и наблюдается обширное хаотическое море с островками устойчивости в нём (рис. 3.3в). Фактически, параметр C – параметр неинтегрируемости: с его увеличением разрушается больше квазипериодических торов, и всё больше резонансов распадается на пары неподвижных точек.

На рис. 3.4 представлены изменения структуры фазового пространства при варьировании параметра A . Можно заметить, что при изменении этого параметра структура фазового пространства качественно не изменяется, однако изменяется размер хаотической области и островков устойчивости.

3.2 Динамика бильярда в консервативном случае

Рассмотрим консервативный случай ($\varepsilon = 0$) при $A, B, C \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{n+1_x} = \Omega_n \sin(\alpha_n - 2C \sin \varphi_n) - 2BC \sin \varphi_n \sin \psi_n; \\ \Omega_{n+1_y} = \Omega_n \cos(\alpha_n - 2C \sin \varphi_n) + 2B \sin \psi_n; \\ \Omega_{n+1} = \sqrt{\Omega_{n+1_x}^2 + \Omega_{n+1_y}^2}; \\ \alpha_{n+1} = \arctg \left(\frac{\Omega_{n+1_x}}{\Omega_{n+1_y}} \right); \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \frac{\Omega_{n+1_x}}{\Omega_{n+1_y}}; \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{\Omega_{n+1_y}}. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

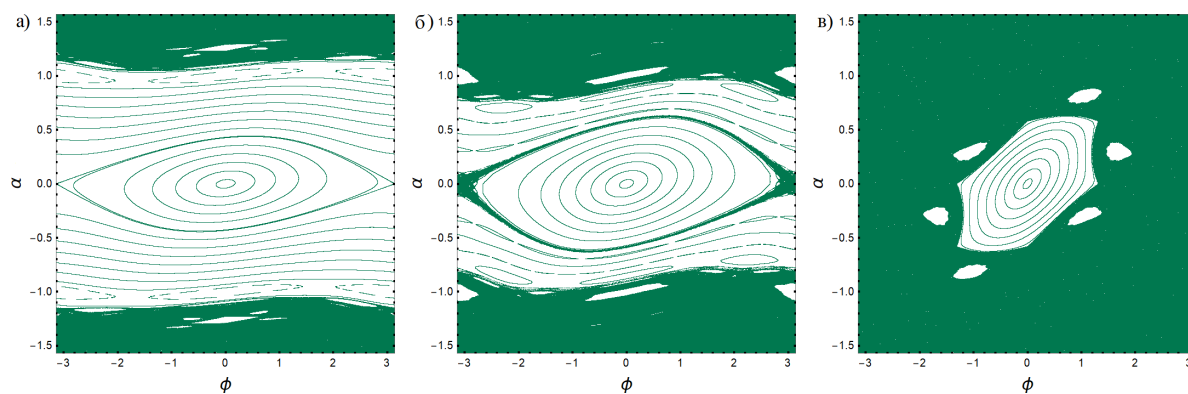


Рис. 3.3. Фазовый портрет системы (3.27) при параметрах $A = 2$ и $C = 0.05$ (а), 0.1 (б) и 0.3 (в).

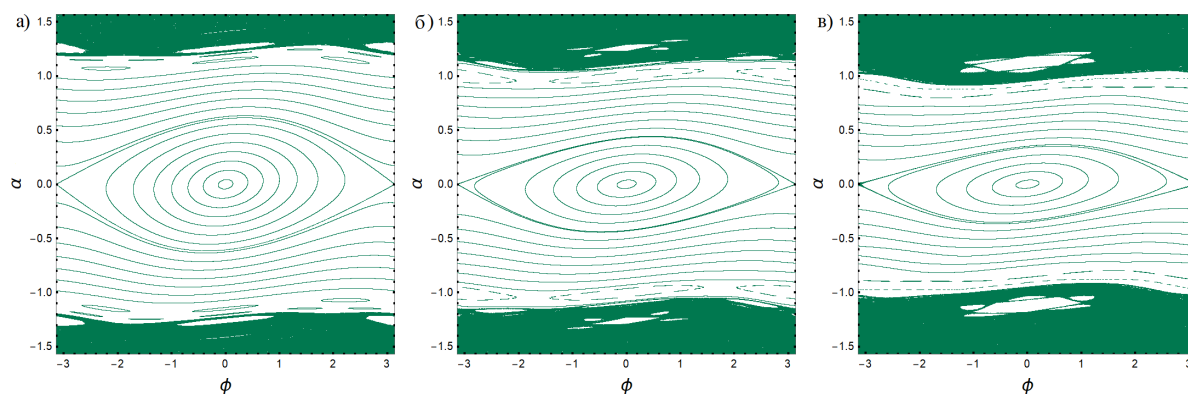


Рис. 3.4. Фазовый портрет системы (3.27) при параметрах $C = 0.05$ и $A = 1$ (а), 2 (б) и 3 (в).

Зафиксируем расстояние между стенками $A = 2$ и два значения амплитуды гофрировки $C = 0.05$ и $C = 0.3$. Начальные условия заданы в виде решётки ($\Omega_0 = 0.42 + 0.14i$, $i = 0..4$, $\alpha_0 = 0.064 + 0.068j$, $j = 0..4$), где $\varphi_0 = 1$ и $\psi_0 = 4.14$ постоянные. Фазовые портреты системы (3.28) приведены в двух проекциях на плоскость «координата-угол» (φ, α) и на плоскость «скорость-время» (Ω, ψ) .

При $C = 0.05$ и $B = 0$ фазовые траектории являются квазипериодическими, а скорость остаётся постоянной (рис. 3.5а,б). При задании малых колебаний границы $B = 0.002$ появляется дополнительный временной масштаб и, как следствие, третья частота, из-за чего траектории больше не лежат на поверхности двумерных торов (рис. 3.5в,г). При $B = 0.01$ часть ранее регулярных траекторий становится хаотичной, наблюдается движение траекторий между областями торов и хаоса, что является следствием проявления диффузии Арнольда² (рис. 3.5д,е). При $B = 0.1$ разрушается больше торов, хаотические слои расширяются и максимальная скорость ($\Omega_{\max} \sim 5$) заметно превышает начальные значения (рис. 3.5ж,з).

В случае сильной неинтегрируемости ($C = 0.3$) и отсутствии колебаний стенки ($B = 0$) хаос присутствует в большей части фазового пространства; на проекциях чётко видны вторичные островки устойчивости (рис. 3.6а,б). Скорость Ω_n в этом случае очевидно остаётся постоянной при $B = 0$. При задании малых колебаний границы $B = 0.002$ также наблюдаются трёхчастотные торы (рис. 3.6в,г). Видно, что амплитуда колебаний скорости при $C = 0.3$ больше, чем при $C = 0.05$. При $B = 0.01$ уже наблюдается проявление диффузии Арнольда: красные траектории (с наименьшей

²Диффузия Арнольда – это медленный хаотический дрейф траекторий в фазовом пространстве систем, происходящий вдоль резонансных торов [147]. Она возникает в неинтегрируемых гамильтоновых системах с тремя и более степенями свободы, поскольку в двумерных системах хаотическое движение ограничено областями с инвариантными торами. Во многомерных системах сохранившиеся торы не изолируют области хаоса полностью, из-за чего образуется сложная сеть хаотических слоёв, позволяющая траекториям «перетекать» между разными областями фазового пространства.

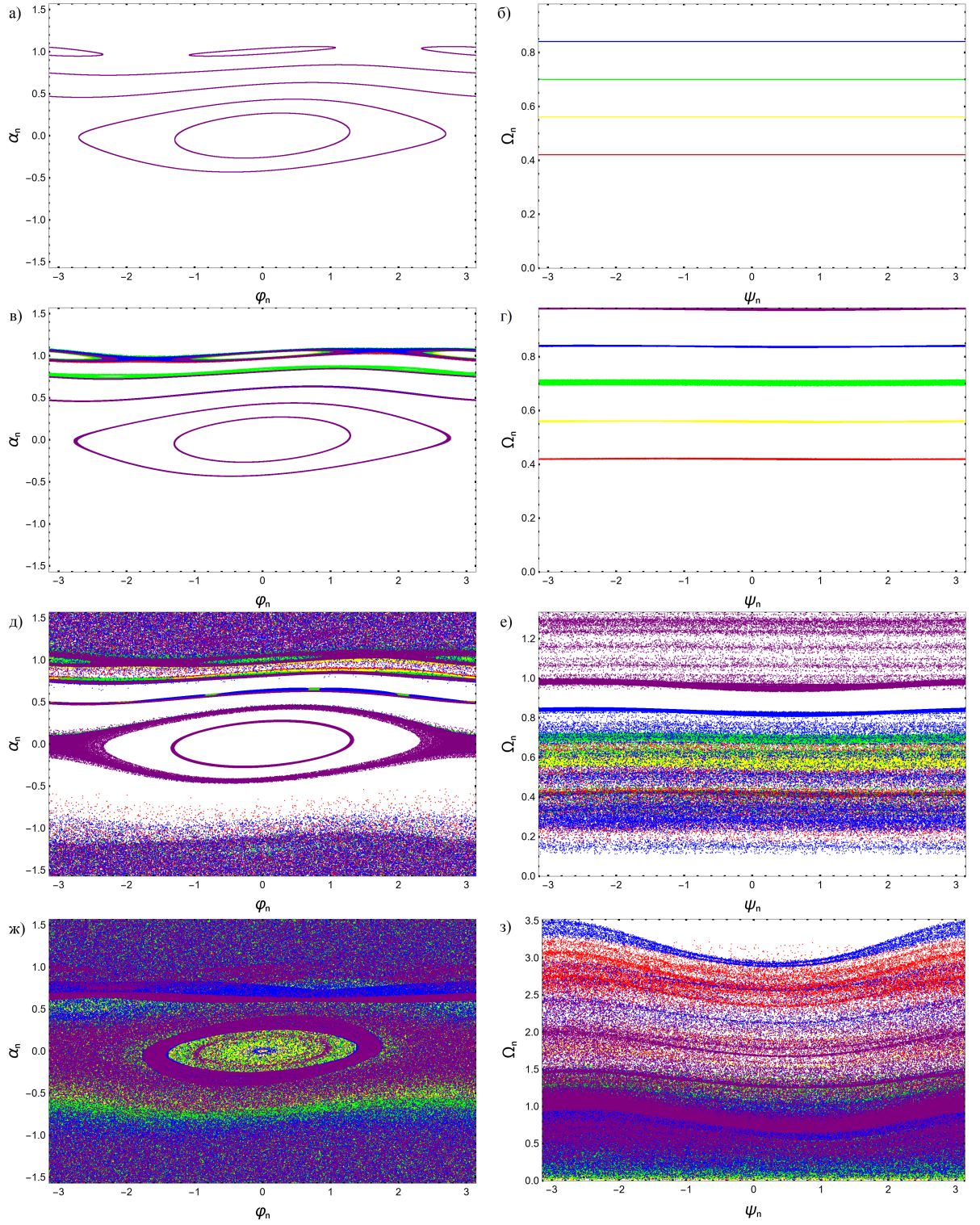


Рис. 3.5. Проекция на плоскость (φ, α) (слева) и на плоскость (Ω, ψ) (справа) фазового портрета системы (3.28) при $A = 2.0$, $C = 0.05$, $B = 0$ (а, б), $B = 0.002$ (в, г), $B = 0.01$ (д, е), $B = 0.1$ (ж, з). Цвет траектории зависит от начальной скорости: $\Omega_0 = 0.42$ – красный, $\Omega_0 = 0.56$ – жёлтый, $\Omega_0 = 0.70$ – зелёный, $\Omega_0 = 0.84$ – синий, $\Omega_0 = 0.98$ – фиолетовый.

начальной скоростью) попадают как в область инвариантных торов, так и в хаотическую область (рис. 3.6*d,e*), что указывает на более раннее и интенсивное «перетекание» между областями фазового пространства. При $B = 0.1$ фазовое пространство почти полностью заполнено хаотическим морем, регулярные траектории в проекциях не наблюдаются, а значения скоростей могут быть существенными ($\Omega_n \sim 100$).

3.3 Ускорение Ферми

Для того, чтобы пронаблюдать ускорение Ферми, согласно работам [130–132] необходимо выбрать начальные условия такие, чтобы в случае статичных стенок наблюдался хаос. Статический бильярд описывается уравнением (3.27). Зафиксируем параметры $A = 2.0$, $C = 0.05$ и выберем ансамбль из 210 систем с начальными условиями, заданными в виде равномерной квадратной решетки в хаотической области $\varphi_0 \in [0, \pi]$, $\alpha_0 \in [0.35\pi, 0.4\pi]$ (21 начальных значений φ_0 и 10 начальных значений α_0).

Теперь, чтобы пронаблюдать ускорение Ферми, вернемся к системе (3.28) и выберем ансамбль 4410 систем со следующими начальными условиями: для каждой системы начальная скорость (Ω_0) одинаковая, начальные значения других переменных выбраны на равномерной кубической решётке $\varphi_0 \in [0, \pi]$, $\alpha_0 \in [0.35\pi, 0.4\pi]$, $\psi_0 \in [0, \pi]$ (21 начальное значение φ_0 и 10 начальных значений α_0 , аналогичные статичному случаю, и 21 начальное значение ψ_0).

Зафиксируем параметры $A = 2.0$, $C = 0.05$ и будем менять значение параметра B , при этом будем вычислять усреднённую по ансамблю скорость после 2×10^6 итераций ($\Omega_{2 \times 10^6}$) отображения для различных начальных скоростей. Построенные графики представлены на рис. 3.7.

Заметим, что три кривые, соответствующие $\Omega_0 = 0.1$, $\Omega_0 = 1.0$, $\Omega_0 = 1.5$, очень близки друг к другу в диапазоне значений B от 0.01 до 0.04. Начиная

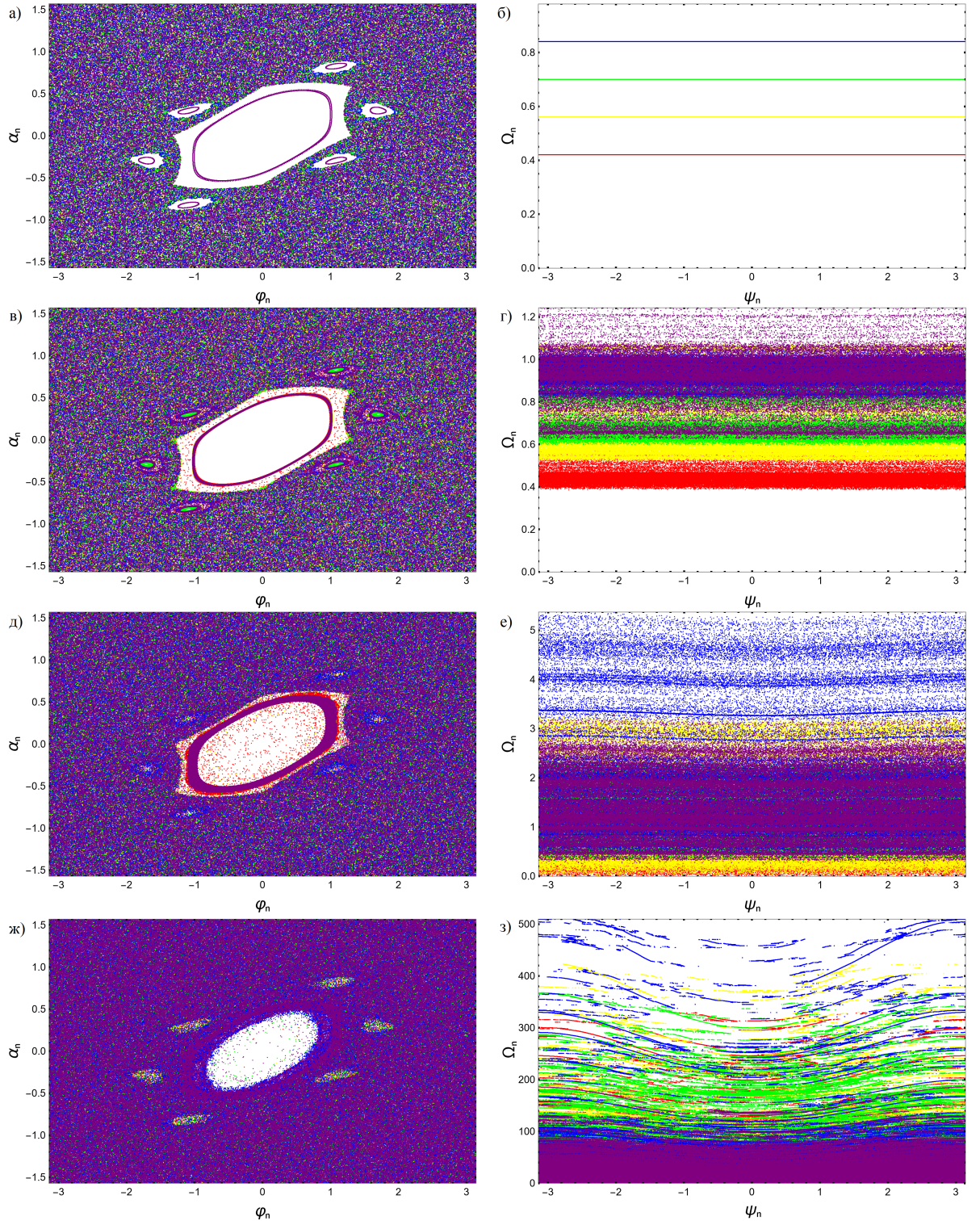


Рис. 3.6. Проекции на плоскость (φ, α) (слева) и на плоскость (Ω, ψ) (справа) фазового портрета системы (3.28) при $A = 2.0$, $C = 0.3$, $B = 0$ (а, б), $B = 0.002$ (в, г), $B = 0.01$ (д, е), $B = 0.1$ (ж, з). Цвет траектории зависит от начальной скорости: $\Omega_0 = 0.42$ – красный, $\Omega_0 = 0.56$ – жёлтый, $\Omega_0 = 0.70$ – зелёный, $\Omega_0 = 0.84$ – синий, $\Omega_0 = 0.98$ – фиолетовый.

с определённого значения амплитуды, эти кривые начинают быстро расти. При этом другие кривые всегда расположены над ними. Можно предположить, что существует область амплитуды колебаний, в которой частицы, начальная скорость которых ниже определённого значения – критического значения $\Omega_{\text{кр}}$, начинают двигаться с примерно одинаковой (общей) скоростью. Если начальная скорость частиц выше $\Omega_{\text{кр}}$, то они ускоряются. Кроме того, по этой перекрывающейся части можно оценить область амплитуды колебаний, в которой наблюдается движение с такой общей скоростью (примерный диапазон $B \in (0.01, 0.04)$).

Теперь рассмотрим динамику средней по ансамблю скорости при различных значениях B . На рис. 3.8 изображён график зависимости средней скорости от числа итераций системы (3.28) для двух ансамблей: из 10140 начальных условий (красные кривые) и из 4410 (синие кривые). Сравнение динамики средней скорости для разного количества ансамблей позволяет убедиться в том, что количество начальных условий 4410 является достаточным для анализа поведения системы.

При $B = 0.01$ (рис. 3.8*а*) и $B = 0.03$ (рис. 3.8*б*) можно заметить, что графики с начальной скоростью ниже критического значения $\Omega_{\text{кр}} \approx 1.8$ стремятся к общей скорости. У траекторий, начальная скорость которых превышает $\Omega_{\text{кр}}$, скорость растёт с количеством итераций. На самом деле, общая скорость не является постоянной величиной; она медленно растёт с увеличением числа итераций. Между графиками можно заметить два значительных отличия. Во-первых, в значениях общей скорости: для рис. 3.8*а* общая скорость через 2×10^6 итераций ≈ 1.45 ; для рис. 3.8*б* общая скорость через 2×10^6 итераций ≈ 1.10 . Во-вторых, в быстроте сходимости средних скоростей частиц, начальная скорость которых ниже критического значения, к общей скорости: средние скорости на рис. 3.8*а* достигают общей скорости за время порядка $\approx 1.5 \times 10^6$ итераций; средние скоро-

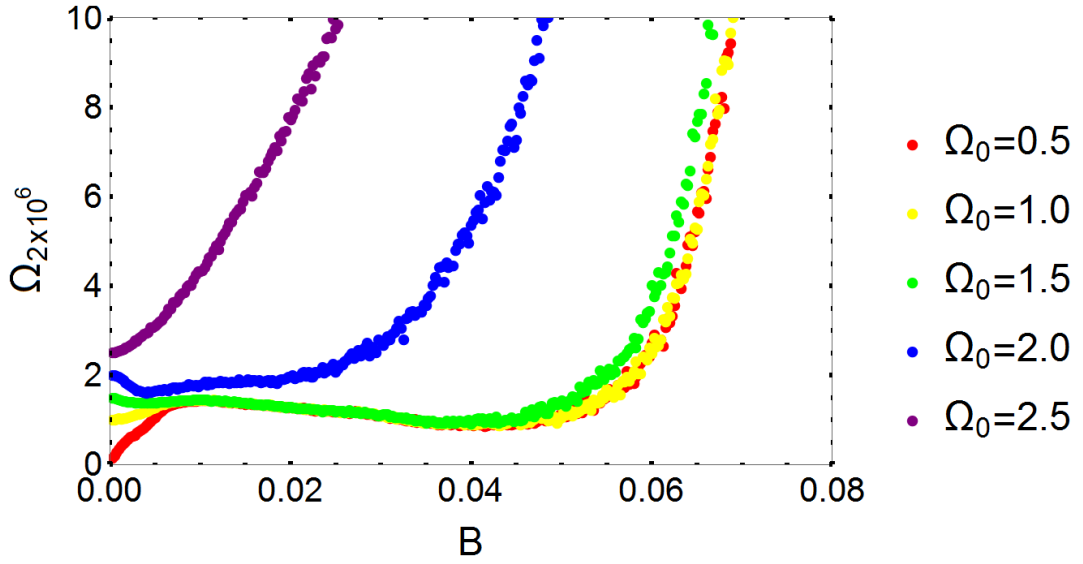


Рис. 3.7. Зависимость усредненной по ансамблю скорости после 2×10^6 итераций ($\Omega_{2 \times 10^6}$) системы (3.28) с параметрами $A = 2, C = 0.05$ от амплитуды колебаний B . Цвет кривой показывает начальную скорость (Ω_0).

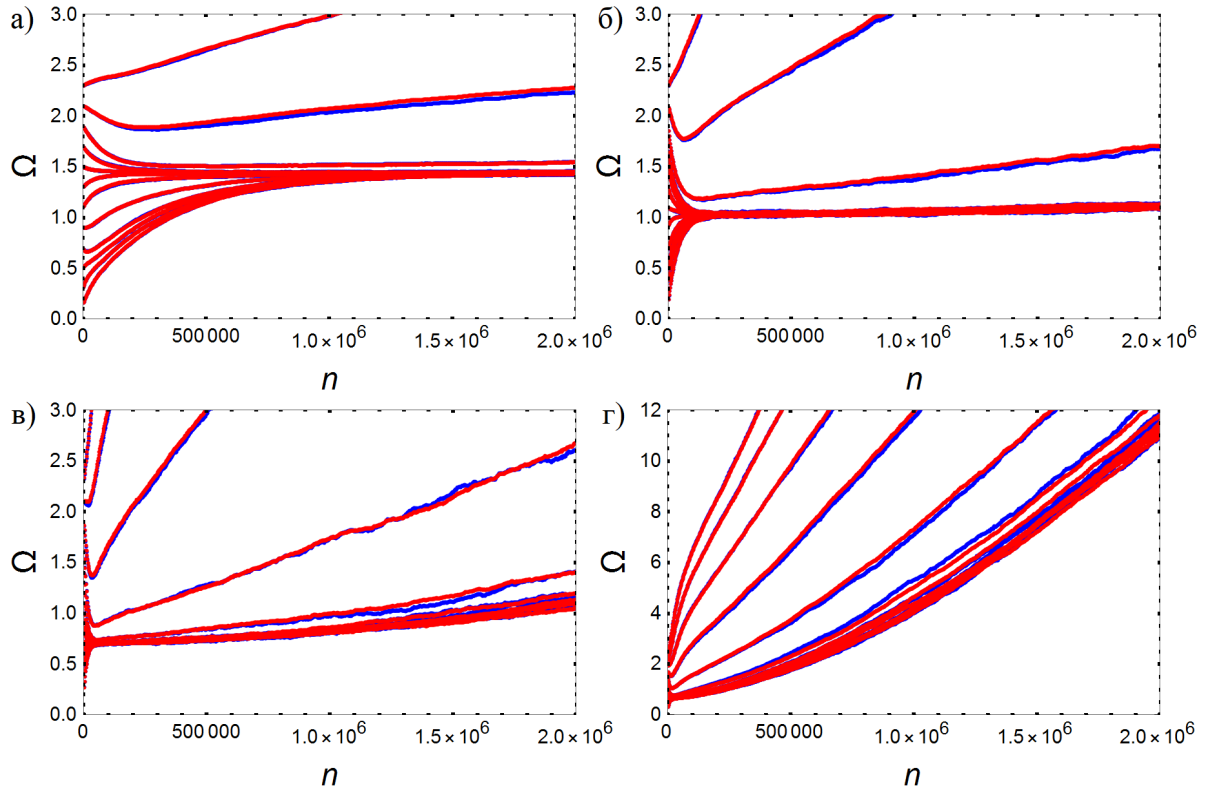


Рис. 3.8. Зависимость усредненной по ансамблю скорости от числа итераций системы (3.28) при параметрах $A = 2, C = 0.05$ и (а) $B = 0.01$, (б) $B = 0.03$, (в) $B = 0.05$, (г) $B = 0.07$. Начальная скорость Ω_0 выбирается из диапазона от 0.5 до 2.3 с шагом 0.2. Цвет кривой зависит от количества начальных условий: синий – 4410, красный – 10140.

