

ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

На правах рукописи



ЕВСТИФЕЕВ Евгений Валентинович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЕРЕМЕЖАЮЩЕГОСЯ  
ПОВЕДЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В  
ОДНОНАПРАВЛЕННО И ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ  
ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАЗЛИЧНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ  
АТТРАКТОРА

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени кандидата  
физико–математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор  
Москаленко О. И.

Саратов 2025

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Подходы к исследованию обобщенной и перемежающейся обобщенной синхронизации</b>	<b>17</b>
1.1 Диагностика обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах . . . . .	17
1.1.1 Метод вспомогательной системы . . . . .	19
1.1.2 Метод ближайших соседей и метод фазовых трубок	20
1.1.3 Метод расчета спектра показателей Ляпунова . . .	22
1.2 Перемежаемость на границе обобщенной синхронизации .	26
1.3 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в модельных системах с однонаправленной связью . . . . .	29
1.3.1 Однонаправленно связанные системы Ресслера . .	29
1.3.2 Однонаправленно связанные системы Лоренца . . .	35
1.4 Применение метода вейвлетного преобразования для анализа характеристик перемежаемости . . . . .	42
1.5 Выводы по главе 1 . . . . .	48
<b>2 Универсальный метод исследования перемежающейся обобщенной синхронизации с помощью локальных показателей Ляпунова</b>	<b>50</b>
2.1 Метод выделения синхронных участков, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова . . . . .	51
2.2 Выделение участков синхронной динамики с помощью локальных показателей Ляпунова в случае однонаправленной связи . . . . .	53
2.2.1 Выделение участков синхронной динамики с помощью локальных показателей Ляпунова для однонаправленно связанных систем Ресслера . . . . .	54
2.2.2 Выделение синхронных участков поведения с помощью локальных показателей Ляпунова для однонаправленно связанных систем Лоренца . . . . .	59
2.3 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в случае взаимной связи . . . . .	64
2.3.1 Выделение ламинарных фаз с помощью локальных показателей Ляпунова для взаимно связанных систем Ресслера . . . . .	65

2.3.2	Выделение ламинарных фаз с помощью локальных показателей Ляпунова для взаимно связанных систем Лоренца . . . . .	70
2.4	Влияние шума на определение характеристик перемежаемости при помощи локальных показателей Ляпунова . . . . .	74
2.5	Выводы по главе 2 . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Мультистабильность вблизи границы обобщенной синхронизации</b>	<b>84</b>
3.1	Понятия мультистабильности и меры мультистабильности	85
3.2	Мультистабильность в случае однонаправленной связи: метод вспомогательной системы . . . . .	89
3.2.1	Однонаправленно связанные системы Ресслера . . . . .	89
3.2.2	Однонаправленно связанные логистические отображения . . . . .	98
3.2.3	Однонаправленно связанные системы Лоренца . . . . .	100
3.3	Определение статистических характеристик перемежаемости с учетом мультистабильности . . . . .	104
3.4	Мультистабильность в случае взаимной связи: метод расчета локальных показателей Ляпунова . . . . .	108
3.4.1	Системы с относительно простой топологией аттрактора . . . . .	109
3.4.2	Зависимость оценки меры мультистабильности от выбора метода диагностики обобщенной синхронизации . . . . .	114