сти на рис. 3.8б достигают общей скорости чуть меньше, чем за 2×10^5 итераций.

Когда у ансамбля частиц начальная скорость ниже Ω_{cr} , их средняя скорость стремится к общей, которая медленно увеличивается с числом итераций. Такую ситуацию будем называть медленным ускорением Ферми. Если у ансамбля частиц начальная скорость выше Ω_{cr} , тогда их скорость неограниченно растёт, как при классическом ускорении Ферми. Причем этот рост значительно быстрее, чем рост общей скорости. По этой причине данную ситуацию будем называть классическим или быстрым ускорением Ферми. Эффект в данной системе похож на эффект типа демон Максвелла в бильярде [120] наличием определенного (критического) значения начальной скорости, выше которого начинается классическое ускорение Ферми, но не идентичен ему из-за того, что у частиц, начальная скорость которых ниже критического значения, средняя скорость не уменьшается до нулевого значения, а стремится к общей. Предполагается, что такое отличие возникает из-за того, что в системе существуют как фокусирующие, так и рассеивающие элементы границы, в отличие от бильярда типа «стадион».

При $B = 0.05$ (рис. 3.8в) и $B = 0.07$ (рис. 3.8г) наблюдается аналогичный эффект, однако общая скорость заметно увеличивается с ростом числа итераций: через 2×10^6 итераций она составляет примерно 1.1 для рис. 3.8в и примерно 11 для рис. 3.8г. Значение критической скорости для рис. 3.8в ≈ 1.4 ; для рис. 3.8г ≈ 1.2 , однако на рисунке скорость изменения общей скорости сравнима с ростом средней скорости при начальной скорости выше критического значения. В таком случае отличия между медленным и быстрым ускорением Ферми малозаметны, и будем считать, что критическая скорость при $B = 0.07$ на такие режимы не разделяет.

Исходя из рис. 3.8, можно сделать следующие существенные выводы. Во-первых, данные для 10140 начальных условий хорошо совпадают с дан-

ными для меньшего числа начальных условий в ансамбле. Это означает, что количество 4410 начальных условий является достаточным для статистического анализа системы. Во-вторых, в системе может появляться критическое значение начальной скорости. В этом случае значения скорости Ω на траекториях, у которых начальная скорость ниже этого критического значения, стремятся к общей скорости. В-третьих, существует область значений параметра B , в которой эта общая скорость медленно увеличивается со временем. Можно предположить, что в этой ситуации траектории, движущиеся с общей скоростью, имеют медленное ускорение Ферми, а траектории, имеющие начальную скорость выше критической, имеют быстрое (классическое) ускорение Ферми.

Чтобы увидеть различия в росте скорости частиц при разных начальных скоростях, был построен график разницы ($\Delta\Omega$) усредненных по ансамблю скоростей после 3×10^6 итераций и 2×10^6 итераций (фактически, это можно назвать усредненным ускорением) в зависимости от начальной скорости при различном параметре B (рис. 3.9). На рис. 3.9а показан этот график для параметров $A = 2, C = 0.05$ при различном параметре B . Значения параметра B и цвета показаны на рисунке. Можно видеть, что при $B = 0.05$ и меньших кривые имеют горизонтальный сегмент, близкий к нулю, за которым следует возрастающий сегмент. Значение $\Delta\Omega$ остается почти постоянным при малом $\Delta\Omega$. При $B = 0.07$ трудно разделить кривую на несколько этапов из-за большого разброса значений ускорения. Произведём линейную аппроксимацию горизонтальной и возрастающей частей кривых (например, рис. 3.9а). Находя точку пересечения этих линий, можно оценить критическую скорость (Ω_{cr}): для кривой $B = 0.03$ $\Omega_{\text{cr}} \approx 1.95$; для кривой $B = 0.05$ $\Omega_{\text{cr}} \approx 1.75$. На рис. 3.9б показан график для $A = 3, C = 0.05$. Качественные отличия от рис. 3.9а не наблюдаются, однако абсолютные значения ускорений различны. Похожая ситуация наблюдается и при па-

раметрах $A = 2, C = 0.06$ (рис. 3.9*в*), однако кривая при $B = 0.07$ имеет область, где ускорение уменьшается с увеличением начальной скорости.

Теперь вычислим диапазон параметра B , в котором можно наблюдать медленное и быстрое ускорение Ферми. Для этого построим график зависимости значения $\Delta\Omega$, соответствующего горизонтальному участку зависимости от Ω_0 (например, значение $\Delta\Omega$ при $\Omega_0 = 1.0$), от амплитуды колебаний границы (рис. 3.10).

Кривые построены для различных значений параметров A и C . Для $B < 0.07$ эти графики хорошо аппроксимируются выражением $\Delta\Omega = ae^{cB} + b$, где a, b, c – константы, характерные для каждой кривой. Будем считать, что до значения B_{cr} , при котором такая зависимость $\Delta\Omega(B)$ становится в e раз больше значения при $\Delta\Omega(0.01)$, в исследуемой системе существует Ω_{cr} . Предполагается, что нет разделения на быстрое и медленное ускорение Ферми, когда амплитуда колебаний границы больше B_{cr} . Результаты расчета B_{cr} по этому методу приведены в таблице 3.1. Видно, что значение B_{cr} уменьшается с увеличением параметров A и C .

Также необходимо рассмотреть зависимость критической скорости от амплитуды колебаний. На рис. 3.11*а* эта зависимость показана для различных значений параметров A и C . Кривые кажутся довольно похожими. Квадратичные аппроксимации данных представлены на рис. 3.11*б*. Видно, что критическая скорость не превышает 2.0 для всех кривых при $B \in (0, B_{\text{cr}})$ (B_{cr} различен для каждой кривой). При $B \approx 0.024$ значения критических скоростей имеют минимальный разброс значений для различных параметров. До $B \approx 0.05$ значения критических скоростей превышают 1.5. При $B \approx 0.06$ некоторые кривые имеют большую погрешность расчета из-за того, что область линейного роста становится меньше (рис. 3.9), а разброс кривой становится больше. Следовательно, неверно определять критическую скорость в случае, когда $B > B_{\text{cr}}$.

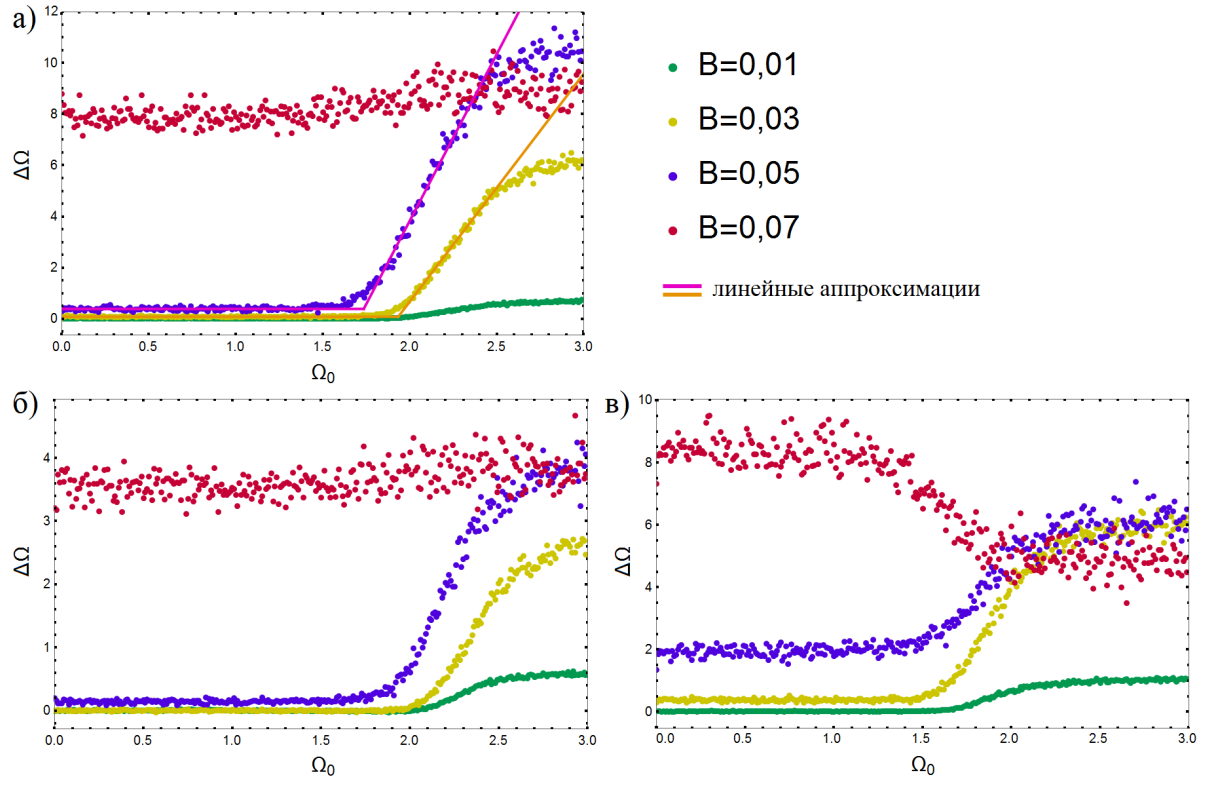


Рис. 3.9. Зависимость разницы между усредненной по ансамблю скоростью после 3×10^6 итераций и 2×10^6 итераций ($\Delta\Omega$) системы уравнений (3.28) от начальной скорости для различных значений амплитуды колебаний – параметра B . Параметры: (а) $A = 2, C = 0.05$; (б) $A = 3, C = 0.05$; (в) $A = 2, C = 0.06$.

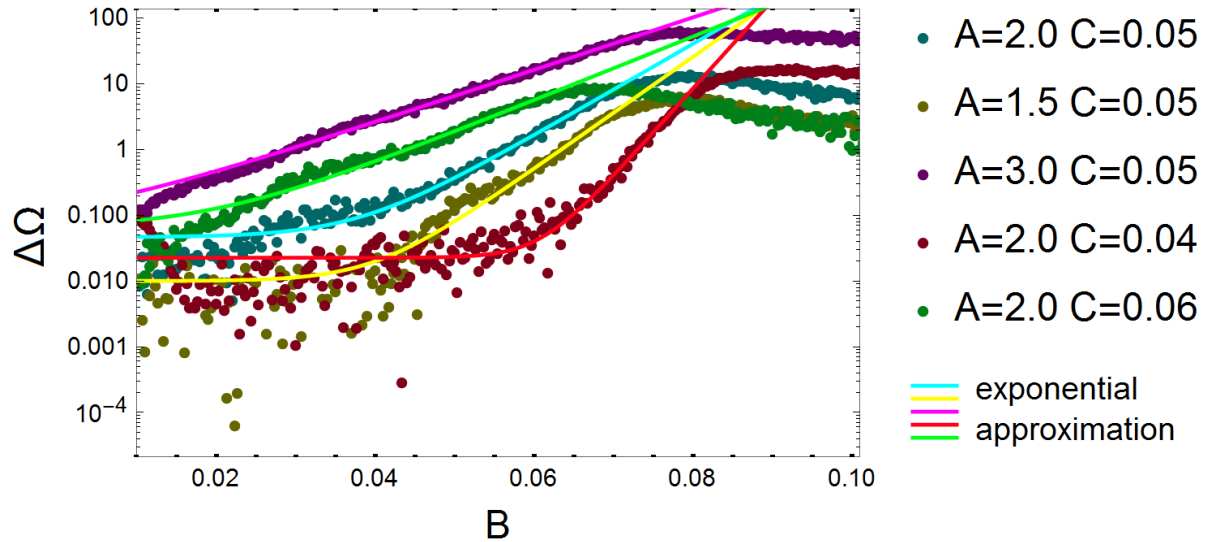


Рис. 3.10. Зависимость значения $\Delta\Omega$ на горизонтальном участке на рис. 3.9 от параметра B в логарифмическом масштабе при различных значениях параметров A и C .

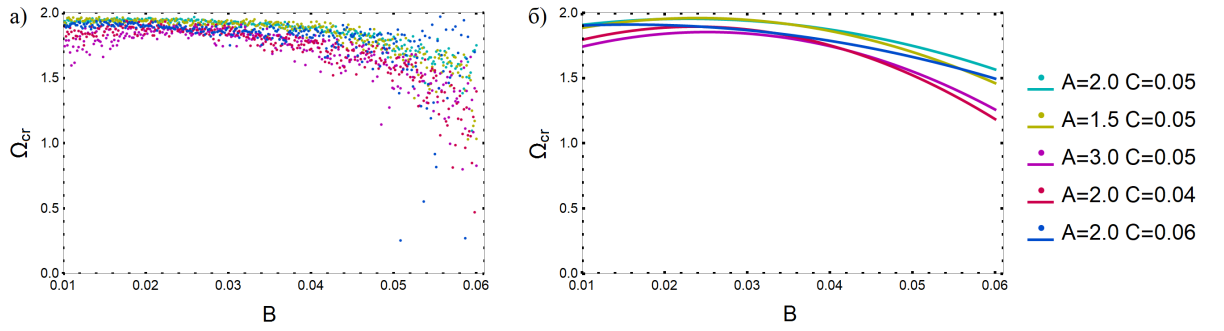


Рис. 3.11. Зависимость критической скорости от амплитуды колебаний границы для системы уравнений (3.28) при различных параметрах A и C , значения которых показаны на рисунке: (а) – численные значения, (б) – квадратичные аппроксимации.

Таблица 3.1. Значения B_{cr} при различных параметрах A и C .

A	2.0	1.5	3.0	2.0	2.0
C	0.05	0.05	0.05	0.04	0.06
B_{cr}	0.041	0.043	0.023	0.063	0.028

Оценим, насколько существенно влияние приближений, сделанных при получении отображения. Приближение «статической стенки» вносит пренебрежимо малую погрешность, если стенка существенно не перемещается за время перемещения частицы между столкновениями. В нашем случае приблизительное значение критической скорости равно 2, поэтому поправка должна быть того же порядка, что и $B/4$. Тогда относительная погрешность будет порядка $1/0.01$, что не более 1 процента. Такая погрешность существенно не влияет на исследуемую динамику. Также не учитываются случаи повторных столкновений внутри фокусирующей части границы, в отличие от работы [120]. Вероятность повторных столкновений мала, поскольку угол α должен быть мал для того, чтобы происходили повторные столкновения, а в рассматриваемой хаотической области угол α близок к $\pi/2$.

Переход от медленного к быстрому ускорению Ферми происходит плавно: ускорение экспоненциально зависит от амплитуды колебаний, поэтому критическая скорость хорошо определяется только для довольно малых амплитуд (до $B \approx 0.05$). Следует отметить, что скорость различных траекторий с начальной скоростью, меньшей критической, стремится к одному и тому же значению. Этот эффект, по-видимому, возникает вследствие эффекта Улама [148], когда в консервативных хаотических системах различные траектории демонстрируют универсальные статистические свойства. При этом известно, что в одномерной системе Улама инвариантные торы существуют при больших значениях скорости и препятствуют ускорению [149]. В нашей системе инвариантные торы могут препятствовать ускорению траекторий, начальная скорость которых ниже критического значения. Однако наша система многомерная и в ней появляется диффузия Арнольда, из-за чего общая скорость постепенно увеличивается.

3.4 Динамика слабо диссипативного бильярда

Перейдём к рассмотрению поведения системы в самом общем случае (3.26), когда в системе присутствует диссипация ($\varepsilon \neq 0$). Зафиксируем параметры $A = 2.0$, $C = 0.05$ и выберем ансамбль из 4410 систем с начальными условиями, заданными в виде равномерной кубической решётки: $\varphi_0 \in [0, \pi]$, $\psi_0 \in [0, \pi]$, $\alpha_0 \in [0, 0.4\pi]$ (21 делений для φ_0 , 21 для ψ_0 и 10 для α_0). На проекциях фазового пространства на плоскости (φ, α) и (Ω, ψ) , построенных при различных B и ε , цвет траекторий зависит от начальной скорости: красный соответствует $\Omega_0 = 0.1$, синий – $\Omega_0 = 1.0$, зелёный – $\Omega_0 = 5.0$. Траектории визуализируются в порядке возрастания Ω_0 , что может приводить к их наложению. На рис. 3.12 и рис. 3.13 проекции построены при $B = 0.01$ (рис. 3.13а,в) и при $B = 0.1$ (рис. 3.13б,г).

Известно, что в слабодиссипативном случае время переходного процес-

са может быть существенным, поэтому оно было установлено равным 100 миллионам итераций. Согласно исследованиям [150, 151], в таких системах начальные условия оказываются фактически параметрами системы, при изменении которых могут происходить аналоги бифуркации. Например, периодические траектории (дискретные наборы точек) могут трансформироваться в близкие к ним квазипериодические (замкнутые кривые) через аналог бифуркации Неймарка-Сакера. Также встречаются торы и, близкие к ним, удвоенные варианты торов, возникающие из-за бифуркации удвоения торов. Наличие удвоенных торов создаёт возможность получения сложных динамических режимов через каскады удвоений, столкновения и разрушение торов.

В фазовом пространстве при $\varepsilon = 0.0001$ (рис. 3.12) присутствует большое количество различных аттракторов, преимущественно двухчастотные торы. Увеличение диссипации до $\varepsilon = 0.001$ (рис. 3.13), ожидаемо, снижает количество аттракторов и приводит к снижению скорости на аттракторах. Последнее хорошо видно при сравнении рис. 3.12г и рис. 3.13г.

Перейдём к анализу динамики средней скорости по аналогии с разделом 3.3. Результаты, представленные на рис. 3.14, демонстрируют зависимость усреднённой по ансамблю скорости от числа итераций для различных комбинаций параметров B и ε . Слева (рис. 3.14а,в,д) отображены данные для $B = 0.01$, справа (рис. 3.14б,г,е) – для $B = 0.1$, при этом значения ε : 0.0001 (рис. 3.14а,б), 0.001 (рис. 3.14в, г), 0.01 (рис. д,е).

Для $\varepsilon = 0.0001$ и $B = 0.01$ (рис. 3.14а) переходный процесс можно разделить на две стадии. В первой стадии скорости траекторий быстро сближаются (примерно за 7×10^5 итераций), образуя квазистационарное состояние около аттракторов ($\Omega \approx 0.3$), после чего начинается медленный дрейф к аттракторам. Интересно, что время стабилизации для $B = 0.01$ превышает аналогичный показатель для $B = 0.1$ (рис. 3.14б), где графики

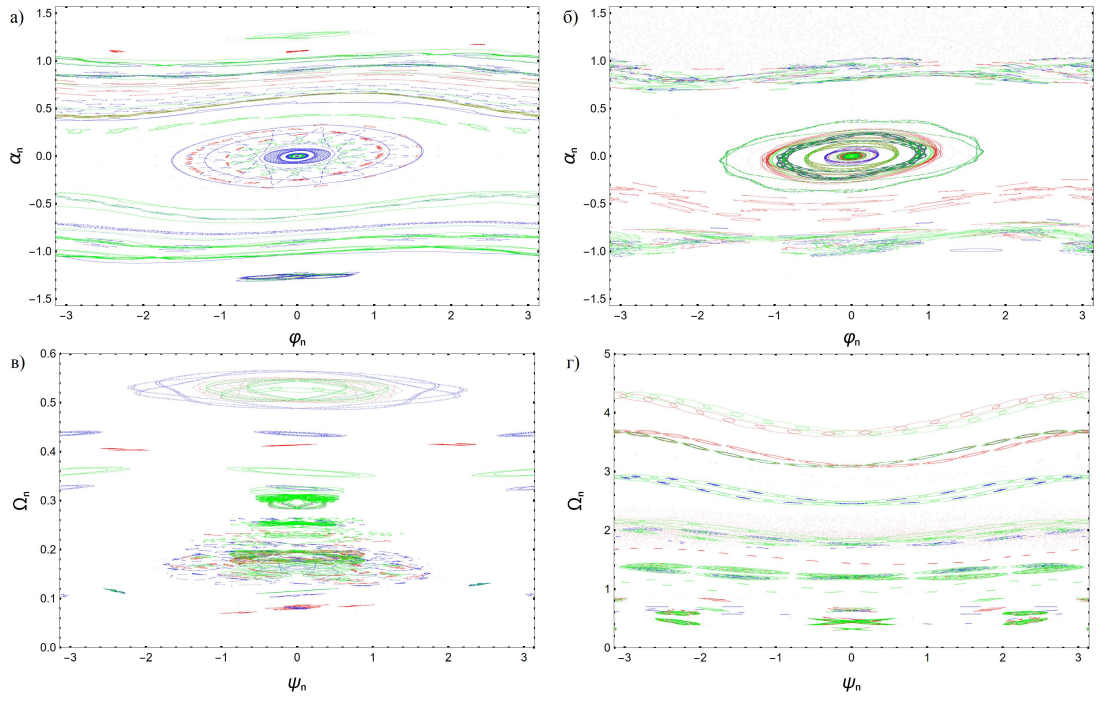


Рис. 3.12. Проекции аттракторов системы (3.26) на две разные плоскости при параметрах $A = 2.0$, $C = 0.05$, $\varepsilon = 0.0001$ и $B = 0.01$ (a , $б$), 0.1 ($в$, $г$).

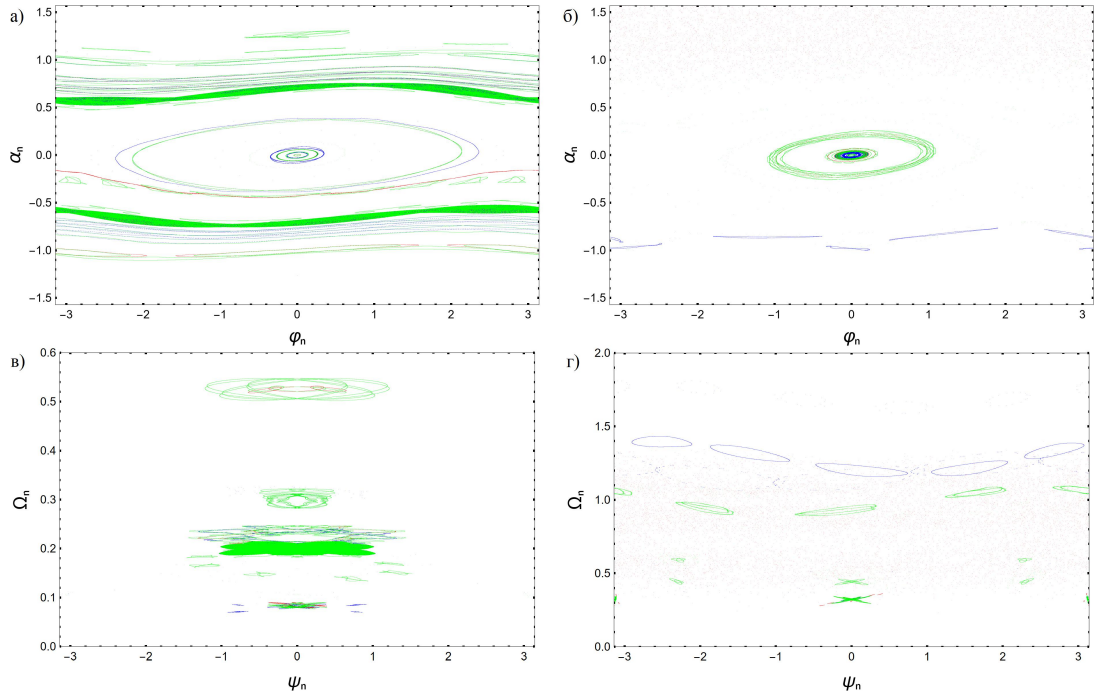


Рис. 3.13. Проекции аттракторов системы (3.26) на две разные плоскости при параметрах $A = 2.0$, $C = 0.05$, $\varepsilon = 0.001$ и $B = 0.01$ (a , $б$), 0.1 ($в$, $г$).

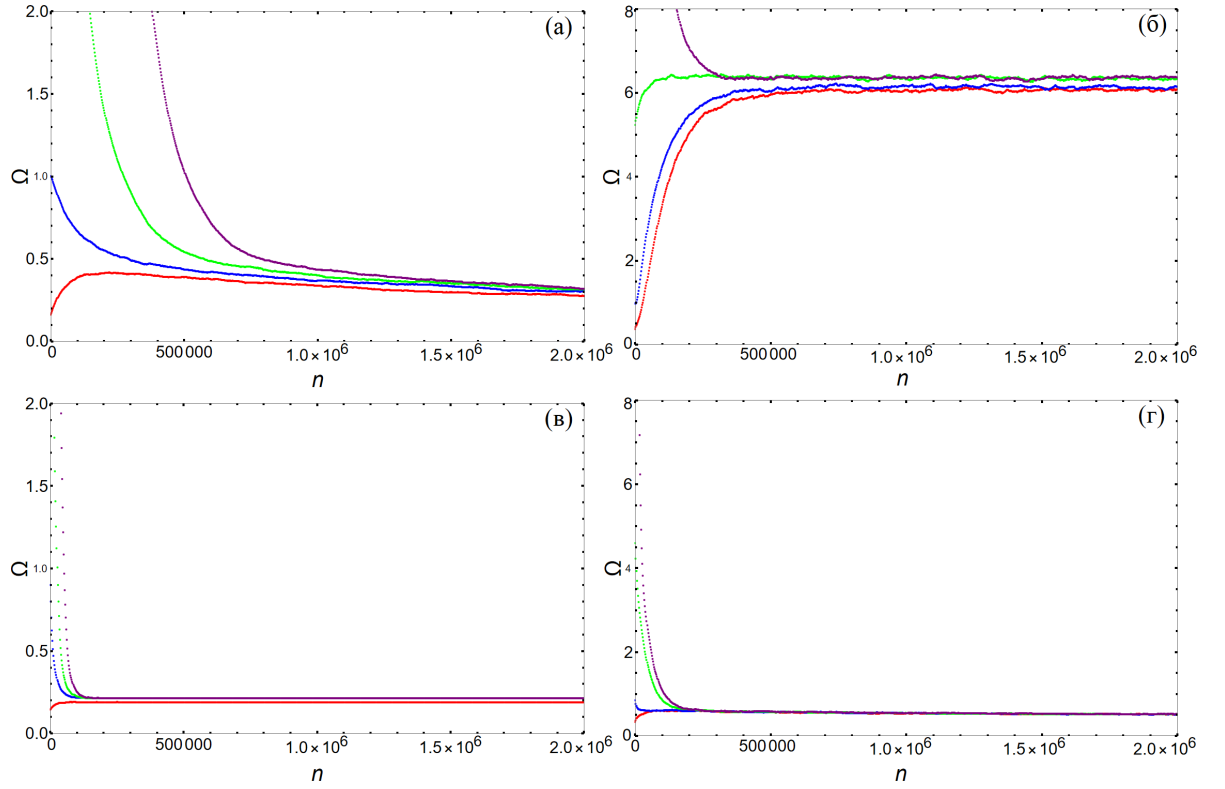


Рис. 3.14. Зависимость усредненной по ансамблю скорости от числа итераций системы (3.26) с параметрами $A = 2$, $C = 0.05$. В левой колонке приведены результаты при $B = 0.01$ и $\varepsilon = 0.0001$ (a), 0.001 (в), 0.01 (д). В правой колонке – при таких же $\varepsilon = 0.0001$ (б), 0.001 (г), 0.01 (е), но для случая $B = 0.1$. Цвет кривой зависит от начальной скорости: красный – $\Omega_0 = 0.1$, синий – $\Omega_0 = 1.0$, зелёный – $\Omega_0 = 5.0$, фиолетовый – $\Omega_0 = 25$.

приходят к устойчивым скоростям в диапазоне $\Omega \approx 6.0 - 6.5$ менее чем за 4×10^5 итераций. Установившаяся скорость зависит от начальной: малые Ω_0 тяготеют к нижней границе диапазона, тогда как высокие – к верхней. Вероятность попадания в бассейн притяжения аттрактора с большей скоростью возрастает с увеличением Ω_0 .

При умеренной диссипации ($\varepsilon = 0.001$, рис. 3.14 в,г) время стабилизации для $B = 0.01$ (рис. 3.14 в) сокращается до 1.5×10^5 итераций, что меньше, чем 2.5×10^5 итераций для $B = 0.1$ (рис. 3.14 г). Стабилизированные скорости снижаются до $\Omega \approx 0.2$ и $\Omega \approx 0.5$ соответственно. Разброс значений для $B = 0.01$ (± 0.01), тогда как для $B = 0.1$ отклонения практически отсутствуют.

Видно, что в системе (3.26) нет никаких признаков роста скорости. Следовательно, реализация ускорения Ферми в ней невозможна.

3.5 Приближенные модели бильярда

Как было показано в предыдущем разделе, даже минимальная диссипация приводит к исчезновению ускорения Ферми. Попробуем найти другие модификации системы, в которой появляется критическая начальная скорость, разделяющая режимы замедления и ускорения средней скорости; при этом полученная система будет достаточно простой для анализа. Для этого предлагается модифицировать исходную систему (3.28) с использованием двух вариантов приближений.

Рассмотрим выражение для скорости Ω_{n+1} :

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1} &= \sqrt{\Omega_{n+1_x}^2 + \Omega_{n+1_y}^2} = \\ &= \sqrt{(\Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma_n) - 2\gamma_n u_n)^2 + (\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n) - 2u_n)^2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $\gamma_n = -C \sin \varphi_n$, $u = -B \sin \psi_n$. Поскольку параметры $B, C \ll 1$, можно

упростить это выражение:

$$\begin{aligned}\Omega_{n+1} &\approx \sqrt{(\Omega_n \sin(\alpha_n + 2\gamma_n))^2 + (\Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n) - 2u_n)^2} = \\ &= \sqrt{\Omega_n^2 - 4u_n \Omega_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n)}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

В первом варианте приближения считается, что скорость частицы значительно больше скорости границы ($u \ll \Omega_n$). Это позволяет линеаризовать выражение для скорости:

$$\Omega_{n+1} \approx \Omega_n \sqrt{1 - 4 \frac{u_n}{\Omega_n} \cos(\alpha_n + 2\gamma_n)} \approx \Omega_n - 2u_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n). \quad (3.31)$$

Подставив это приближение в исходную систему (3.28), получим:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \arctg\left(\frac{\Omega_{nx}}{\Omega_{ny}}\right), \\ \Omega_{n+1} = \Omega_n + 2B \sin \psi_n \cos(\alpha_n + 2\gamma_n), \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \frac{\Omega_{nx}}{\Omega_{ny}}, \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{\Omega_{ny}}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Рассмотрим фазовые проекции этой системы при параметрах $A = 2$, $B = 0.01$, $C = 0.05$ и начальных условиях, заданных в виде решётки ($\Omega_0 = 0.42 + 0.14i$, $i = 0..4$, $\alpha_0 = 0.064 + 0.068j$, $j = 0..4$), где $\varphi_0 = 1$ и $\psi_0 = 4.14$ постоянные, как описано в разделе 3.2. На рис. 3.15 слева (*а, в*) показаны первые 10^4 итераций отображения, иллюстрирующие начало переходного процесса, при котором траектории мигрируют в различные области фазового пространства. Также можно заметить, что часть траекторий демонстрирует быстрое замедление. На рис. 3.15 справа (*б, г*) изображены установившиеся режимы, где все траектории притягиваются к регулярным аттракторам, на которых значение скорости мало.

Далее рассмотрим динамику средней скорости. Графики на рис. 3.16, построенные аналогично разделу 3.2, показывают, что независимо от начальной скорости средняя скорость быстро уменьшается до почти нулевого значения. Таким образом, эффект ускорения Ферми не сохраняется, что требует рассмотрения других приближений.

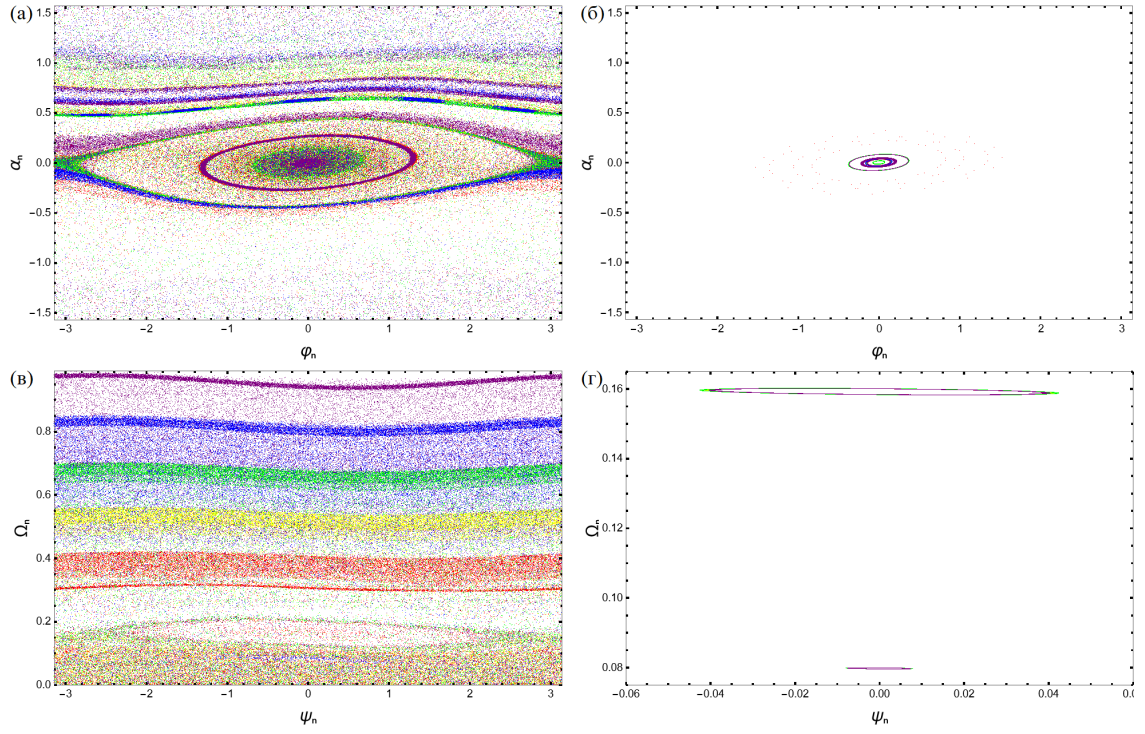


Рис. 3.15. Проекции фазового пространства системы (3.32) на две разные плоскости при параметрах $A = 2.0$, $B = 0.01$, $C = 0.05$ и с начальными условиями, заданными в виде решётки. Слева представлены первые 10^4 (а, в), справа – установившиеся после переходного процесса режимы (б, г).

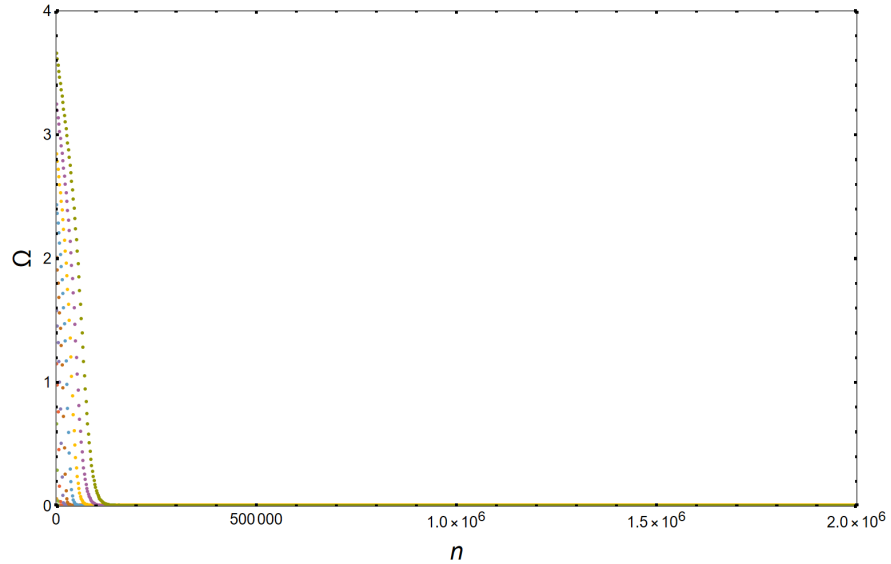


Рис. 3.16. Зависимость усредненной по ансамблю скорости от числа итераций системы (3.32) при параметрах $A = 2$, $C = 0.05$, $B = 0.01$. Начальная скорость Ω_0 выбирается из диапазона от 0.1 до 3.7 с шагом 0.4.

Во втором варианте приближения считается, что за время между соударениями смещение границы мало, и для расчёта координаты следующего столкновения стенку можно считать неподвижной. Тогда вводится следующее приближение:

$$\frac{\Omega_{n_x}}{\Omega_{n_y}} = \tan(\alpha_n + 2\gamma_n), \quad (3.33)$$

где $\gamma_n = -C \sin \varphi_n$. В этих предположениях отображение принимает вид:

$$\begin{cases} \Omega_{n+1} = \sqrt{\Omega_{n+1_x}^2 + \Omega_{n+1_y}^2}, \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{\Omega_{n_y}}, \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \tan(\alpha_n + 2\gamma_n), \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\gamma_n. \end{cases} \quad (3.34)$$

В системе (3.34) выражения для α_n и φ_n соответствуют отображению Теннисона-Либермана-Лихтенберга. Структура фазового пространства в проекции на плоскость «координата-угол», как в случае системы (3.27).

Дальнейший анализ проводится при параметрах и начальных условиях, указанных ранее. На рис. 3.17 слева (а, в) показаны фазовые проекции за первые 10^4 итераций: часть красных траекторий (с малой Ω_0) быстро притягивается к регулярным аттракторам в области малых скоростей, тогда как остальные траектории ускоряются. На рис. 3.17 справа (б, г) показаны установившиеся режимы: сформировался один аттрактор в области малых скоростей, а остальные траектории остаются в нестационарном режиме ускорения.

Динамика средней скорости представлена на рис. 3.18. Независимо от Ω_0 все траектории демонстрируют ускорение, а ансамбль начальных условий из хаотической области не приводит к появлению аттракторов.

Из этого следует, что комбинация приближений может вызывать различные соотношения между замедлением в системе (3.32) и ускорением в системе (3.34) в зависимости от начальной скорости. Это, в свою очередь,

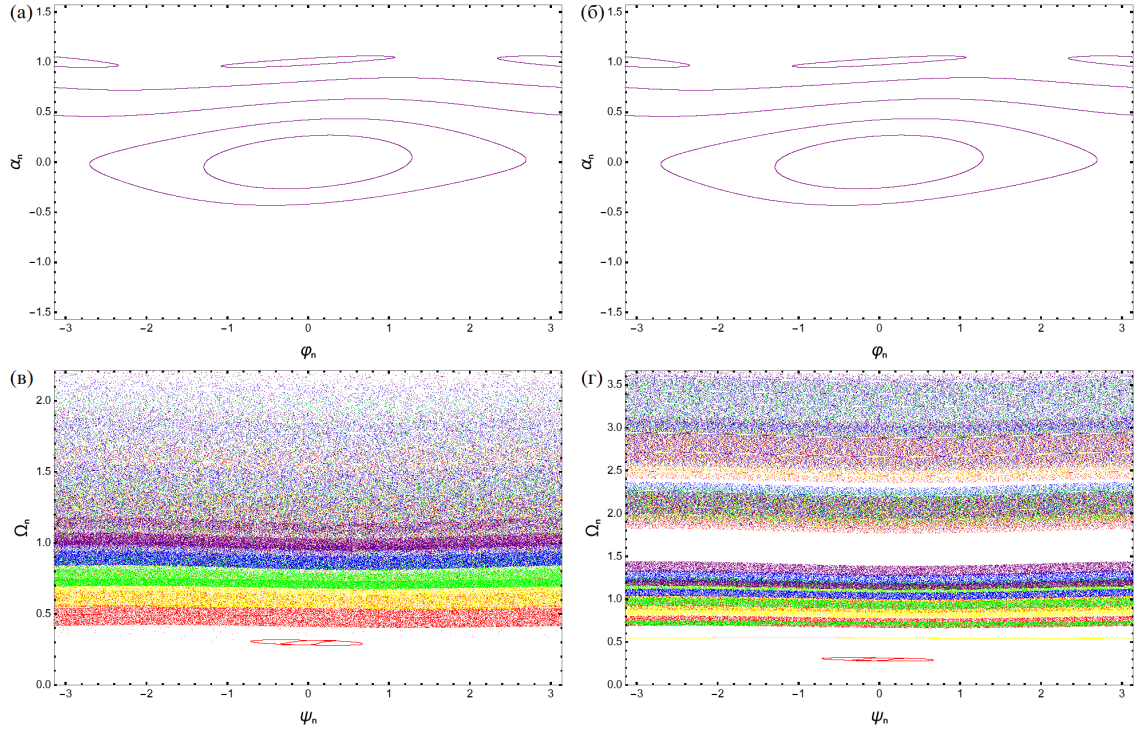


Рис. 3.17. Проекция фазового пространства системы (3.34) на две разные плоскости при параметрах $A = 2.0$, $B = 0.01$, $C = 0.05$ и с начальными условиями, заданными в виде решётки. Слева представлены первые 10^4 (a, в), справа – установившиеся после переходного процесса режимы (б, г).

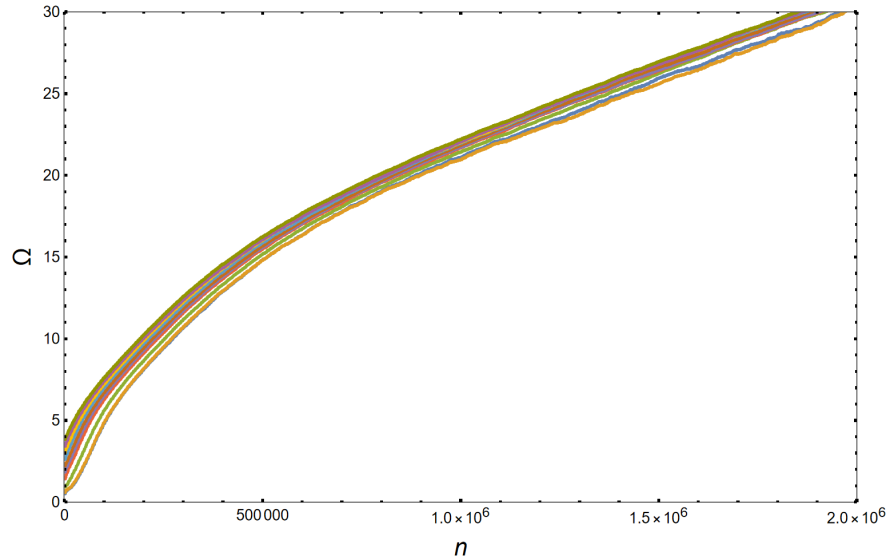


Рис. 3.18. Зависимость усредненной по ансамблю скорости от числа итераций системы (3.34) при параметрах $A = 2$, $C = 0.05$, $B = 0.01$. Начальная скорость Ω_0 выбирается из диапазона от 0.1 до 3.7 с шагом 0.4.

может привести к появлению критической начальной скорости в хаотической области.

Теперь рассмотрим систему, включающую комбинацию предложенных приближений:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2C \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \tan(\alpha_{n+1}), \\ \Omega_{n+1} = \Omega_n + 2B \sin \psi_n \cos(\alpha_{n+1}), \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{\Omega_n \cos(\alpha_{n+1}) + 2B \sin \psi_n}. \end{cases} \quad (3.35)$$

В отображении (3.35), как и в отображении (3.34), выражения для α_n и φ_n соответствуют отображению Теннисона-Либермана-Лихтенберга (3.27).

На рис. 3.19 слева (а, в) показаны первые 10^4 итераций. Часть траекторий притягивается к различным регулярным аттракторам, расположенным в области малых скоростей, в то время как другие траектории начинают ускоряться. После переходного процесса (рис. 3.19 справа (б, г)) видны три аттрактора, скорости на которых различаются, и нестационарные траектории с растущей скоростью.

Динамика средней скорости представлена на рис. 3.20. Кривые либо стабилизируются около постоянных значений, что свидетельствует о притяжении к аттракторам, либо растут, демонстрируя ускорение Ферми. Их разделяет критическая начальная скорость ($\Omega_{\text{кр}}$): при $\Omega_0 < \Omega_{\text{кр}}$ траектории притягиваются к аттракторам в области малых скоростей, при $\Omega_0 > \Omega_{\text{кр}}$ — ускоряются. Характер этого деления иной, чем в исходной системе (3.28): там критическая скорость разделяет режимы быстрого и медленного ускорения Ферми. При этом критическая скорость в системе (3.35) ниже, чем в исходной системе (если сравнить рис. 3.20 и рис. 3.8а).

Рассмотрим зависимости средней скорости через 2×10^6 итераций от амплитуды колебаний (рис. 3.21). Красные кривые соответствуют $\Omega_0 > 0$

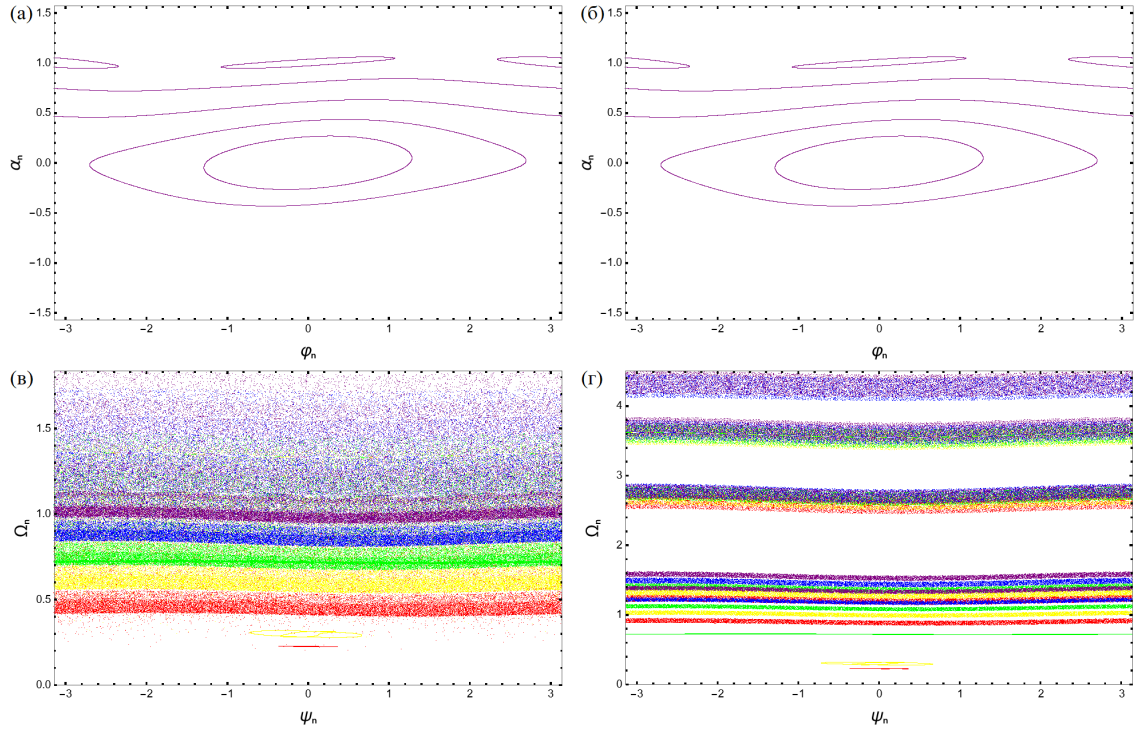


Рис. 3.19. Проекция фазового пространства системы (3.35) на две разные плоскости при параметрах $A = 2.0$, $B = 0.01$, $C = 0.05$ и с начальными условиями, заданными в виде решётки. Слева представлены первые 10^4 (a, в), справа – установившиеся после переходного процесса режимы (б, г).

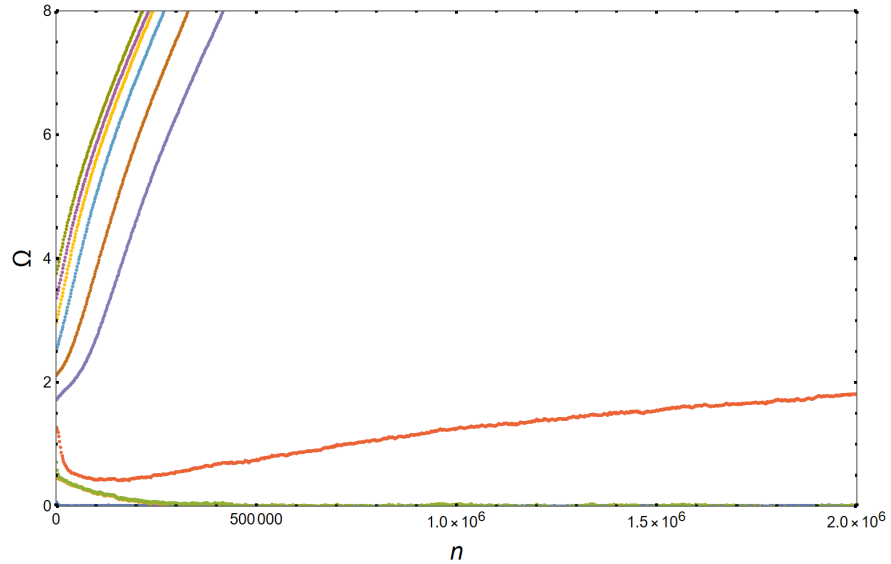


Рис. 3.20. Зависимость усредненной по ансамблю скорости от числа итераций системы (3.35) при параметрах $A = 2$, $C = 0.05$, $B = 0.01$. Начальная скорость Ω_0 выбирается из диапазона от 0.1 до 3.7 с шагом 0.4.

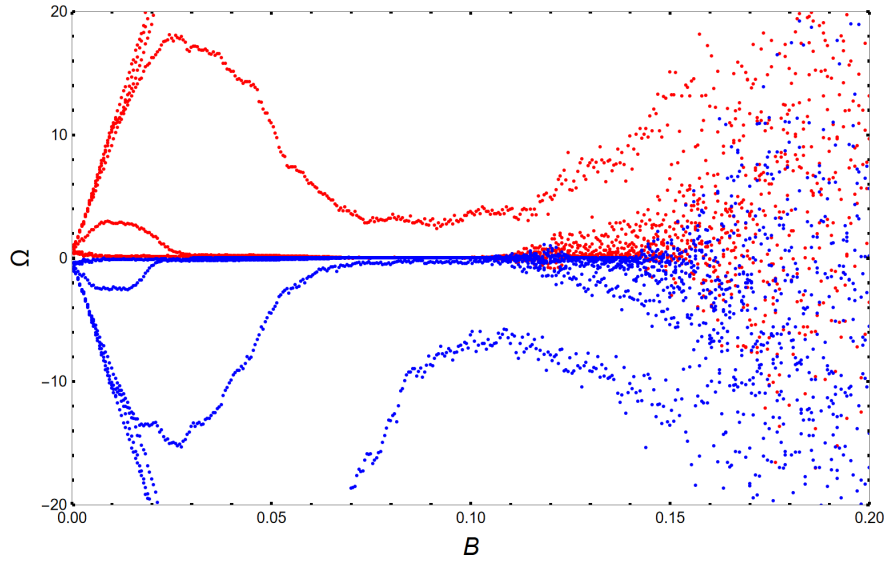


Рис. 3.21. Зависимость усредненной по ансамблю скорости после 2×10^6 итераций ($\Omega_{2 \times 10^6}$) системы (3.35) с параметрами $A = 2, C = 0.05$ от амплитуды колебаний B .

(от 0.3 до 1.1 с шагом 0.1), синие – $\Omega_0 < 0$ (от -1.1 до -0.3 с шагом 0.1).³ На графике выделяются две почти симметричные пары кривых (две синие и две красные), расположенные около нуля; остальные красные кривые находятся выше, а синие – ниже. С увеличением B эти пары кривых приближаются к нулю, затем у них возникают флуктуации, которые начинают увеличиваться с ростом B . Начиная со значения B_{cr} , где $B_{\text{cr}} \in [0.14, 0.15]$, кривые начинают перемешиваться, и скорость может менять знак, что делает отображение физически бессмысленным при $B > B_{\text{cr}}$.

Динамика средней скорости при различных значениях B показана на рис. 3.22. Цвет кривой определяется аналогично: красный для $\Omega_0 > 0$, синий для $\Omega_0 < 0$. При $B = 0.02$ (рис. 3.22а) наблюдаются различные предельные скорости, связанные с сосуществованием аттракторов, притягивающих траектории в зависимости от Ω_0 , что отличает отображение (3.35) от исходного (3.28). При увеличении B до 0.06 (рис. 3.22б) критическая

³Кривые с отрицательной начальной скоростью рассматриваются, так как отображение допускает появление отрицательной скорости, хотя отрицательная скорость невозможна в исходной системе (3.28), и в таком случае приближение не несёт физического смысла.

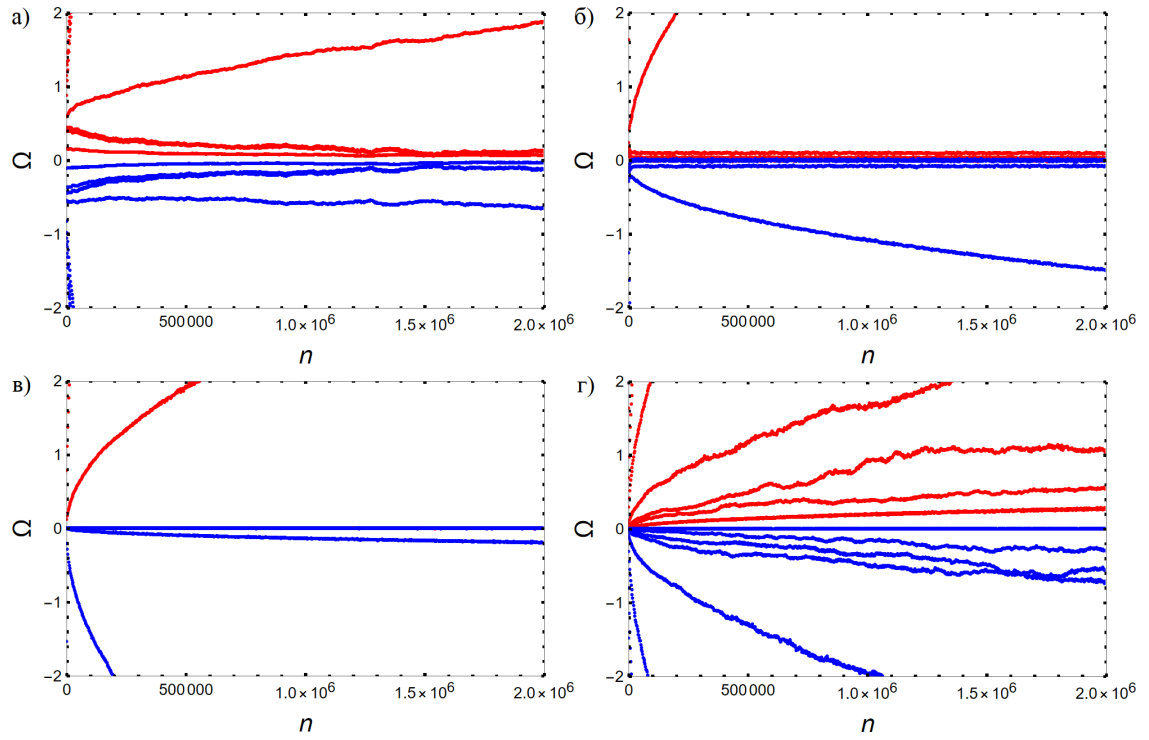


Рис. 3.22. Зависимость усредненной по ансамблю скорости от числа итераций системы (3.35) при параметрах $A = 2, C = 0.05$ и (а) $B = 0.02$, (б) $B = 0.06$, (в) $B = 0.10$, (г) $B = 0.14$. Начальная скорость Ω_0 выбирается из диапазона от 0.2 до 1.1 и от -1.1 до 0.2 с шагом 0.1. Цвет кривой зависит от начальной скорости: красные – начальная скорость больше нуля, синие – меньше нуля.

начальная скорость уменьшается, а предельные скорости сдвигаются ближе к нулю. Для $B = 0.1$ (рис. 3.22*в*) остаётся только нулевая предельная скорость. При переходе к $B = 0.14$ (рис. 3.22*г*) критическая скорость ещё больше снижается, и увеличивается доля кривых, демонстрирующих ускорение.

3.6 Выводы к Главе 3

В данной главе разработана и исследована иерархия приближённых математических моделей бильярда с гофрированной и гармонически колеблющейся границей. Выведено общее четырёхмерное отображение (3.26). Показано, что в предельном случае отсутствия колебаний и диссипации поведение системы сводится к отображению Теннисона-Либермана-Лихтенберга. При увеличении амплитуды колебаний границы в консервативном режиме наблюдаются переходы от двухчастотных к трёхчастотным торам и далее к полной хаотической динамике. Введение конечной диссипации приводит к тому, что система может обладать большим количеством притягивающих множеств различной природы (периодические, квазипериодические и, реже, хаотические).

Для консервативного случая выделено два режима ускорения Ферми.

- 1) Медленное ускорение выражается в стремлении к медленно нарастающему общему значению средней по ансамблю скорости частиц с одинаковой начальной скоростью. Это происходит в случае, когда начальная скорость не превышает некоторого критического значения $\Omega_{\text{кр}}$.
- 2) Быстрое (классическое) ускорение – когда начальная скорость ансамбля превышает $\Omega_{\text{кр}}$, средняя скорость демонстрирует неограниченный рост. Эффект с одной стороны грубый – не исчезает при малых вариациях параметров, а, с другой стороны, хрупкий: любое диссипативное затухание полностью подавляет неограниченное ускорение Ферми и заменяет его быстрым выходом

траекторий на один из устойчивых режимов со строго ограниченной скоростью.

Приближённые модели демонстрируют различную динамику. Первый вариант приближения (3.32) ведёт к подавлению ускорения и притяжению траекторий к аттракторам. Второй вариант приближения (3.34) демонстрирует ускорение Ферми независимо от начальной скорости. Комбинация этих двух приближений породила новую простую модель (3.35), в которой возможен присущий полной системе эффект разделения средних скоростей. При начальной скорости частиц, меньшей $\Omega_{\text{сг}}$, траектории к аттракторам в области малых скоростей, тогда как при начальной скорости, превышающей $\Omega_{\text{сг}}$, частицы демонстрируют ускорение. Эта приближённая модель, сохраняющая основной присущий полной системе физический эффект, представляет собой однонаправленно связанные системы, ведущая из которых является консервативным отображением Теннисона-Либермана-Лихтенберга. Исследование области существования аттракторов в этой модели является предметом следующей главы.

Экстремальная мультистабильность и схема коммуникации на ее основе в приближенной модели бильярда с геометрией типа волновода с гофрированной осциллирующей границей

Важным результатом Главы 3 стало построение иерархии приближённых математических моделей, описывающих поведение частицы в бильярде типа волновода с одной осциллирующей гофрированной границей. Среди моделей из этой иерархии выявлена система, представляющая собой консервативное двумерное отображение Теннисона-Либермана-Лихтенберга, однонаправленно управляющая динамикой другого двумерного отображения, которое, как можно будет показано в данной главе, является диссипативным. В полной системе, построенной по такому принципу, могут реализовываться притягивающие инвариантные множества. Эти множества, однако, должны обладать двумерным нейтральным многообразием и отвечать принципу хрупкости, выражающемуся в виде так называемой экстремальной мультистабильности. В отличие от грубости, хрупкость формирует концептуальную основу для настоящей главы, где фокус смещается с фундаментального анализа на прикладные аспекты, а именно – на разработку схемы безопасной коммуникации.

Под термином «экстремальная мультистабильность» понимается явление сосуществования бесконечного числа притягивающих предельных множеств в фазовом пространстве системы. Впервые наблюдение данного явления было (без объяснения его природы) описано еще в прошлом веке в работах [152–154] и с тех пор получило дальнейшее развитие в виде как экспериментальных, так и теоретических численных примеров [155–157]. Как и многие другие авторы, внесшие вклад в объяснение этого феномена [44, 158], будем понимать под экстремальным мультистабильным сосуществованием не просто бесконечного (счетного) числа притягивающих мно-

жеств, как в системах с обусловленным периодическими зависимостями в уравнениях множеством равновесий [159, 160], но их континуума. Визуально наблюдаемым проявлением такого континуума при численном исследовании системы может быть сходство диаграмм зависимости режима от начальных условий с диаграммами зависимости от параметров – бифуркационными диаграммами [46, 161].

Сосуществование бесконечного множества аттракторов может реализовываться в связанных системах, которые можно представить в виде двух подсистем, одна из которых выполняет роль параметрического управления [162, 163]. В таком случае начальные условия той подсистемы, которая отвечает за параметрическое управление, задают «форму» воздействия, и каждой «форме» воздействия соответствует свой аттрактор в другой подсистеме; если таких «форм» можно задать бесконечно много, то и аттракторов в исходной системе будет бесконечное число. Эти соображения напрямую связаны с классом гамильтоново-управляемых систем, к которому относится рассматриваемая в настоящей главе математическая модель. Такие системы состоят из консервативной (гамильтоновой) подсистемы, генерирующей параметрическое управление, и диссипативной подсистемы, динамика которой подчинена этому управлению [164]. Ключевым фактором является присутствие в гамильтоновой подсистеме несчётного множества инвариантных КАМ-торов, каждому из которых соответствует уникальная форма параметрического воздействия на диссипативную подсистему. Поскольку каждому тору соответствует притягивающее множество диссипативной подсистемы, наличие несчётного множества торов приводит к появлению несчётного же бесконечного числа притягивающих множеств.

Сначала в настоящей главе приводится детальное исследование проявлений экстремальной мультистабильности в выбранной приближённой модели бильярда. Конкретно будут установлены диапазоны параметров и мно-

жества начальных условий, при которых в системе формируется плотное множество устойчивых хаотических режимов; далее будет проанализирована структура соответствующих бифуркаций и оценены пространственная плотность и устойчивость этих притягивающих множеств в фазовом пространстве. Результаты этого анализа служат основой для последующих разделов, посвящённых использованию экстремальной мультистабильности для защищённой связи.

Среди литературы на сегодняшний день выделяются две работы, непосредственно относящиеся к рассматриваемой проблематике. В первой работе [52] предложена двухканальная схема, в которой приватный канал используется исключительно для синхронизации по одной переменной, а публичный – для передачи хаотически замаскированного информационного сигнала; повышенный уровень скрытности обеспечивается переключениями между бесконечным множеством хаотических аттракторов. Основным недостатком данной схемы является её низкая помехоустойчивость. Во второй работе [53] рассматривается другая двухканальная схема, где сигнал делится на две части: первая модулирует параметры передатчика и отправляется в первый канал связи, вторая смешивается с хаотическим сигналом системы и посылается во второй канал связи; для детектирования информации применяется адаптивный алгоритм синхронизации приёмника. Эта методика демонстрирует хорошую помехоустойчивость, но требует сложного в реализации адаптивного алгоритма синхронизации.

В настоящей главе предлагается новый метод реализации коммуникации на базе экстремальной мультистабильности, предназначенный для класса систем с гамильтоновым управлением. Предлагаемый подход также использует двухканальную архитектуру, однако за счёт применения нелинейного подмешивания информации и отказа от сложного адаптивного алгоритма синхронизации он потенциально обеспечивает большую помехо-

устойчивость при существенно меньшей сложности реализации. В предлагаемой схеме параметрическое управление, генерируемое гамильтоновой подсистемой, передаётся по приватному каналу, тогда как по второму каналу передаётся состояние управляемой подсистемы. Для реализации коммуникации предполагается установить хаотическую синхронизацию между передатчиком и приёмником. В рамках главы будут приведены варианты организации связей между системами и определены диапазоны интенсивности связи, при которых возможна полная синхронизация; дополнительно будут продемонстрированы примеры коммуникации с использованием как аддитивного, так и нелинейного подмешивания информационного сигнала (см. глава 1). Такая общая структура коммуникации остаётся применимой ко всему классу гамильтоново-управляемых моделей.

4.1 Модельная система

Рассмотрим гамильтоново управление посредством переменной $\varepsilon(n)$, зависящей от времени в соответствии со следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2C \sin \varphi_n; \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + A \tan \alpha_{n+1}; \end{cases} \quad (4.1)$$

Динамика управляющей переменной определяется отображением Теннисона-Либермана-Лихтенберга (3.27), моделирующего движение частицы в бильярде типа волновода с одной гофрированной неподвижной границей. Пусть такое управление осуществляется над системой вида:

$$\begin{cases} \varepsilon(n) = \cos \alpha_{n+1}, \\ \Omega_{n+1} = \Omega_n + 2B\varepsilon(n) \sin \psi_n, \\ \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{1}{\varepsilon(n)\Omega_n + 2B \sin \psi_n}. \end{cases} \quad (4.2)$$

При $\varepsilon(n) = 1$ оно сводится к отображению Ферми-Паста-Улама [145], кото-

рое моделирует движение частицы в поперечном направлении в волноводе с прямолинейными границами, одна из которых колеблется. Значения $\varepsilon(n) = \text{Const} \neq 1$, то есть параметризация отображения Ферми-Паста-Улама, отвечает случаю движения частицы в таком волноводе под произвольными углами, но в приближении малой скорости колебаний границы.

Полная система (4.1)-(4.2) представляет собой полученную в предыдущей главе модель бильярда типа волновода с колеблющейся гофрированной границей (3.35). Это однонаправленно связанные системы, ведущая из которых является гамильтоновой. Якобиан отображений (4.1) $J = 1$. Система может демонстрировать либо КАМ-торы, либо хаос в зависимости от начальных условий. Вторая, гамильтоново управляемая, подсистема (4.2) имеет якобиан

$$J = 1 - 2B \left(\frac{\sin \alpha_{n+1}}{\Omega_n \cos \alpha_{n+1} + 2B \sin \psi_n} \right)^2 \cos \psi_n. \quad (4.3)$$

Якобиан полной системы (4.1)-(4.2) в силу типа её симметрии представляет собой произведение якобианов ведущей и ведомой подсистем, то есть совпадает с (4.3). Он вырождается в единицу при $B = 0$ или $\varepsilon = 1$. В иных случаях он зависит от значений переменных, и система (4.1)-(4.2) может быть диссипативной. Тем самым, в её фазовом пространстве могут реализовываться «аттракторы» в смысле притягивающих предельных инвариантных множеств. Классическому определению аттрактора, согласно которому к нему должны притягиваться все траектории из малой окрестности, они, однако, не отвечают. Несмотря на сжатие фазового объёма в окрестности такого возможного «аттрактора», он должен обладать двумерным нейтральным многообразием. Сколь угодно малое возмущение траектории вдоль этого многообразия приведёт к её попаданию на иное инвариантное множество. Таковых множеств в фазовом пространстве полной системы (4.1)-(4.2) должно быть континуум. Именно в этом заключается эффект экстремальной мультистабильности – сосуществование при фик-

сированных значениях параметров несчётного множества «аттракторов». Причём таковыми в изучаемой системе могут, по-видимому, быть как регулярные, так и хаотические. Для их поиска можно воспользоваться методами спектрального и ляпуновского анализа.

4.2 Методы анализа

Для определения динамического режима будут использованы известные спектральные и ляпуновские методы анализа [165, 166].

Первая количественная характеристика динамического режима может быть получена с помощью спектра мощности Фурье. Спектральная функция $N(\sigma)$ определяется как число спектральных компонент, превышающих некоторое значение σ . Для большинства динамических режимов можно выделить область на графике функции $N(\sigma)$, которая подчиняется степенному закону $N \sim \sigma^{-\beta}$ [165, 166]. Значение показателя $\beta = 0.5$ указывает на регулярный режим, тогда как $\beta > 1$ обычно ассоциируется с хаотическим режимом. Промежуточные значения $0.5 < \beta < 1$ типичны для сингулярно непрерывных спектров странных нехаотических аттракторов.

Будет также анализироваться спектр показателей Ляпунова. Двумерная консервативная подсистема (4.1) имеет два показателя Ляпунова, сумма которых должна быть равна нулю. Таким образом, оба показателя Ляпунова либо равны нулю у КАМ-торов, либо равны по абсолютной величине, но имеют противоположный знак в хаотическом режиме. Получить хаос с одним положительным показателем Ляпунова, а также квазипериодические и странные нехаотические режимы в (4.2) можно, когда (4.1) функционирует в квазипериодическом режиме. В этом случае показатели, связанные с ляпуновскими векторами, лежащими в подпространстве второй подсистемы, могут быть либо оба отрицательными (квазипериодический и странный нехаотический режимы), либо один положительный и один

отрицательный (хаотический режим). Следовательно, когда консервативная подсистема находится в квазипериодическом режиме, можно получить хаос с одним положительным показателем Ляпунова, а также квазипериодические и странные нехаотические режимы. Это означает, что хаос в системе (4.1)-(4.2) идентифицируется по старшему показателю среди показателей, связанных с подсистемой (4.2), когда подсистема (4.1) не является хаотичной.

Чтобы отличить странный нехаотический аттрактор от тора по показателям Ляпунова, необходимо рассматривать распределение их локальных значений. Старший показатель Ляпунова, отвечающий за подпространство управляемой подсистемы (4.2), можно вычислить по алгоритму, описанному в разделе 2.1. Уравнения в вариациях для возмущений $\tilde{\Omega}_n$ и $\tilde{\psi}_n$ в управляемой подсистеме, соответствующие фиксированной траектории управляющей подсистемы

$$\begin{cases} \tilde{\Omega}_{n+1} = \tilde{\Omega}_n + 2B \cos \psi_n \cos \alpha_{n+1} \tilde{\psi}_n; \\ \tilde{\psi}_{n+1} = \tilde{\psi}_n - \frac{\cos \alpha_{n+1} \tilde{\Omega}_n + 2B \cos \psi_n \tilde{\psi}_n}{(\Omega_n \cos \alpha_{n+1} + 2B \sin \psi_n)^2}, \end{cases} \quad (4.4)$$

необходимо решать совместно с полной системой (4.1)-(4.2).

Сначала для получения распределения локальные показатели Ляпунова рассчитываются на каждой итерации отображения. Для получения репрезентативных распределений производится усреднение по 300 значениям. Для квазипериодических режимов распределение будет полностью лежать в отрицательной области. Для странных нехаотических аттракторов оно будет частично заходить в положительную область. Для хаотического режима распределение почти полностью находится в положительной области.

4.3 Разнообразие динамических режимов

Продemonстрируем динамические режимы, которые могут появляться в системе (4.1)-(4.2). Зафиксируем параметры системы

$$A = 2, \quad B = 0.003, \quad C = 0.05, \quad (4.5)$$

начальные условия для переменных управляемой подсистемы

$$\psi_0 = 0.0, \quad \Omega_0 = 0.1. \quad (4.6)$$

и будем варьировать её управление путём изменения начальных условий для переменных консервативной подсистемы (4.1).

Пусть начальные значения $\alpha_0 = 0.4$, $\varphi_0 = 0.0$. В фазовых пространствах подсистем (4.1) (рис. 4.1а) и (4.2) (рис. 4.1б) располагаются гладкие инвариантные кривые, которые указывают на существование инвариантного множества, гомеоморфного тору, в полном фазовом пространстве системы (4.1)-(4.2). На рис. 4.1в построен график спектральной функции $N(\sigma)$ переменной ψ в двойном логарифмическом масштабе. Пунктирная линия обозначает область, где функция распределения следует степенному закону $N(\sigma) \sim \sigma^{-\beta}$, при этом $\beta = 0.50$. Полный спектр показателей Ляпунова для этого аттрактора: $\Lambda_1 = 0.000$, $\Lambda_2 = 0.000$, $\Lambda_3 = -0.020$, $\Lambda_4 = -0.021$. Первые два показателя принадлежат подсистеме (4.1), а два других показателя относятся к подсистеме (4.2). Старший показатель Ляпунова подсистемы (4.2) указывает на регулярную природу объекта в фазовом пространстве. Распределение локальных значений показано на рис. 4.1г, где все локальные значения расположены в отрицательной области.

Зафиксируем $\alpha_0 = 0.43$, $\varphi_0 = 0.01$. В пространстве консервативной подсистемы (4.1) (рис. 4.2а) наблюдается плавная инвариантная кривая. Негладкая инвариантная кривая наблюдается в пространстве диссипативной подсистемы (4.2) (рис. 4.2б), что указывает на возможность существования странного нехаотического аттрактора [165,167]. На рис. 4.2в построен

график спектральной функции $N(\sigma)$. Пунктирной линией обозначена область, где функция распределения следует степенному закону. Показатель степени $\beta = 0.57 > 0.50$, что говорит о том, что исследуемая динамика проявляет странную нехаотическую природу. Старший среди показателей Ляпунова, относящихся к подсистеме (4.2), равен $\Lambda_3 = -0.007$ (первые два показателя нулевые и относятся к подсистеме (4.1)), то есть система имеет два нулевых показателя и два отрицательных показателя. Распределение локальных значений показано на рис. 4.2г. Видно, что существует ненулевая вероятность появления положительного локального значения старшего показателя Ляпунова, что типично для странных нехаотических аттракторов.

При начальных условиях $\alpha_0 = 0.091$, $\varphi_0 = 0.9$ в пространстве подсистемы (4.1) (рис. 4.3а) также располагается инвариантная кривая. Однако в пространстве подсистемы (4.2) (рис. 4.3б) наблюдается хаотическая траектория. На рис. 4.3в показан график спектральной функции $N(\sigma)$ и на нем сложно выделить линейную область в двойном логарифмическом масштабе. Для части графика, которая наиболее близка к прямой, показатель степени $\beta = 1.26 > 1$. Старший показатель Ляпунова $\Lambda_1 = 0.004$, что означает, что полная система имеет один положительный, два нулевых и один отрицательный показатель Ляпунова. На рис. 4.3г показано распределение локальных значений старшего показателя Ляпунова, большая часть которого лежит в положительной области.

В данной системе также возможен режим с двумя положительными показателями Ляпунова (гиперхаос). Для демонстрации выбраны начальные условия $\alpha_0 = 1.2$, $\varphi_0 = 0.0$, при которых в подсистеме (4.1) наблюдается хаос (рис. 4.4а). Подсистема (4.2) также демонстрирует хаотическое поведение (рис. 4.4б). Значения положительных показателей системы равны $\Lambda_1 = 1.48$, $\Lambda_2 = 0.46$. Для общности на рис. 4.4в показана спектральная

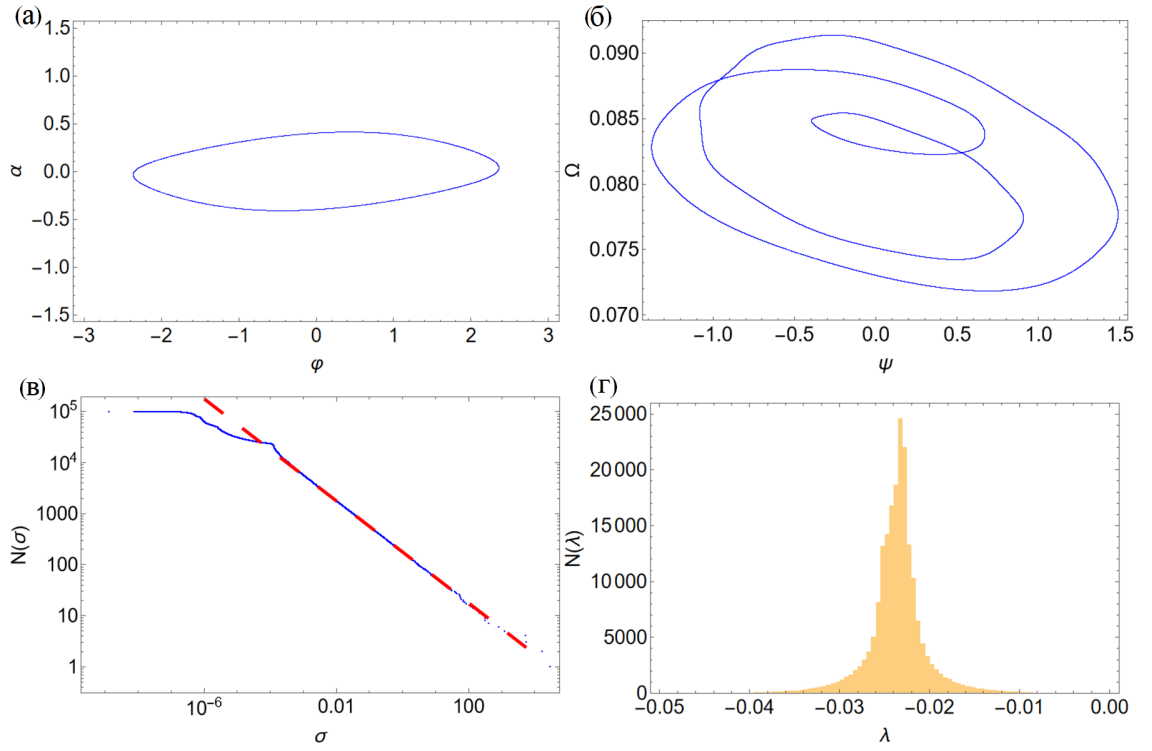


Рис. 4.1. Две проекции инвариантных множеств (a , $б$), спектральная функция распределения в двойном логарифмическом масштабе ($в$) и функция распределения локальных значений старшего из условных показателей Ляпунова ($г$) системы (4.1)-(4.2) при параметрах (4.5), начальных условиях (4.6) и $\varphi_0 = 0.0$, $\alpha_0 = 0.4$.

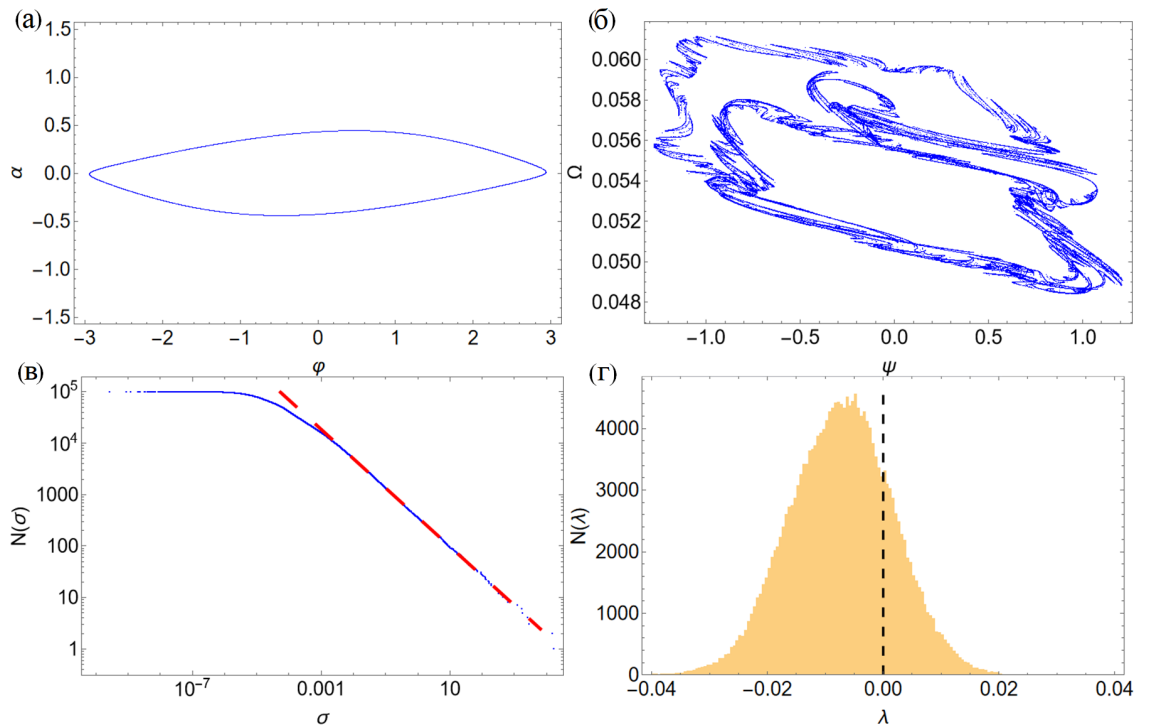


Рис. 4.2. Диаграммы, аналогичные рис. 4.1, но при $\varphi_0 = 0.01$, $\alpha_0 = 0.43$.

функция $N(\sigma)$ и распределение локальных значений старшего показателя Ляпунова, показанное на рис. 4.4г.

4.4 Хаотическая экстремальная мультистабильность

Использование систем с экстремальной мультистабильностью в качестве инструмента для построения основанной на синхронизации коммуникации повышенной секретности подразумевает периодическое переключение динамической системы передатчика на новый режим путём импульсного возмущения её траектории, то есть смены начальных условий для неё. Тогда несанкционированно перехваченный сигнал из канала связи, соединяющий в себе достаточно короткие фрагменты реализаций для разных мультистабильных режимов, не позволит восстановить по нему вид системы и синхронизироваться с ним. Очевидно, что для удовлетворительной работы коммуникационной схемы необходимо обеспечить переключения между именно сложными хаотическими режимами, по крайней мере, в большинстве случаев. Для этого требуется подобрать область значений начальных условий, достаточно плотному множеству из которых отвечает хаотическое поведение. Далее проведём исследование рассматриваемой системы (4.1)–(4.2) в контексте поиска такой области.

Исследование полного четырехмерного фазового пространства системы (4.1)–(4.2) довольно затруднительно. Упростим задачу следующим образом. Рассмотрим отдельный случай, когда гамильтонова ведущая подсистема генерирует КАМ-торы со слабым изменением во времени переменной α . Если α_n меняется слабо, то в управляемой подсистеме (4.2) можно в некотором приближении положить $\varepsilon(n) = \text{Const}$. Тогда систему (4.2) можно рассматривать в отрыве от ведущей гамильтоновой.

Проведём параметрический анализ системы (4.2) с ε , рассматриваемым в качестве параметра, и выделим области с плотным множеством хаотиче-

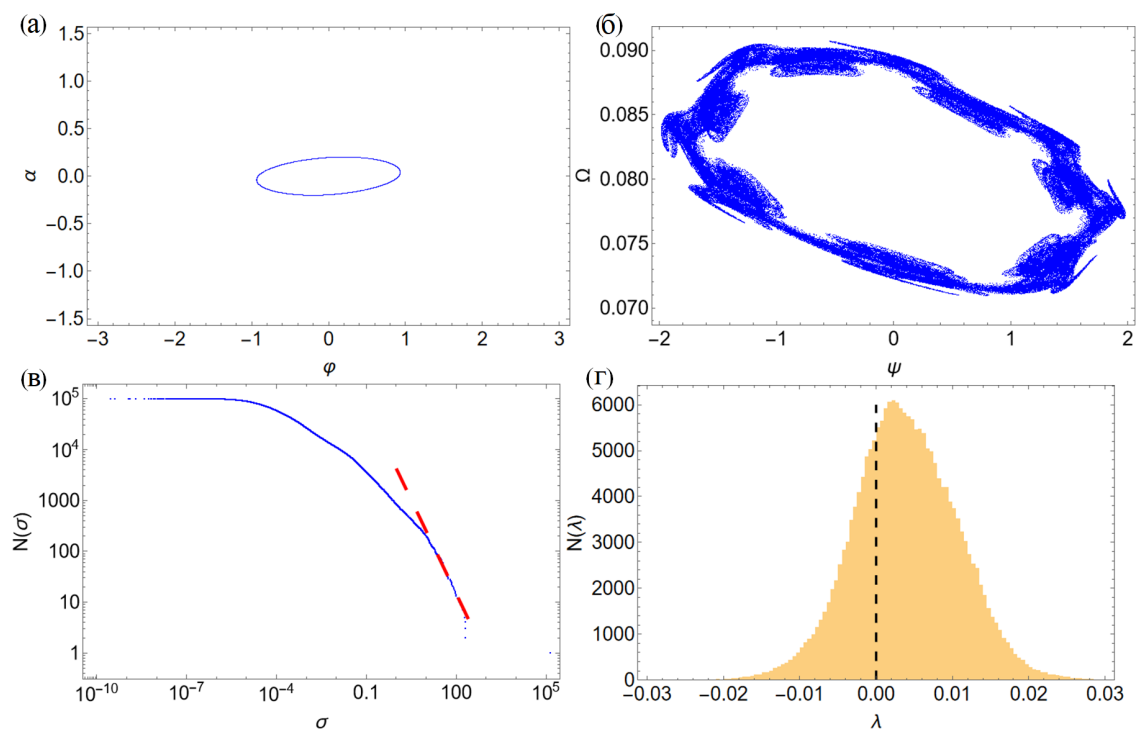


Рис. 4.3. Диаграммы, аналогичные рис. 4.1, но при $\varphi_0 = 0.9$, $\alpha_0 = 0.091$.

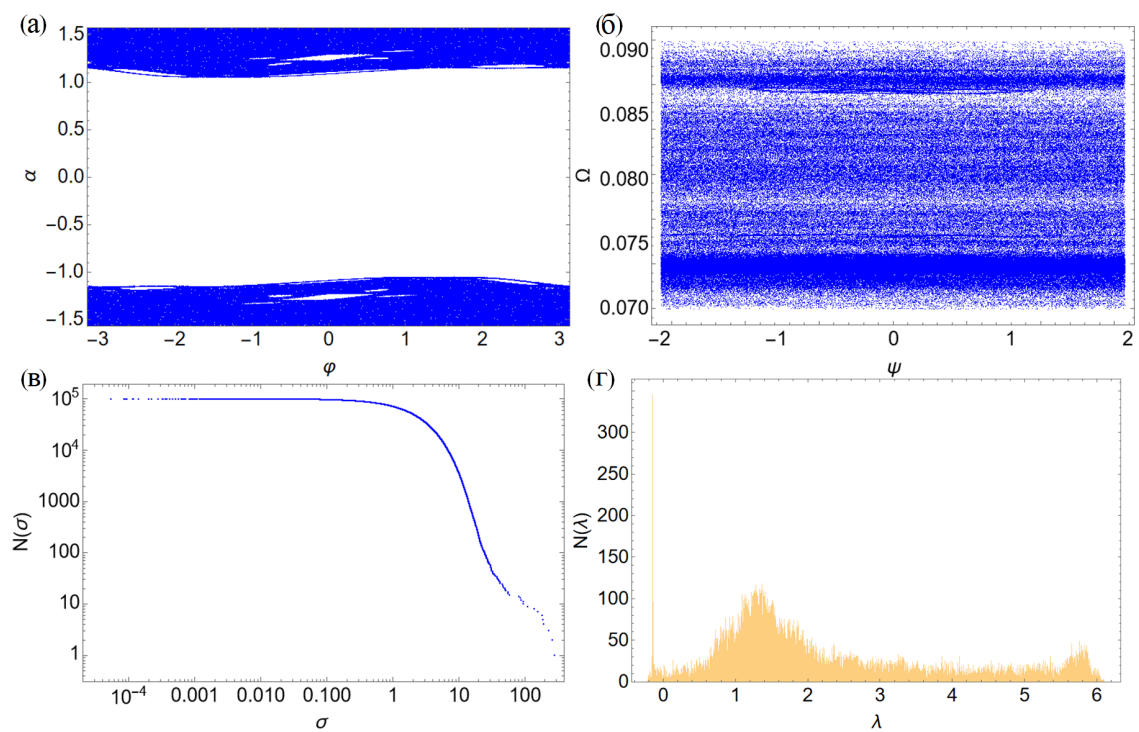


Рис. 4.4. Диаграммы, аналогичные рис. 4.1, но при $\varphi_0 = 0.0$, $\alpha_0 = 1.2$.

ских предельных множеств с целью их использования в дальнейшем для задач коммуникации. Для этого рассмотрим карту на рис. 4.5, на которой оттенками серого изображены значения старшего ляпуновского показателя (Λ): белый цвет соответствует $\Lambda < 0$, чёрный – $\Lambda > 3$, с линейным градиентом между ними. Для каждого значения B и ε начальные условия выбирались случайным образом из диапазонов $\psi_0 \in (-\pi, \pi)$ и $\Omega_0 \in (0, \Omega_{cr})$, где Ω_{cr} – критическое значение начальной скорости, появление которой подробно обсуждалось в разделе 3.2. Использование случайных начальных условий обусловлено возможным наличием мультистабильности в системе, которая может проявляться в резких изменениях ляпуновского показателя внутри одной характерной зоны.

На карте на рис. 4.5 выделяются четыре хаотические области. Нижняя область, начинающаяся от $\varepsilon = 0$, характеризуется наибольшими значениями старшего ляпуновского показателя. Примеры аттракторов из этой области представлены на рис. 4.6а (как совместно сверху, так и на отдельных панелях снизу). В подобных областях при различных значениях параметра ε возникают сильно неустойчивые множества сложной формы, из-за чего такие области будут исключены из дальнейшего анализа. Также не подходят верхние области, расположенные вблизи $\varepsilon = 0$, так как в них соответствующие значения α_n близки к $\pi/2$, где в консервативной системе наблюдается хаотическое поведение.

Подходящей областью является изолированная справа бледно-серая область. Зафиксируем параметр $B = 0.046$, тогда значения параметра $\varepsilon \in (0.55, 0.83)$ будут соответствовать рассматриваемой хаотической области. На рис. 4.6б представлены аттракторы, характерные для этой области.

На рис. 4.7 показан график зависимости значения ляпуновского показателя от параметра ε с шагом $\Delta\varepsilon = 0.0000005$. На каждом шаге Λ вычисляется для 1000 различных начальных условий. При увеличении па-

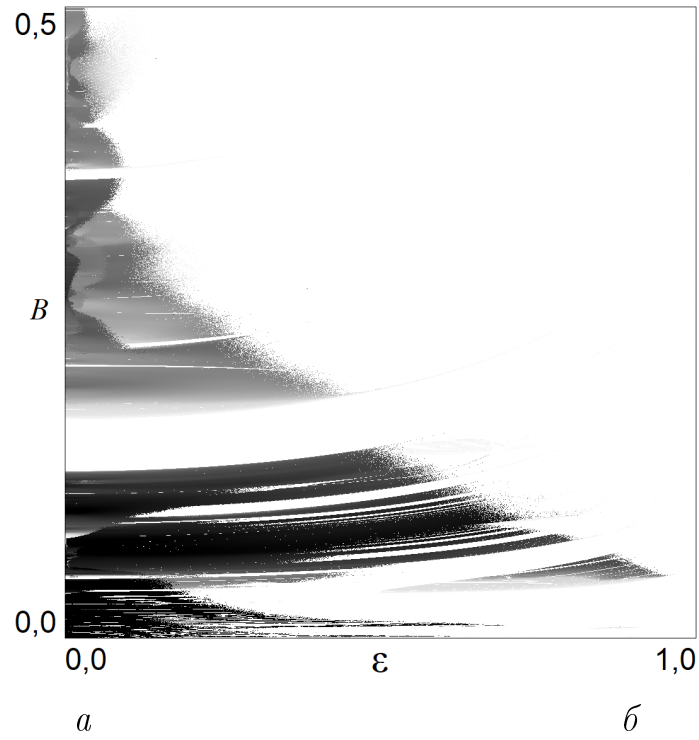


Рис. 4.5. Карта старшего ляпуновского показателя системы (4.2) с ε , рассматриваемым в качестве параметра, построенная для случайных начальных условий. Значения Λ отображены оттенками серого: $\Lambda < 0$ – белый, $\Lambda > 3$ – чёрный, градиент линейный.

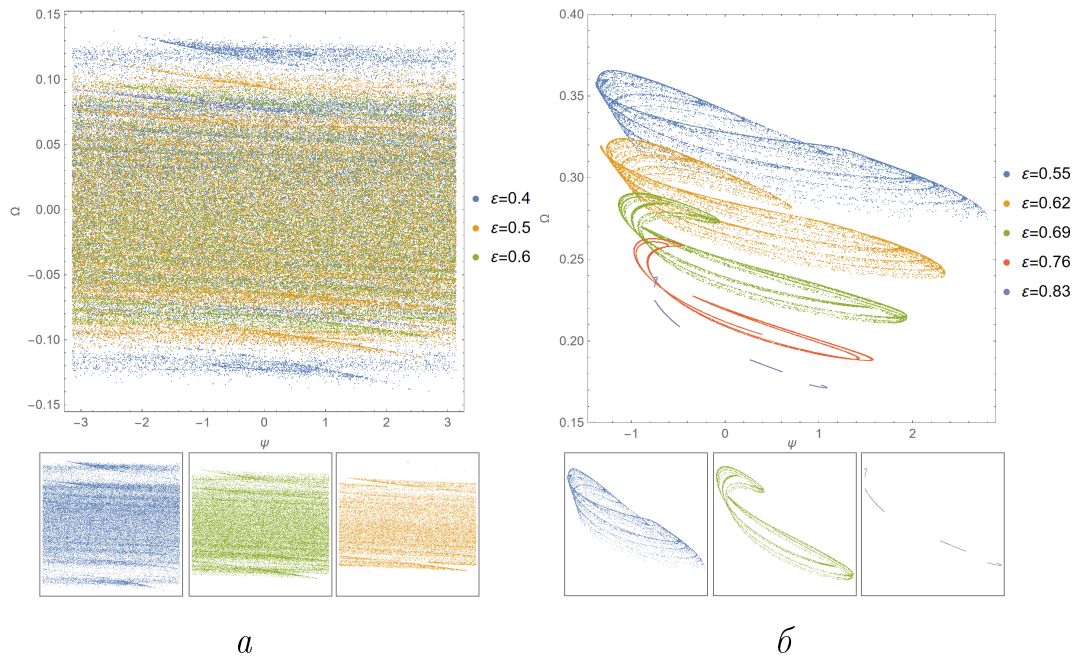


Рис. 4.6. Хаотические аттракторы подсистемы (4.2) с ε , рассматриваемым в качестве параметра, при $B = 0.007$ и начальных условиях $\Omega_0 = 0.01, \psi_0 = 0$ (a); $B = 0.046$ и начальных условиях $\Omega_0 = 0.2, \psi_0 = 0$ (б). Значения параметра ε показаны на рисунке.

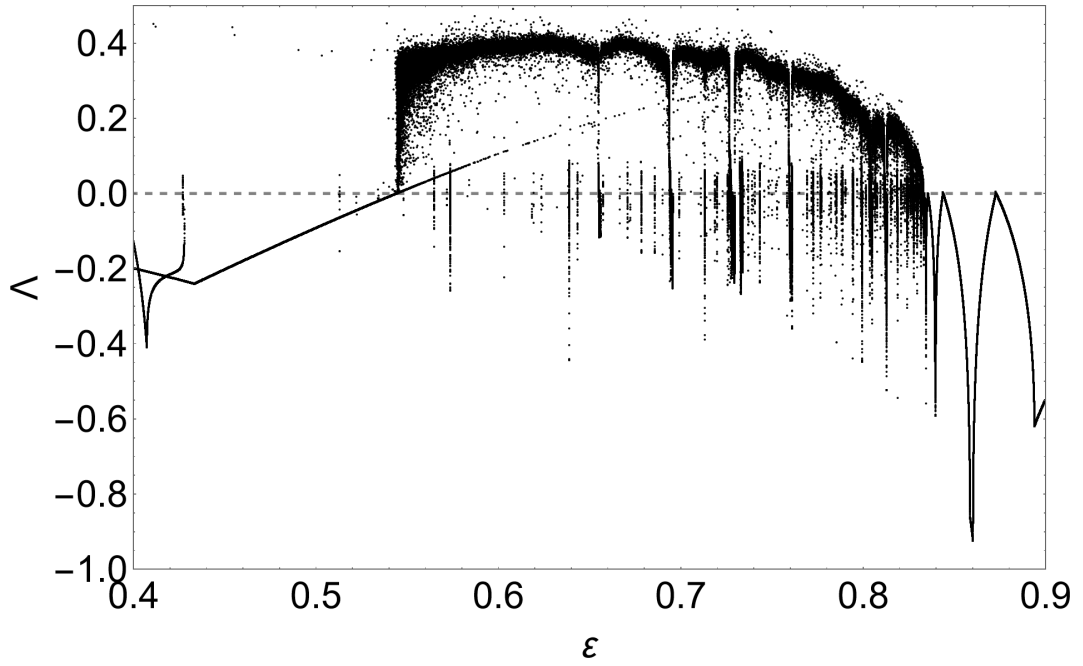


Рис. 4.7. Зависимость старшего ляпуновского показателя системы (4.2) от значения ε , рассматриваемым в качестве параметра системы, при параметре $B = 0.046$ и фиксированных начальных $\psi_0 = 0, \Omega_0 = 0.2$.

раметра ε , сначала наблюдаются два периодических аттрактора, один из которых быстро исчезает, а другой продолжает существовать. Ляпуновский показатель последнего возрастает до нулевого значения, при котором резко возникают два сосуществующих хаотических аттрактора. Один из них эволюционирует сложным образом, в том числе наблюдаются падения в отрицательную область значений. Такие падения возникают достаточно часто, образуя большое количество узких окон периодичности. Если рассматривать график с другой стороны, то при уменьшении параметра ε изменение ляпуновского показателя соответствует картине каскада бифуркаций удвоения периода.

Исследуем, как изменяется карта на рис. 4.5, в случае введения параметрического управления подсистемой (4.1) при различных параметрах. Для этого были построены соответствующие карты старшего показателя Ляпунова (Λ_s) на рис. 4.8, на которых по горизонтальной оси отложена величина $\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha_0$, по вертикальной оси отложен параметр B .

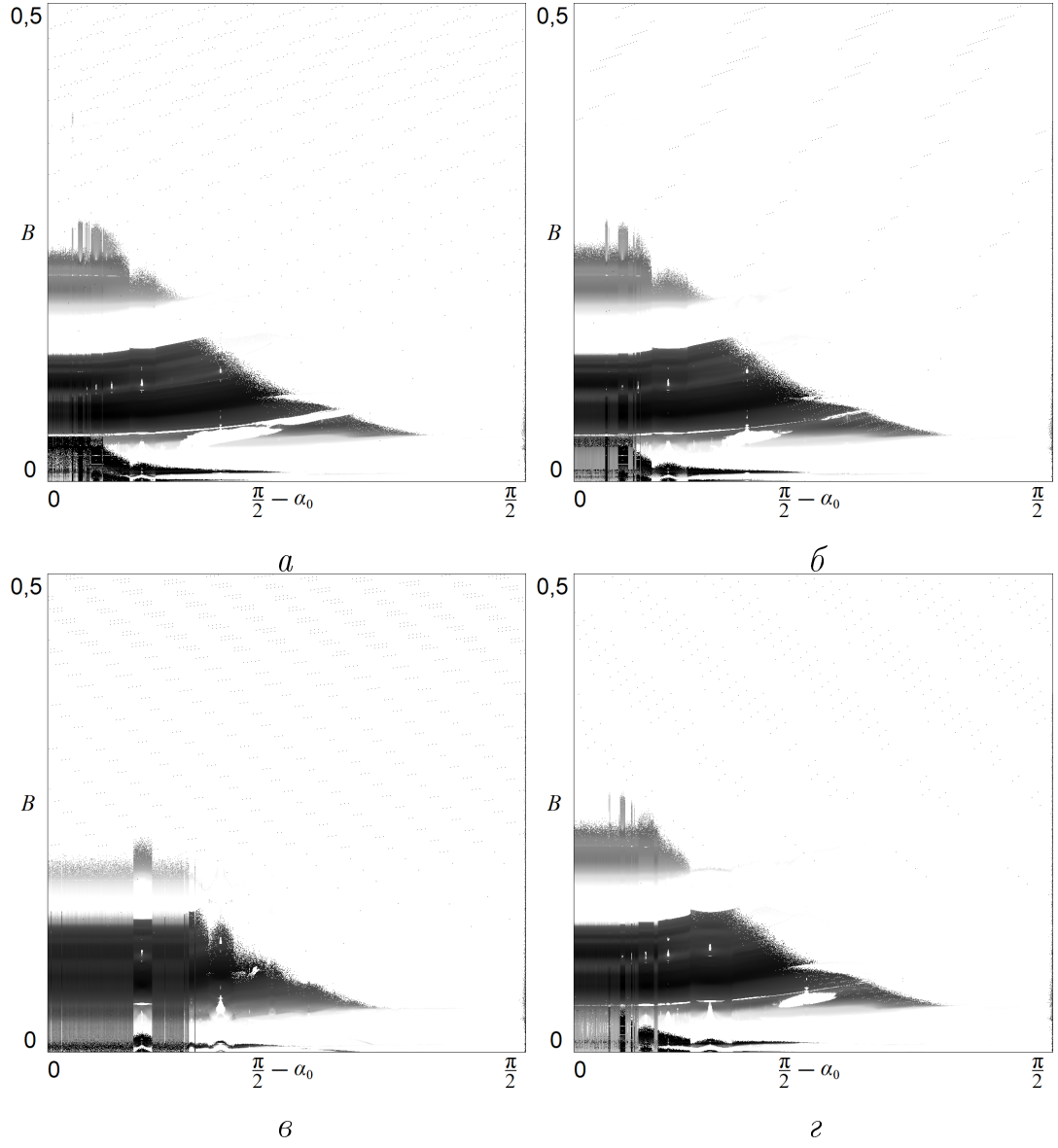


Рис. 4.8. Карты старшего ляпуновского показателя (Λ_s) подсистемы (4.2), построенные для случайных ψ_0, Ω_0 и $\varphi_0 = 0$ и параметрах подсистемы (4.1): $A = 2, C = 0.005$ (а); $A = 2, C = 0.01$ (б); $A = 2, C = 0.05$ (в); $A = 3, C = 0.01$ (г). Значения Λ отображены оттенками серого: $\Lambda < 0$ – белый, $\Lambda > 3$ – чёрный, градиент линейный.

На рис. 4.8*a* представлена карта, построенная для параметров ведущей системы: $A = 2, C = 0.005$. Видно, что её структура схожа с картой на рис. 4.5*a*, но с рядом изменений: почти полностью исчезли верхние хаотические области; изолированная хаотическая область справа расширилась; в окрестности нуля по горизонтали появился плотный набор полос. Увеличение параметра C до 0.01 приводит к дальнейшему расширению хаотической области справа и её слиянию с нижней областью (рис. 4.8*б*). Вероятно, это связано с увеличением кривизны КАМ-торов в подсистеме (4.1) при росте параметра C , что приводит к увеличению амплитуды колебаний переменной α . При дальнейшем увеличении C до 0.05 (рис. 4.8*в*) значительную часть карты занимают две области с полосами, разделённые небольшой зоной без полос. Увеличение области с полосами связано с увеличением размера хаотического моря в подсистеме (4.1), при этом зона без полос соответствует островку устойчивости внутри этого моря. Изменение параметра A не оказывает качественного влияния на общую картину, что подтверждается сравнением карт при $C = 0.01$: рис. 4.8*б* с $A = 2$ и рис. 4.8*г* с $A = 3$.

Дальнейший анализ проведем при $B = 0.046$. При таком значении параметра выбранной области соответствует $\varepsilon \in (0.55, 0.83)$. Учитывая, что $\varepsilon = \cos \alpha_n$, воздействие должно находиться в диапазоне $(0.59, 0.99)$. Предполагается, что любое квазипериодическое воздействие, попадающее в этот диапазон, будет приводить к возникновению хаотического аттрактора в подсистеме (4.2).

Квазипериодическое воздействие на подсистему (4.2) осуществляется подсистемой (4.1), параметры которой можно варьировать. Зафиксируем четыре набора параметров: $A = 2, C = 0.05$; $A = 2, C = 0.1$; $A = 3, C = 0.05$; и $A = 3, C = 0.1$. Рассмотрим карты старшего показателя Ляпунова Λ_s , на которых по осям отложены начальные условия: по вертикали – α_0 ,

по горизонтали – Ω_0 ; остальные начальные условия фиксированы: $\psi_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Карты на рис. 4.9 окрашены оттенками серого: белый цвет соответствует $\Lambda < 0$, чёрный – $\Lambda > 1$, с линейным градиентом между ними.

На рис. 4.9а видна широкая хаотическая область в диапазоне $\alpha_0 \in (0.59, 0.99)$, где воздействие на подсистему (4.1) попадает в предсказанный диапазон $(0.59, 0.99)$. В этой области $\Lambda_s < 1$ и ожидается плотное множество хаотических предельных множеств. Отметим, что параметр $C = 0.005$ настолько мал, что инвариантные кривые не сильно отличаются от прямых, что соответствует квазипостоянному воздействию. Далее наблюдается большое окно периодичности до значения $\alpha_0 \approx 1.14$, за которым начинается хаотическая область с более высокими значениями Λ_s по сравнению с нижней хаотической областью. В этой области также заметно тонкое окно периодичности, соответствующее окрестности резонанса на рис. 4.9б. На рис. 4.9в также наблюдается широкая хаотическая область в диапазоне $\alpha_0 \in (0.57, 0.97)$. Диапазон сместился, хотя ожидалось, что с увеличением C он расширится из-за роста амплитуды колебаний переменной α_n . Большое окно периодичности уменьшилось и продолжается до $\alpha_0 \approx 1.05$. Выше расположена хаотическая область с тонким окном периодичности. На рис. 4.9д в хаотических областях Λ_s изменяется от 0 в нижней части до значений, превышающих 1, в верхней части. Появление таких значений ляпуновского показателя свидетельствует о наличии сильно неустойчивых множеств, что будет продемонстрировано далее. Толстое окно периодичности уменьшилось и теперь расположено напротив резонанса на рис. 4.9е, а тонкое окно периодичности наблюдается вблизи резонанса внутри большого островка устойчивости. Отметим, что зависимость показателя Ляпунова от Ω_0 практически не изменяется при варьировании параметров A и C . На основании карт, представленных на рис. 4.9, Ω_0 желательно выбирать из диапазона $(0.00, 0.33)$.

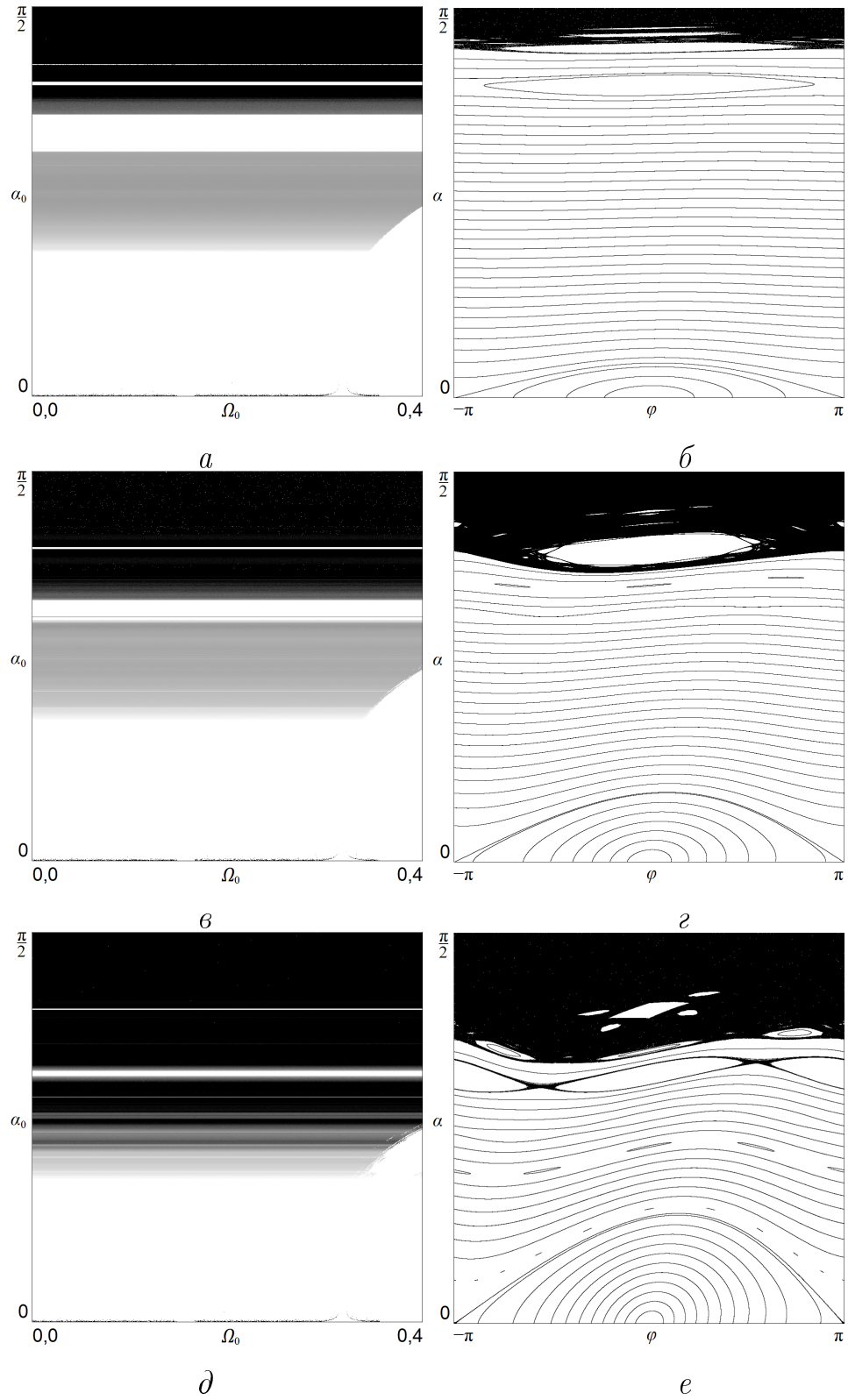


Рис. 4.9. Карты старшего ляпуновского показателя (Λ_s) подсистемы (4.2) построенные для случайных Ω_0, ψ_0 и $\varphi_0 = 0$ (рис. а, в, д), и соответствующие фазовые портреты подсистемы (4.1) (рис. б, г, е) при параметрах $A = 2, B = 0.046$ и $C = 0.005$ (а, б); $C = 0.02$ (в, г); $C = 0.05$ (д, е). Значения Λ_s отображены оттенками серого: $\Lambda < 0$ – белый, $\Lambda > 1$ – чёрный, градиент линейный.

Зафиксируем $\Omega_0 = 0.2$ и рассмотрим аттракторы в пространстве системы (4.2) при различных начальных α_0 . На рис. 4.10 аттракторы смещены относительно друг друга вдоль оси ψ так, чтобы они располагались в ряд. Параметры $A = 2$, $B = 0.046$, а параметр C меняется от рисунка к рисунку. Поскольку α_0 выполняет роль параметра в полной системе, то при его увеличении на рисунках можно наблюдать бифуркации.

На рис. 4.10а сначала идут две пары торов, которые попарно сталкиваются друг с другом, в результате чего видны две хаотические отдельные области одного аттрактора (данный сценарий рождения странных аттракторов описан в [168]), которые затем сливаются друг с другом, образуется единое множество. С увеличением α_0 аттрактор деформируется, а затем схлопывается в два тора. Затем они фрактализуются и, в какой-то момент, «рассыпаются» и превращаются в сильно неустойчивые множества сложной формы. Увеличив параметр C , на рис. 4.10б мы видим, что сначала появляется одна пара торов, которая должна удвоиться, и затем также должны попарно столкнуться и слиться в единый хаотический аттрактор. Далее он деформируется и в какой-то момент также схлопывается в два тора. Они возникают раньше, а окно их существования уже, чем у аналогичных на предыдущем рисунке. Также здесь «рассыпание» аттракторов происходит раньше, до окна периодичности, начиная с аттрактора с индексом $i = 13$. На рис. 4.10в наблюдается аналогичная ситуация: виднеется одна пара торов. Однако сценарий рождения хаоса отличается, потому что пара торов не удваивается, а сразу сталкивается, и рождается хаотический аттрактор. Затем он деформируется и быстро «рассыпается», начиная с индекса $i = 5$.

Прежде чем делать финальное заключение, рассмотрим зависимости Λ_s от α_0 на рис. 4.11 при различных значениях параметра C . Графики построены с шагом $\Delta\alpha_0 = 0.000001$. Для начала, обратим внимание, что графики

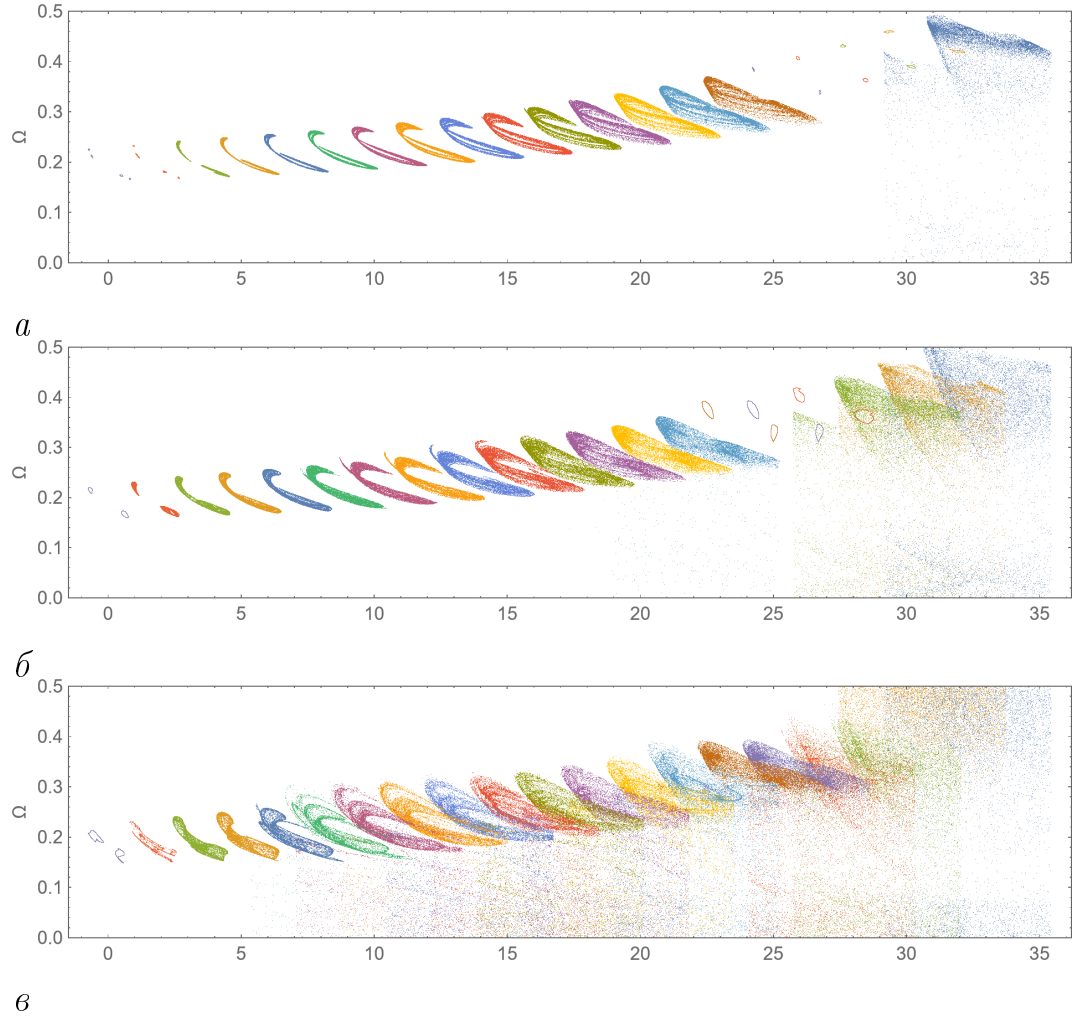


Рис. 4.10. Аттракторы системы (4.1)-(4.2) в проекции на подпространство (4.2) при параметрах $A = 2, B = 0.046, C = 0.005$ (а), $C = 0.02$ (б), $C = 0.05$ (в), фиксированных начальных $\psi_0 = 0, \varphi_0 = 0, \Omega_0 = 0.2$ и различных $\alpha_0 = 0.54 + 0.032i, i = 0..19$. Для удобства аттракторы смещены друг относительно друга вдоль оси ψ .

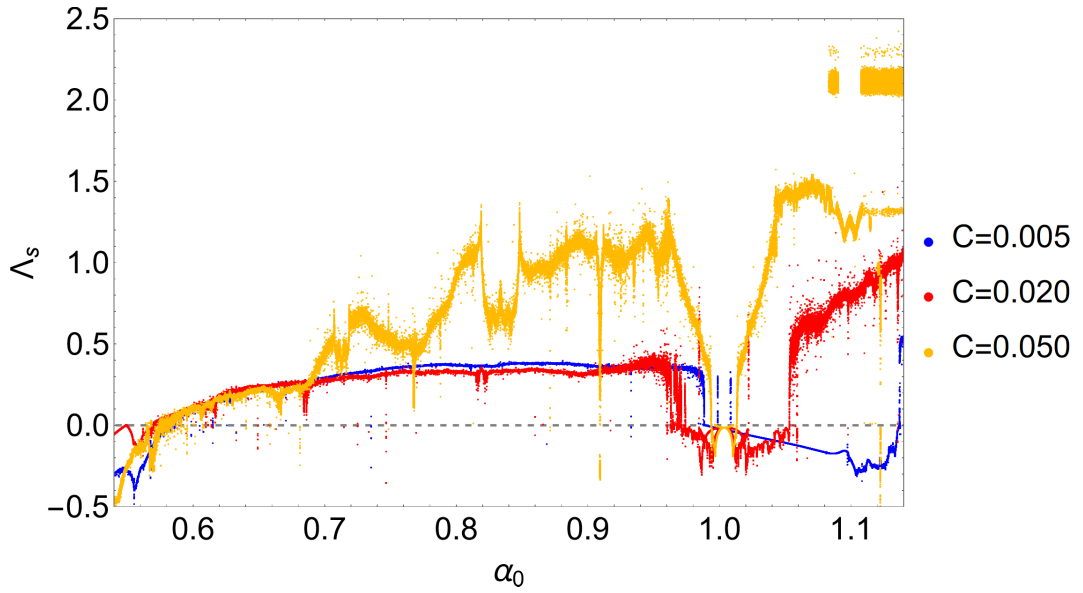


Рис. 4.11. Зависимость старшего ляпуновского показателя подсистемы (4.2) от значения α_0 , полученная при параметрах $A = 2, B = 0.046, C$ – указан на рисунке, и фиксированных начальных $\psi_0 = 0, \varphi_0 = 0, \Omega_0 = 0.2$.

на рис. 4.11 ведут себя сложным образом: они имеют некие флуктуации около своего среднего, из-за чего кривая имеет конечную ширину. Также имеются выбросы как вверх, так и вниз в отрицательную область. Непрерывное изменение кривой указывает на чувствительность системы к α_0 , как к параметру.

Хорошо видно, что график при параметре $C = 0.05$ начинает быстро уходить выше раньше, чем два других графика. При этом, когда он начинает резко уходить выше, его флуктуации становятся сильнее. Вообще говоря, у графика при параметре $C = 0.02$ тоже начинается это увеличение значения, просто оно малозаметное и начинается где-то с $\alpha_0 \approx 0.9$, но быстро «поглощается» окном периодичности. Такое резкое увеличение показателей Ляпунова соответствует ситуации, когда аттрактор «рассыпается» (можно провести аналогию с рис. 4.10). Так можно заключить, что, чем больше значение параметра C , тем раньше аттракторы начинают «рассыпаться».

На рис. 4.11 также наблюдается окно периодичности, которое умень-

шается с ростом параметра C , размер которого достигает минимального значения около соответствующего резонанса на рис. 4.9е. Однако связь окна периодичности с резонансом не указывает на его первопричинность. Из рис. 4.7 следует, что при аналогичных значениях $\cos \alpha_n = \varepsilon$ наблюдаются периодические режимы. Параметрическое квазипериодическое воздействие способствует возникновению хаоса в этой области, но вблизи резонансов квазипериодическое воздействие не всегда может преобразовать периодический аттрактор в хаотический.

Сравнение графиков на рис. 4.11 с графиком на рис. 4.7 позволяет отметить, что воздействие приводит к уменьшению количества провалов в отрицательную область. Это связано с тем, что в системе (4.3) вероятность встретить хаотический аттрактор выше, чем периодический, и воздействию удастся чаще «попадать» в хаос, чем в периодику, из-за чего результирующий аттрактор формируется хаотическим. Однако если начальные условия в подсистеме (4.1) попадают в окрестность резонанса и формируется такое воздействие, соответствующее отрицательному старшему показателю Ляпунова у системы (4.3), то в подсистеме (4.2) может возникнуть отрицательный показатель Ляпунова. Кажущееся увеличение частоты провалов в отрицательную область с ростом параметра C объясняется тем, что попасть в окрестность резонанса проще при больших значениях C , поскольку с ростом C резонансные зоны расширяются.

Окрестности резонансов, имеющие мощность континуума, и счетное множество самих резонансов в гамильтоновых системах, могут приводить к бесконечному числу выбросов в отрицательную область. Чувствительность аттрактора к малым изменениям α_0 позволяет предположить, что формируемое множество предельных множеств состоит из несчётного множества хаотических предельных множеств и счетного множества резонансных окон с регулярными предельными множествами.

4.5 Коммуникация

Для передатчика и приёмника подсистема (4.1) должна быть общей. Это требует передачи переменной α_{n+1} по одному из каналов связи. Именно эта переменная задёт аттрактор в подсистеме (4.2) передатчика. Для синхронизации траектории на аттракторе передатчик передаёт сигнал от подсистемы (4.2). Здесь предложены два вида передаваемого сигнала. В первом случае в канале связи подаётся переменная ψ_n , тогда система приёмника

$$\begin{cases} \Omega_{2,n+1} = \Omega_{2,n} + 2B \sin \psi_{2,n} \cos \alpha_{n+1}; \\ \psi_{2,n+1} = \psi_{2,n} + \frac{1}{\Omega_{2,n} \cos \alpha_{n+1} + 2B \sin \psi_{2,n}} - \delta(\psi_{2,n}^2 - \psi_n^2), \end{cases} \quad (4.7)$$

где синхронизация обеспечивается за счёт квадратичной связи с её интенсивностью δ . Во втором случае сигнал в канале связи

$$t_n = \Omega_n \cos \alpha_{n+1} + 2B \sin \psi_n. \quad (4.8)$$

Для синхронизации с передатчиком, приёмник имеет вид

$$\begin{cases} \Omega_{2,n+1} = \Omega_{2,n} + 2B \sin \psi_{2,n} \cos \alpha_{n+1}; \\ t_{2,n} = \Omega_{2,n} \cos \alpha_{n+1} + 2B \sin \psi_{2,n}; \\ \psi_{2,n+1} = \psi_{2,n} + \frac{1}{t_{2,n}} - \delta\left(\frac{1}{t_{2,n}}^2 - \frac{1}{t_n}^2\right). \end{cases} \quad (4.9)$$

Для исследования синхронизации и коммуникации зафиксируем параметры

$$A = 2.0, B = 0.046, C = 0.05. \quad (4.10)$$

Для обнаружения полной синхронизации при различных значениях параметра связи δ используется следующий подход. Сначала система моделируется в течение миллиона итераций, начиная с фиксированных начальных условий передатчика и приёмника. Затем анализируется степень синхронизации системы путём вычисления среднего модуля разности векторов

состояний передатчика и приёмника

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sqrt{(\psi_{2,n} - \psi_{1,n})^2 + (\Omega_{2,n} - \Omega_{1,n})^2}. \quad (4.11)$$

Нулевое значение σ свидетельствует о достижении полной синхронизации, когда состояния передатчика и приёмника полностью совпадают.

Для значений δ , обеспечивающих полную синхронизацию, можно определить время до наступления полной синхронизации T . Для этого сначала производится 100 итераций отображений, начиная с фиксированных начальных условий, при этом на каждом шаге сохраняются значения переменных передатчика и приёмника. По полученным 100 значениям переменных вычисляется σ . Если σ оказывается ненулевым, выполняется ещё одна итерация, после чего σ пересчитывается заново по обновлённому скользящему окну из 100 последних состояний. Этот процесс повторяется до тех пор, пока σ не станет равным нулю, что соответствует полной синхронизации.

Зависимости среднего модуля разности состояний передатчика и приёмника σ от интенсивности связи δ представлены на рис. 4.12а,б. При $\sigma = 0$ определяется время синхронизации T , зависимость от δ которого представлены на рис. 4.12в,г.

Согласно рис. 4.12а,в, полная синхронизация при передаче ψ_n с приёмником (4.7) не является грубой из-за её возможной потери при малых изменениях δ . Использование сигнала (4.8) с приёмником (4.9) оказывается предпочтительнее: из рис. 4.12б,г следует, что при $\delta \in (0.018, 0.056)$ полная синхронизация устойчива, а время её установления не превышает 100 итераций.

Чтобы внедрить полезную информацию в хаотический носитель, применяются два классических метода [61, 62]: аддитивное подмешивание полезной информации к хаотическому носителю (хаотическая маскировка) и

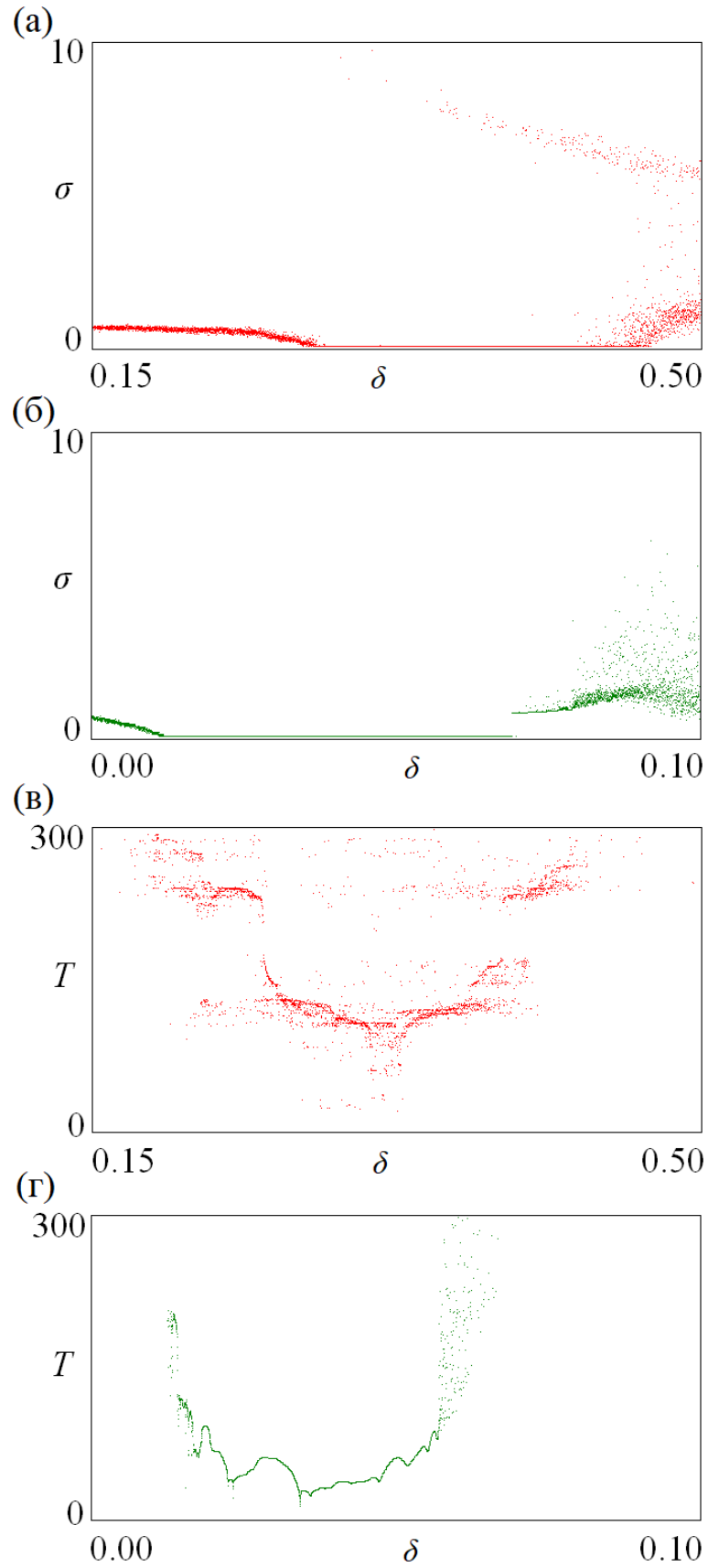


Рис. 4.12. Графики зависимости σ от интенсивности связи δ (а, б) и графики зависимости T от интенсивности связи δ (в, г). при передаче ψ_n с приёмником (4.7) (а, в), при передаче (4.8) с приёмником (4.9) (б, г). Параметры передатчика и приёмника (4.10).

нелинейное подмешивание полезной информации к динамике передатчика, которые были описаны в главе 1.

Метод аддитивного подмешивания реализуется следующим образом. На передатчике генерируется хаотическая последовательность t_n . К нему добавляется слабый информационный сигнал s_n , амплитуда которого значительно меньше амплитуды t_n :

$$t_n \rightarrow t_n + s_n. \quad (4.12)$$

Полная синхронизация между передатчиком и приёмником обеспечивает равенство $t_{2,n} = t_n$, что позволяет выполнить расшифровку путём простого вычитания $s'_n = t'_n - t_{2,n}$.

Для реализации метода нелинейного подмешивания необходимо встроить полезную информацию в динамику системы. Это можно сделать, например, модификацией эволюции переменной ψ_n следующим образом:

$$\psi_{n+1} = \psi_n + 1/t_n + s_n. \quad (4.13)$$

Обычно, при использовании нелинейного подмешивания в случае полной синхронизации, возможно извлечь информацию без искажений. Однако это справедливо для потоковых систем. Для дискретных систем требуется индивидуальный подход к выбору способа расшифровки информации.

Схема коммуникации выглядит следующим образом. От системы (4.1) передатчика посылается сигнал α_{n+1} в скрытый канал связи, соединяющий передатчик и приёмник. Примечательность системы (4.1) в её возможной физической реализации в виде оптического устройства, что могло бы позволить быстро и без потерь передавать информацию об аттракторе. От системы (4.2) передатчика во второй открытый канал связи посылается сигнал (4.8) с аддитивно подмешанной информацией s_n – (4.12), или сигнал (4.8), несущий в своей динамике информацию s_n , при её нелинейном подмешивании (4.13). Реализовать систему (4.2) можно цифровым спосо-

бом. На приёмнике расположена система (4.9), обеспечивающая синхронизацию. Численные эксперименты показали, что эффективно расшифровать информацию как для аддитивного, так и для нелинейного подмешивания на приёмнике удаётся путём применения фильтра низких частот к разности $t_n - t_{2,n}$.

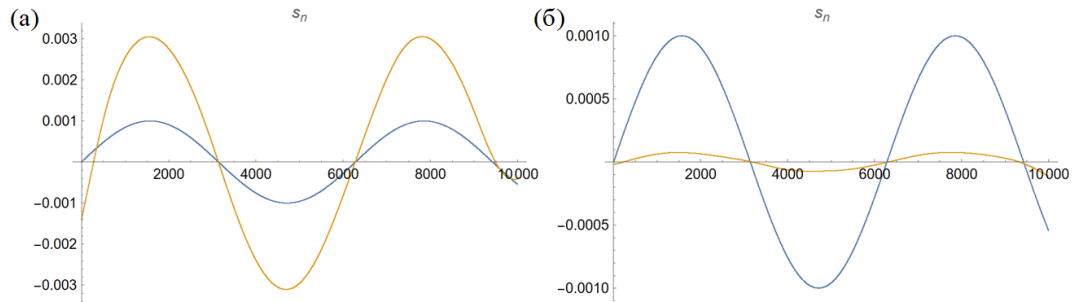


Рис. 4.13. Сравнение полезного и расшифрованного сигнала при использовании метода аддитивного подмешивания информационного сигнала к несущему (а), нелинейного подмешивания полезного сигнала к динамике системы (б).

На рис. 4.13 приведены примеры расшифровки при параметрах (4.10) и при наличии слабого аддитивного шума (амплитудой $\sim 10^{-3}$) в канале связи. На графиках синяя кривая – исходная полезная информация, желтая кривая – результат расшифровки. На рис. 4.13а представлен информационный сигнал и результат расшифровки при использовании аддитивного подмешивания. Видно, что амплитуда расшифрованного сигнала превышает амплитуду исходного. На рис. 4.13б представлен информационный сигнал и результат расшифровки при использовании нелинейного подмешивания. Здесь амплитуда расшифровки оказалась меньше, чем у полезного сигнала. В обоих случаях форма восстановленного сигнала соответствует полезной информации.

4.6 Выводы к Главе 4

В результате проведённого исследования системы под гамильтоновым управлением была установлена причина возникновения явления экстремальной мультистабильности в её полном фазовом пространстве. Установлено, что несчётное множество квазипериодических траекторий (КАМ-торов) гамильтоновой подсистемы, выбор которых определяется её начальными условиями, порождает несчётное множество «форм» параметрического воздействия на ведомую подсистему. Каждой такой уникальной форме воздействия соответствует свой аттрактор в ведомой подсистеме. Таким образом, в полном фазовом пространстве ведущей-ведомой системы формируется несчётное множество предельных множеств. Также были определены диапазоны параметров и начальных условий, при которых в системе наблюдается плотное множество хаотических предельных множеств.

На основе выявленных динамических свойств был предложен и исследован метод хаотической коммуникации, использующий хрупкость данной системы и допускающий обобщение на весь класс гамильтоново управляемых систем. Предложенная схема связи реализована на основе двух каналов, обеспечивающих устойчивую синхронизацию. По скрытому каналу передаётся управляющее воздействие, которое однозначно определяет текущий аттрактор в ведомой системе. Высокий уровень скрытности обеспечивается за счёт возможности практически неограниченного переключения между хаотическими аттракторами. По этой причине передача управления через такой канал должна осуществляться без каких-либо искажений, что, например, может быть достигнуто при реализации управляющей системы в виде оптоволокна с соответствующей геометрией. По открытому каналу передаётся хаотический сигнал ведомой подсистемы передатчика, который используется для обеспечения однонаправленной синхронизации с приём-

ником.

В ходе анализа различных вариантов связи в качестве оптимального был идентифицирован способ квадратичной связи, который обеспечивает полную синхронизацию передатчика и приёмника с идентичными параметрами менее чем за 100 итераций. Для передачи информации были использованы два классических метода подмешивания полезной информации к хаотической несущей – хаотическая маскировка и нелинейное подмешивание. Численное моделирование подтвердило возможность удовлетворительного восстановления информационного сигнала в приёмнике при обоих методах; при этом наблюдалось изменение уровня интенсивности результирующего информационного сигнала.

Заключение

Проведённые в работе исследования особенностей динамических и статистических закономерностей, присущих сложным режимам поведения систем, обладающих свойством грубости, и систем, обладающих свойством хрупкости, показали, что оба класса систем демонстрируют специфические, отличающиеся друг от друга свойства, которые можно использовать в средствах коммуникации для решения различных прикладных задач. Грубые системы обеспечивают устойчивость передачи при наличии параметрических расстройек и частотных искажений в канале связи. Хрупкие системы с экстремальной мультистабильностью обеспечивают повышенную скрытность передачи за счёт динамического переключения между несчётным числом притягивающих множеств, что в перспективе может обеспечить более безопасную связь по сравнению со схемами на основе грубых систем.

По результатам четырёх глав были получены следующие основные результаты:

- Численно подтверждено, что использование грубых генераторов гиперболического хаоса и странных нехаотических аттракторов обеспечивает высокую сложность и широкополосность сигналов, что подтверждается спектральным анализом и распределением локальных показателей Ляпунова. Предложенные схемы коммуникации на базе таких генераторов, в отличие от аналогов с негрубыми генераторами, демонстрируют устойчивость к отстройкам и расстройкам параметров, сохраняя качество передачи данных даже при неидентичности передатчика и приёмника, что подтверждает их перспективность для практического применения.
- Установлено, что однонаправленно связанные генераторы гиперболи-

ческого хаоса и генераторы с грубой странной нехаотической динамикой, в отличие от негрубых генераторов, демонстрируют однородную зависимость от времени локальной, вычисленной в скользящем окне, корреляции сигналов в режиме полной синхронизации. Показано, что они сохраняют однородность этой зависимости даже при обобщенной синхронизации в условиях неидентичности подсистем или частотных искажений в канале связи. Этот феномен обеспечивает возможность детектирования информации в схемах на базе хаотической синхронизации не только в идеальных условиях численного эксперимента, но и в реальных, если в качестве приёмника и передатчика применяются грубые генераторы.

- Установлено, что в модели бильярда с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей возможна более сложная динамика, чем в бильярде с геометрией типа стадиона. А именно, в нем существует не один, а два принципиально разных режима ускорения Ферми: медленное (при начальных скоростях частиц ниже критической) и быстрое (при начальных скоростях частиц выше критической). Получена приближенная модель бильярда типа волновода, сохраняющая этот основополагающий эффект, представляемая в виде однонаправленно связанных модифицированного диссипативного отображения Ферми-Паста-Улама и консервативного отображения Теннисона-Либермана-Лихтенберга. Такая дискретная модель, будучи диссипативной, может порождать в фазовом пространстве притягивающие инвариантные множества, обладающие нейтральным многообразием. Тем самым, может реализовываться континуум таких притягивающих множеств при фиксированных значениях параметров, и становится возможным говорить о чрезвычайной хрупкости системы: её чувствительности к точности задания не только параметров, но и

начальных условий.

- Численно подтверждено, что в приближенной модели бильярда с геометрией типа волновода с одной гофрированной осциллирующей границей в виде однонаправленно связанных диссипативного модифицированного отображения Ферми-Паста-Улама и консервативного отображения Теннисона-Либермана-Лихтенберга возможна экстремальная мультистабильность с бесконечным несчётным числом хаотических предельных множеств, что открывает возможность разработки двухканальной коммуникационной схемы на основе хаотической синхронизации и повышения уровня скрытности при помощи мультистабильности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Yu F. et al. A survey on true random number generators based on chaos //Discrete Dynamics in Nature and Society. - 2019. - Т. 2019. - №. 1. - С. 2545123.
- [2] Verschaffelt G., Khoder M., Van der Sande G. Random number generator based on an integrated laser with on-chip optical feedback //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2017. – Т. 27. – №. 11.
- [3] Bakiri M. et al. Survey on hardware implementation of random number generators on FPGA: Theory and experimental analyses //Computer Science Review. – 2018. – Т. 27. – С. 135-153.
- [4] Yeoh W. Z., Teh J. S., Chern H. R. A parallelizable chaos-based true random number generator based on mobile device cameras for the android platform //Multimedia Tools and Applications. – 2019. – Т. 78. – №. 12. – С. 15929-15949.
- [5] Karakaya B., Gülten A., Frasca M. A true random bit generator based on a memristive chaotic circuit: Analysis, design and FPGA implementation //Chaos, Solitons & Fractals. – 2019. – Т. 119. – С. 143-149.
- [6] Baptista M. S. Cryptography with chaos //Physics letters A. – 1998. – Т. 240. – №. 1-2. – С. 50-54.
- [7] Dachsel F., Schwarz W. Chaos and cryptography //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 2002. – Т. 48. – №. 12. – С. 1498-1509.
- [8] Antonik P. et al. Using a reservoir computer to learn chaotic attractors, with applications to chaos synchronization and cryptography //Physical Review E. – 2018. – Т. 98. – №. 1. – С. 012215.

- [9] Liu Z. et al. Principles of chaotic signal radar //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2007. – Т. 17. – №. 05. – С. 1735-1739.
- [10] Pappu C. S. et al. An electronic implementation of lorenz chaotic oscillator synchronization for bistatic radar applications //IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 2017. – Т. 53. – №. 4. – С. 2001-2013.
- [11] Jiang T. et al. Experimental investigation of a direct chaotic signal radar with Colpitts oscillator //Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2010. – Т. 24. – №. 8-9. – С. 1229-1239.
- [12] Xiong G. et al. Radar target detection method based on cross-correlation singularity power spectrum //IET Radar, Sonar & Navigation. – 2019. – Т. 13. – №. 5. – С. 730-739.
- [13] Xu H. et al. Chaos-based through-wall life-detection radar //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2019. – Т. 29. – №. 07. – С. 1930020.
- [14] Dmitriev A. S., Panas A. I., Starkov S. O. Experiments on speech and music signals transmission using chaos //International Journal of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences & Engineering. – 1995. – Т. 5. – №. 4.
- [15] Kennedy M., Rovatti R., Setti G. (ed.). Chaotic electronics in telecommunications. – CRC press, 2000.
- [16] Bollt E. M. Review of chaos communication by feedback control of symbolic dynamics //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2003. – Т. 13. – №. 02. – С. 269-285.
- [17] Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации //Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179. – №. 12. – С. 1281-1310.

- [18] Kaddoum G. Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey //IEEE access. – 2016. – Т. 4. – С. 2621-2648.
- [19] Isaeva O. B., Jalnine A. Y., Kuznetsov S. P. Chaotic communication with robust hyperbolic transmitter and receiver //2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium-Spring (PIERS). – IEEE, 2017. – С. 3129-3136.
- [20] Banerjee S., Yorke J. A., Grebogi C. Robust chaos //Physical Review Letters. – 1998. – Т. 80. – №. 14. – С. 3049.
- [21] Zeraoulia E., Sprott J. C. Robust chaos and its applications. World Sci //Ser. Nonlinear Sci. Ser. A. – 2011. – Т. 79.
- [22] Андронов А., Понтрягин Л. Грубые системы //Доклады Академии наук СССР. - 1937. 14, 247-251.
- [23] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, 2 изд //М., Физматгиз. - 1959.
- [24] Аносов Д. В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция //Математические события XX века. М.:«Фазис. – 2003. – С. 1-18.
- [25] Аносов Д. В. и др. Динамические системы с гиперболическим поведением //Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». – 1991. – Т. 66. – №. 0. – С. 5-242.
- [26] Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем //Нелинейные волны. М.: Наука. – 1979. – С. 192-212.

- [27] Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1997. – Т. 7. – №. 09. – С. 1953-2001.
- [28] Abraham R., Smale S. Non-genericity of Ω -stability //Proc. Sympos. Pure Math. – 1970. – Т. 14. – С. 5-8.
- [29] Kuznetsov S. P. Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer. – 2012.
- [30] Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике //Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181. – №. 2. – С. 121-149.
- [31] Nagaraj N., Shastry M. C., Vaidya P. G. Increasing average period lengths by switching of robust chaos maps in finite precision //The European Physical Journal Special Topics. - 2008. - Т. 165. - №. 1. - С. 73-83.
- [32] Gusso A., Dantas W. G., Ujevic S. Prediction of robust chaos in micro and nanoresonators under two-frequency excitation //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. - 2019. - Т. 29. - №. 3.
- [33] Axenie C. et al. Antifragility in complex dynamical systems //Complexity. - 2024. - Т. 1. - №. 1. - С. 12.
- [34] Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. Quasiattractors and homoclinic tangencies //Computers & Mathematics with Applications. – 1997. – Т. 34. – №. 2-4. – С. 195-227.
- [35] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И. Автоколебания динамических и стохастических систем и их математический образ—аттрактор //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. - 2010. - Т. 6. - №. 1. - С. 107-126.

- [36] Гонченко А. С. и др. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2017. - Т. 25. - №. 2. - С. 4-36.
- [37] Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95, no.14. P.144101.
- [38] Hunt B. R., Ott E. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // Physical Review Letters. - 2001. - Т. 87. - №. 25. - С. 254101.
- [39] Kim J. W. et al. Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions // Physical Review E. - 2003. - Т. 67. - №. 3. - С. 036211.
- [40] Жалнин А. Ю., Кузнецов С. П. О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // Журнал технической физики. - 2007. - Т. 77. - №. 4. - С. 10-18.
- [41] Кузнецов С. П. Электронное устройство, реализующее странный нехаотический аттрактор Ханта-Отта // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2019. - Т. 27. - №. 2. - С. 61-72.
- [42] Жалнин А. Ю., Кузнецов С. П. Странные нехаотические автоколебания в системе механических ротаторов // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. - 2017. - Т. 13. - №. 2. - С. 257-275.
- [43] Дорошенко В. М. Странный нехаотический аттрактор типа Ханта и Отта в системе с кольцевой геометрией // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2016. - Т. 24. - №. 1. - С. 16-30.

- [44] Ngonghala C. N., Feudel U., Showalter K. Extreme multistability in a chemical model system //Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2011. – T. 83. – №. 5. – C. 056206.
- [45] Sprott J. C. et al. Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping //The European Physical Journal Special Topics. – 2017. – T. 226. – №. 9. – C. 1979-1985.
- [46] Sun J. et al. A memristive chaotic system with hypermultistability and its application in image encryption //Ieee Access. – 2020. – T. 8. – C. 139289-139298.
- [47] Li C. et al. Extreme multistability analysis of memristor-based chaotic system and its application in image decryption //AIP Advances. – 2017. – T. 7. – №. 12.
- [48] Qin M. H., Lai Q. Extreme multistability and amplitude modulation in memristive chaotic system and application to image encryption //Optik. – 2023. – T. 272. – C. 170407.
- [49] Subramanian R. et al. Dynamical analysis of a quadratic megastable chaotic oscillator and its application in biometric fingerprint image encryption //Complexity. – 2024. – T. 2024. – №. 1. – C. 2005801.
- [50] Dong Q., Bai Y., Zhu K. A 5-D memristive hyperchaotic system with extreme multistability and its application in image encryption //Physica Scripta. – 2024. – T. 99. – №. 3. – C. 035253.
- [51] Zhao G. et al. A new memristive system with extreme multistability and hidden chaotic attractors and with application to image encryption //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2024. – T. 34. – №. 01. – C. 2450010.

- [52] Pisarchik A. N. et al. Secure chaotic communication based on extreme multistability //Journal of the Franklin Institute. – 2021. – Т. 358. – №. 4. – С. 2561-2575.
- [53] Кузнецова О. И. Применение мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи //Чебышевский сборник. – 2023. – Т. 24. – №. 1 (87). – С. 89-103.
- [54] Вишневский В. М. и др. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.
- [55] Скляр Б. Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение. – М.: Вильямс, 2008. – 1104 с.
- [56] Шахнович И. В. Современные технологии беспроводной связи. – М.: Техносфера, 2006. – 287 с.
- [57] Niu Y. et al. Interference management for integrated sensing and communication systems: A survey //IEEE Internet of Things Journal. – 2024. – Vol. 15. – No. 7. – P. 8110-8134.
- [58] Ning Z. et al. Sub-band full-duplex interference cancellation scheme with high adjacent channel suppression //ICC 2024 IEEE International Conference on Communications. – IEEE, 2024. – P. 1231-1236.
- [59] Anand D., Togou M. A., Muntean G. M. A Machine Learning-based Approach for Interference Mitigation To Enhance QoS and QoE in 5G O-RAN Networks //2024 IEEE 35th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. – IEEE, 2024. – P. 1-6.
- [60] Yang H. et al. Interference Mitigation in B5G Network Architecture for MIMO and CDMA: State of the Art, Issues, and Future Research Directions //Information. – 2024. – Vol. 15. – No. 12. – P. 771.

- [61] Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. – М.: Физматлит, 2002. – 252 с.
- [62] Владимиров С. Н., Измайлов И. В., Пойзнер Б. Н. Нелинейно-динамическая криптология. Радиофизические и оптические системы. – М.: Физматлит, 2009. – 208 с.
- [63] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2000. – Т. 8. – №. 2. – С. 99-99.
- [64] Хаслер М. Достижения в области передачи информации с использованием хаоса // Успехи современной радиоэлектроники. – 1998. – №. 11. – С. 33-43.
- [65] Дмитриев А. С., Кузьмин Л. В., Лактюшкин А. М. Амплитудная модуляция и демодуляция хаотических сигналов // Радиотехника. – 2005. – №. 4. – С. 71-77.
- [66] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003. – 493 с.
- [67] Волковский А. Р., Рульков Н. В. Синхронный хаотический отклик нелинейной колебательной системы как принцип детектирования информационной компоненты хаоса // Письма в ЖТФ. – 1993. – Т. 19. – № 3. – С. 71-75.
- [68] Behnia S., Akhshani A., Mahmodi H., Akhavan A. A novel algorithm for image encryption based on mixture of chaotic maps // Chaos, Solitons & Fractals. – 2008. – Vol. 35. – No. 2. – P. 408-419.

- [69] Жалнин А. Ю. Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала // Известия вузов. ПНД. – 2014. – Т. 22. – № 5. – С. 3-12.
- [70] Chua L. O. et al. Experimental chaos synchronization in Chua's circuit // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1992. – Т. 2. – №. 03. – С. 705-708.
- [71] Cuomo K. M., Oppenheim A. V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Physical review letters. – 1993. – Т. 71. – №. 1. – С. 65.
- [72] Halle K. S. et al. Spread spectrum communication through modulation of chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1993. – Т. 3. – №. 02. – С. 469-477.
- [73] Hasler M., Dedieu H., Kennedy M., Schweizer J. Secure communication via Chua's circuit // Proc. of Int. Symp. on Nonlinear Theory and Applications (NOLTA'93). – Hawaii, USA, 1993. – P. 87.
- [74] Dmitriev A. S. et al. Experiments on RF band communications using chaos // International Journal of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences & Engineering. – 1997. – Т. 7. – №. 11.
- [75] Prokhorov M. D. et al. Resistant to noise chaotic communication scheme exploiting the regime of generalized synchronization // Nonlinear Dynamics. – 2017. – Vol. 87. – No. 3. – P. 2039-2050.
- [76] Емец С. В., Старков С. О. Применение цифровых сигнальных процессоров для генерации хаотических сигналов и передачи информации с использованием хаоса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1999. – Т. 7. – №. 2-3. – С. 95.

- [77] Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise //Physics Letters A. – 2010. – Т. 374. – №. 29. – С. 2925-2931.
- [78] Rybin V. et al. Estimating optimal synchronization parameters for coherent chaotic communication systems in noisy conditions //Chaos Theory and Applications. – 2023. – Т. 5. – №. 3. – С. 141-152.
- [79] Liu L. et al. A robust chaos synchronization method under parameter mismatch //Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications. – 2013. – Т. 7. – №. January-February 2013. – С. 154-156.
- [80] Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. – 488 с.
- [81] Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла-Вильямса //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2006. – Т. 129. – №. 2. – С. 400-412.
- [82] Кузнецов С. П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2006. – 356 с.
- [83] Pikovsky A. S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1994. – Т. 27. – №. 15. – С. 5209.
- [84] Pikovsky A. S. et al. Singular continuous spectra in dissipative dynamics //Physical Review E. – 1995. – Т. 52. – №. 1. – С. 285.
- [85] Benettin G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory //Meccanica. – 1980. – Т. 15. – С. 9-20.

- [86] Short K. M., Parker A. T. Unmasking a hyperchaotic communication scheme //Physical Review E. – 1998. – Vol. 58. – No. 1. – P. 1159.
- [87] Pérez G., Cerdeira H. A. Extracting messages masked by chaos //Physical Review Letters. – 1995. – Vol. 74. – No. 11. – P. 1970.
- [88] Капранов М. В. и др. Свойства систем передачи информации с манипуляцией параметрами и начальными условиями генераторов хаотических колебаний //Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. – 2000. – №. 11. – С. 48-59.
- [89] Анищенко В. С., Павлов А. Н., Янсон Н. Б. Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации //Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. – №. 12. – С. 1-8.
- [90] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators //Physical Review Letters. - 1997. - Т. 78. - №. 22. - С. 4193.
- [91] Rulkov N. F. et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems //Physical Review E. - 1995. - Т. 51. - №. 2. - С. 980.
- [92] Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach //Physical review E. - 1996. - Т. 53. - №. 5. - С. 4528.
- [93] Pecora L. M., Carroll T. L., Heagy J. F. Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings //Physical Review E. - 1995. - Т. 52. - №. 4. - С. 3420.
- [94] Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. -1986. - Т.29. - вып.96. - С. 795.

- [95] Bunimovich L. A., Sinai Y. G. Spacetime chaos in coupled map lattices //Nonlinearity. - 1988. - Т. 1. - №. 4. - С. 491.
- [96] Bunimovich L. A., Sinai Y. G. Statistical mechanics of coupled map lattices //Theory and applications of coupled map lattices. - 1993. - Т. 12. - С. 169.
- [97] Pikovsky A. C. Synchronization of oscillators with hyperbolic chaotic phases //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2021. - Т. 29. - №. 1. - С. 78-87.
- [98] Semenova N. I., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Coherence-incoherence"transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors //Regular and Chaotic Dynamics. - 2017. - Т. 22. - №. 2. - С. 148-162.
- [99] Купцов П. В., Кузнецов С. П. О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. - 2006. - Т. 2. - №. 3. - С. 307-331.
- [100] Alvarez J. Synchronization in the Lorenz system: stability and robustness //Nonlinear Dynamics. - 1996. - Т. 10. - С. 89-103.
- [101] Cuomo K. M., Oppenheim A. V., Strogatz S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications //IEEE Transactions on circuits and systems II: Analog and digital signal processing. - 1993. - Т. 40. - №. 10. - С. 626-633.
- [102] Jamal R. K., Kafi D. A. Secure communications by chaotic carrier signal using Lorenz model //Iraqi Journal of Physics. - 2016. - Т. 14. - №. 30. - С. 51-63.

- [103] Saha D. C. et al. Lorenz system, synchronization, and encryption of signals and images // Chaos & Complexity Letters. - 2018. - Т. 12. - №. 1.
- [104] Carroll T. L. Synchronizing chaotic systems using filtered signals //Physical Review E. - 1994. - Т. 50. - №. 4. - С. 2580.
- [105] Oppenheim A. V. et al. Channel equalization for communication with chaotic signals //AIP Conference Proceedings. - 1996. - Т. 375. - №. CONF-950730.
- [106] Rulkov N. F., Tsimring L. S. Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels //International Journal of Circuit Theory and Applications. - 1999. - Т. 27. - №. 6. - С. 555-567.
- [107] Дмитриев А. С., Кузьмин Л. В. Передача информации с использованием синхронного хаотического отклика при наличии фильтрации в канале связи //Письма в Журнал технической физики. - 1999. - Т. 25. - №. 16. - С. 71-77.
- [108] Carroll T. L. Communicating with use of filtered, synchronized, chaotic signals //IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. - 2002. - Т. 42. - №. 2. - С. 105-110.
- [109] Macau E. E. N., Marinho C. M. P. Communication with chaos over band-limited channels //Acta Astronautica. - 2003. - Т. 53. - №. 4-10. - С. 465-475.
- [110] Eisencraft M., Gerken M. Comunicacao utilizando sinais caoticos: influencia de ruido e limitacao em banda //Anais do XVIII Simposio brasileiro de Telecomunicacoes. - 2001. - С. 1-6.

- [111] Eisencraft M., Fanganiello R. D., Baccala L. A. Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels //Mathematical Problems in Engineering. - 2009. - Т. 2009. - №. 1. - С. 207971.
- [112] Eisencraft M. et al. Chaos-based communication systems in non-ideal channels //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2012. - Т. 17. - №. 12. - С. 4707-4718.
- [113] Zou W., Zhan M., Kurths J. Revoking amplitude and oscillation deaths by low-pass filter in coupled oscillators //Physical Review E. - 2017. - Т. 95. - №. 6. - С. 062206.
- [114] Zou W., Zhan M., Kurths J. Phase transition to synchronization in generalized Kuramoto model with low-pass filter //Physical Review E. - 2019. - Т. 100. - №. 1. - С. 012209.
- [115] Minati L. et al. Incomplete synchronization of chaos under frequency-limited coupling: Observations in single-transistor microwave oscillators //Chaos, Solitons & Fractals. - 2022. - Т. 165. - С. 112854.
- [116] Borges V. S., Silva M. T. M., Eisencraft M. Chaotic properties of an FIR filtered Henon map //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2024. - Т. 131. - С. 107845.
- [117] Pecora L. M., Carroll T. L. Driving systems with chaotic signals //Physical review A. – 1991. – Т. 44. – №. 4. – С. 2374.
- [118] Pecora L. M. et al. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 1997. – Т. 7. – №. 4. – С. 520-543.
- [119] Москаленко О. И., Евстифеев Е. В., Короновский А. А. Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации

на основе расчета локальных показателей Ляпунова //Письма в Журнал технической физики. – 2020. – Т. 46. – №. 16. – С. 12-15.

- [120] Livorati A. L. P., Loskutov A., Leonel E. D. A peculiar Maxwell's Demon observed in a time-dependent stadium-like billiard //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2012. – Т. 391. – №. 20. – С. 4756-4762.
- [121] Fermi E. On the origin of the cosmic radiation //Physical review. – 1949. – Т. 75. – №. 8. – С. 1169.
- [122] Gelfreich V., Turaev D. Unbounded energy growth in Hamiltonian systems with a slowly varying parameter //Communications in Mathematical Physics. - 2008. - Т. 283. - С. 769.
- [123] Gelfreich V. et al. Oscillating mushrooms: adiabatic theory for a non-ergodic system //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2014. - Т. 47. - С. 395101.
- [124] Dettmann C. P. et al. Splitting of separatrices, scattering maps, and energy growth for a billiard inside a time-dependent symmetric domain close to an ellipse //Nonlinearity. - 2018. - Т. 31. - С. 667-700.
- [125] de Oliveira C. R., Gonçalves P. S. Bifurcations and chaos for the quasiperiodic bouncing ball //Physical Review E. - 1997. - Т. 56. - С. 4868.
- [126] Karlis A. K. et al. Hyperacceleration in a stochastic Fermi-Ulam model //Physical Review Letters. - 2006. - Т. 97. - С. 194102.
- [127] Oliveira D. F. M., Pöschel T. Competition between unlimited and limited energy growth in a two-dimensional time-dependent billiard //Physics Letters A. - 2013. - Т. 377. - С. 2052-2057.

- [128] Castaldi B. et al. Tunable Fermi acceleration in a nondissipative driven magnetic billiard //Physical Review E. - 2014. - T. 89. - C. 012916.
- [129] Hansen M. et al. Dynamical thermalization in time-dependent billiards //Chaos. - 2019. - T. 29. - C. 103122.
- [130] Batistic B., Robnik M. Fermi acceleration in time-dependent billiards: theory of the velocity diffusion in conformally breathing fully chaotic billiards //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2011. - T. 44. - C. 365101.
- [131] Batistic B. Fermi acceleration in chaotic shape-preserving billiards //Physical Review E. - 2014. - T. 89. - C. 022912.
- [132] Batistic B. Exponential Fermi acceleration in general time-dependent billiards //Physical Review E. - 2014. - T. 90. - C. 032909.
- [133] Livorati A. L. P. et al. Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for Fermi acceleration //Physical Review E. - 2012. - T. 86. - C. 036203.
- [134] Zaslavsky G. M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. - Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [135] Manos T., Robnik M. Survey on the role of accelerator modes for anomalous diffusion: The case of the standard map //Physical Review E. - 2014. - T. 89. - C. 022905.
- [136] Moges H. T. et al. Anomalous diffusion in single and coupled standard maps with extensive chaotic phase spaces //Physica D. - 2022. - T. 431. - C. 133120.
- [137] Bao X., Chen L. Recent progress in distributed fiber optic sensors //sensors. - 2012. - T. 12. - №. 7. - C. 8601-8639.

- [138] Hartog A. H. An introduction to distributed optical fibre sensors. – CRC press, 2017.
- [139] Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов //Успехи математических наук. - 1970. - Т. 25. - №. 2 (152). - С. 141-192.
- [140] Bunimovich L. A. Mushrooms and other billiards with divided phase space //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. - 2001. - Т. 11. - №. 4. - С. 802-808.
- [141] Bunimovich L. A. On ergodic properties of certain billiards //Functional Analysis and Its Applications. - 1974. - Т. 8. - №. 3. - С. 254-255.
- [142] Chernov N., Markarian R. Chaotic billiards. - American Mathematical Soc., 2006.
- [143] Livorati A. L. P. et al. Separation of particles leading either to decay or unlimited growth of energy in a driven stadium-like billiard //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2014. - Т. 47. - С. 365101.
- [144] Palmero M. S. et al. Ensemble separation and stickiness influence in a driven stadium-like billiard: A Lyapunov exponents analysis //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2018. - Т. 65. - С. 248-259.
- [145] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - М.: Мир, 1984. - 528 с.
- [146] Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики //Успехи физических наук. - 2007. - Т. 177. - №. 9. - С. 989-1015.

- [147] Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // Доклады Академии наук СССР. - 1964. - Т. 156. - №. 1. - С. 9-12.
- [148] Ulam S. M. On some statistical properties of dynamical systems // Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. - 1961. - Т. 3. - С. 315.
- [149] Заславский Г. М., Чириков Б. В. О механизме ускорения Ферми в одномерном случае // Доклады Академии наук СССР. - 1964. - Т. 159. - №. 2. - С. 306-309.
- [150] Felk E. V. et al. Transient chaos in multidimensional Hamiltonian system with weak dissipation // The European Physical Journal Special Topics. - 2017. - Т. 226. - С. 1777-1784.
- [151] Ramamoorthy R. et al. New circumscribed self-excited spherical strange attractor // Complexity. - 2021. - С. 8068737.
- [152] Orban M., Epstein I. R. Systematic design of chemical oscillators. Part 13. Complex periodic and aperiodic oscillation in the chlorite-thiosulfate reaction // The Journal of Physical Chemistry. - 1982. - Т. 86. - №. 20. - С. 3907-3910.
- [153] Nagypal I., Epstein I. R. Fluctuations and stirring rate effects in the chlorite-thiosulfate reaction // The Journal of Physical Chemistry. - 1986. - Т. 90. - №. 23. - С. 6285-6292.
- [154] Chawanya T. Infinitely many attractors in game dynamics system // Progress of theoretical physics. - 1996. - Т. 95. - №. 3. - С. 679-684.
- [155] Sun H., Scott S. K., Showalter K. Uncertain destination dynamics // Physical Review E. - 1999. - Т. 60. - №. 4. - С. 3876.

- [156] Wang J. et al. Uncertain dynamics in nonlinear chemical reactions //Physical Chemistry Chemical Physics. - 2003. - T. 5. - №. 24. - C. 5444-5447.
- [157] Pisarchik A. N., Hramov A. E. Multistability in physical and living systems //Cham: Springer. – 2022.
- [158] Hens C. R. et al. How to obtain extreme multistability in coupled dynamical systems //Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. - 2012. - T. 85. - №. 3. - C. 035202.
- [159] Pham V. T., Vaidyanathan S., Kapitaniak T. Complexity, dynamics, control, and applications of nonlinear systems with multistability //Complexity. – 2020. – T. 2020.
- [160] Zhang K. et al. A novel megastable oscillator with a strange structure of coexisting attractors: Design, analysis, and FPGA implementation //Complexity. – 2021. – T. 2021. – №. 1. – C. 2594965.
- [161] Ahmadi A. et al. A non-autonomous mega-extreme multistable chaotic system //Chaos, Solitons & Fractals. – 2023. – T. 174. – C. 113765.
- [162] Kelso J. A. S. Dynamic patterns: The self-organization of brain and behavior. – MIT press, 1995.
- [163] Gigante G. et al. Bistable perception modeled as competing stochastic integrations at two levels //PLoS computational biology. – 2009. – T. 5. – №. 7. – C. e1000430.
- [164] Lai Y. C., Grebogi C. Complexity in Hamiltonian-driven dissipative chaotic dynamical systems //Physical Review E. – 1996. – T. 54. – №. 5. – C. 4667.

- [165] Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems. – World Scientific, 2006. – Т. 56.
- [166] Srinivasan K. et al. Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a nonlinear series LCR circuit with nonsinusoidal force //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2009. – Т. 19. – №. 12. – С. 4131-4163.
- [167] Prasad A., Nandi A., Ramaswamy R. Aperiodic nonchaotic attractors, strange and otherwise //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2007. – Т. 17. – №. 10. – С. 3397-3407.
- [168] Heagy J. F., Hammel S. M. The birth of strange nonchaotic attractors //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1994. – Т. 70. – №. 1-2. – С. 140-153.

Публикации по теме диссертации

- [A1] Исаева О. Б., Любченко Д. О. Сравнительный анализ схем скрытой коммуникации, основанных на генераторах со странным аттрактором гиперболического типа и со странным нехаотическим аттрактором //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2024. – Т. 32. – №. 1. – С. 31-41.
- [A2] Любченко Д. О., Исаева О. Б. Влияние шума и частотных искажений в канале связи на коммуникационную схему на основе генератора гиперболического хаоса //Радиотехника и электроника, 2023, Т. 68, № 10, стр. 1008-1010. Перевод: Lyubchenko D. O., Isaeva O. B. Influence of Noise and Frequency Distortions in a Communication Channel on a Communication Scheme Based on a Hyperbolic Chaos

Generator //Journal of Communications Technology and Electronics. – 2023. – Т. 68. – №. 10. – С. 1223-1225.

- [A3] Lubchenko D. O., Savin A. V. Critical velocity for the onset of fast fermi acceleration //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2022. – Т. 32. – №. 12. – С. 2250177.
- [A4] Любченко Д. О., Исаева О. Б. Режимы обобщенной синхронизации грубых генераторов широкополосного сигнала при наличии частотных помех в канале связи // Журнал радиоэлектроники, 1684-1719, №9, 2024.
- [A5] Любченко Д. О., Исаева О. Б. Особенности широкополосной коммуникации на базе генераторов с грубой динамикой // Ученые записки физического факультета Московского университета. – 2024. – № 2. – С. 2420301.
- [A6] Lubchenko D., Savin A. Coexistence of Dissipative and Conservative Regimes in Unidirectionally Coupled Maps //International Conference on Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. – Cham : Springer Nature Switzerland, 2022. – С. 160-166.
- [A7] Lubchenko D. O., Isaeva O. B. On synchronization and communication of the robust systems //2023 7th Scientific School Dynamics of Complex Networks and their Applications (DCNA). – IEEE, 2023. – С. 178-181.
- [A8] Любченко Д.О., Исаева О.Б, Савин А.В. Синхронизация и коммуникация гамильтоново-управляемых отображений с экстремальной мультистабильностью // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2025: мат-лы XXXI Всерос. науч. конф. Т. 18. Саратов, 26–30 мая 2025 г. – Саратов: Саратовский ун-т, 2025. – С. 23-24.

- [A9] Любченко Д.О., Савин А.В. Экстремальная мультистабильность в диссипативном отображении под управлением гамильтоновой системы // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тез. докл. XIX Всерос. конф. молодых ученых. Саратов, 8–9 окт. 2024 г. – Саратов: Техно-Декор, 2024. – С. 123-124.
- [A10] Lubchenko D.O., Savin A.V., Isaeva O.B. Infinite set of chaotic attractors in unidirectionally coupled maps // Book of Abstracts: Shilnikov Workshop 2024. Nizhny Novgorod, 16–18 Dec. 2024. – Nizhny Novgorod: Lobachevsky Univ., 2024. – P. 37.
- [A11] Lubchenko D.O., Savin A.V., Isaeva O.B. Coexistence of Strange Attractors in Unidirectionally Coupled Maps // Book of Abstracts: Shilnikov Workshop 2023. Nizhny Novgorod, 15–16 Dec. 2023. – Nizhny Novgorod: Lobachevsky Univ., 2023. – P. 22.
- [A12] Любченко Д.О. Особенности широкополосной коммуникации на базе генераторов с грубой динамикой // Ломоносов–2023: тез. докл. XXX Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Москва, 2023. – М.: Физический факультет МГУ, 2023. – С. 564.
- [A13] Любченко Д.О., Исаева О.Б. Передача цифрового и аналогового сигнала с помощью генераторов с грубой динамикой // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023: мат-лы XXX Всерос. науч. конф. Т. 17. Саратов, 15–19 мая 2023 г. – Саратов: Саратовский ун-т, 2023. – С. 144-145.
- [A14] Любченко Д.О. Метод скрытой коммуникации на основе генератора гиперболического хаоса // Новые информационные технологии в телекоммуникациях и почтовой связи. – 2023. – Т. 1, № 1. – С. 58-59.

- [A15] Любченко Д.О., Исаева О.Б. Сложная динамика генераторов со странными хаотическими и нехаотическими аттракторами и коммуникационные схемы на их основе // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тез. докл. XVII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов, 13–15 сент. 2022 г. – Саратов: Техно-Декор, 2022. – С. 123-124.
- [A16] Любченко Д.О., Исаева О.Б. Исследование динамики генераторов Кузнецова с грубыми странными аттракторами и их применение для средств коммуникации // Нелинейные волны – 2022: тез. докл. Нижний Новгород, 7–13 нояб. 2022 г. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2022. – С. 158-159.
- [A17] Lubchenko D. Simple model with critical velocity for the onset of Fermi acceleration // Saratov Fall Meeting 2022. Saratov, 26–30 Sept. 2022. – URL: https://sfmconference.org/sfm/sfm22/conferences_workshops/nonlinear-dynamics-xiii/preliminary/1592/.
- [A18] Любченко Д.О., Исаева О.Б. Коммуникационные схемы на основе синхронизации систем со странными хаотическими и нехаотическими аттракторами // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: тр. XXII Междунар. конф. Сер. "Суперкомпьютерные дни в России". Нижний Новгород, 14–17 нояб. 2022 г. – Нижний Новгород: ННГУ, 2022. – С. 69-71.
- [A19] Любченко Д.О., Савин А.В. Критическая скорость для начала быстрого ускорения Ферми // Нелинейные волны – 2022: тез. докл. Нижний Новгород, 7–13 нояб. 2022 г. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2022. – С. 156-157.

- [A20] Любченко Д.О., Савин А.В. Особенности динамики средней скорости в упрощенной системе Теннисона-Либермана-Лихтенберга с осциллирующей границей // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тез. докл. XVII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов, 13–15 сент. 2022 г. – Саратов: Техно-Декор, 2022. – С. 121-122.
- [A21] Любченко Д.О., Савин А.В. Численное определение характеристик эффекта «бильярдного» демона Максвелла в системе "гофрированный волновод" с осциллирующей границей // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: докл. XVI Всерос. конф. молодых ученых. Саратов, 7–9 сент. 2021 г. – Саратов: Техно-Декор, 2021. – С. 114-115.
- [A22] Lubchenko D.O., Savin A.V. The Maxwell's billiard demon effect in simplified Tennison-Lichtenberg-Lieberman system with oscillating boundaries // Book of Abstracts: Shilnikov Workshop 2021. Nizhny Novgorod, 16–17 Dec. 2021. – Nizhny Novgorod: Lobachevsky Univ., 2021. – P. 22.
- [A23] Любченко Д.О., Савин А.В. Численное определение характеристик эффекта «бильярдного» демона Максвелла в системе «гофрированный волновод» с осциллирующей границей // Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2021: мат-лы XXIX Всерос. науч. конф. Т. 29. Саратов, 26–29 апр. 2021 г. – Саратов: Саратовский ун-т, 2021. – С. 40-41.
- [A24] Любченко Д.О., Савин А.В. Исследование динамики средней по ансамблю скорости в системе "гофрированный волновод" с осциллирующей границей // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: сб. тр. XV Всерос. конф. молодых ученых. Саратов, 8–10 сент. 2020 г. – Саратов: Техно-Декор, 2020. – С. 151-152.

- [A25] Lyubchenko D.O., Savin A.V. Demonstration of the "billiard Maxwell's Demon" effect in the "corrugated waveguide" system with an oscillating boundary // Book of Abstracts: Topological Methods in Dynamics and Related Topics. Nizhny Novgorod, 12–13 Dec. 2020. – Nizhny Novgorod: HSE, 2020. – P. 46.
- [A26] Savin A., Lyubchenko D. Research of the dynamics of the ensemble average velocity in the “corrugated waveguide” system with an oscillating boundary // Saratov Fall Meeting 2020. Saratov, 29 Sept. – 2 Oct. 2020. – URL: <https://sfmconference.org/sfm/20/workshops/nonlinear-dynamics-xi/preliminary/433/>.
- [A27] Любченко Д.О., Савин А.В. Динамика системы "гофрированный волновод" с осциллирующей границей // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: сб. тр. XIV Всерос. конф. молодых ученых. Саратов, 17–19 сент. 2019 г. – Саратов: Техно-Декор, 2019. – С. 150–151.
- [A28] Любченко Д.О., Савин А.В. Динамика системы "гофрированный волновод" с осциллирующей границей // Материалы XII Междунар. школы-конф. "Хаотические автоколебания и образование структур" (ХАОС-2019). Саратов, 1–6 окт. 2019 г. – М.: Наука, 2019. – С. 102.

Благодарности

Хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, доценту, кандидату физико-математических наук Исаевой О.Б., за активную поддержку и неоценимую помощь при работе над данной диссертацией. Выражаю огромную признательность доценту, кандидату физико-математических наук Савину А.В. за сотрудничество, полезные советы и возможность постоянного обсуждения настоящей работы. Благодарю профессора, доктора физико-математических наук Купцова П.В. за поддержку и полезные консультации при выполнении исследований. Считаю уместным выразить искреннюю признательность человеку, благодаря которому я начал свой путь в науку, – ныне покойному профессору, член-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук Трубецкову Д.И.[†].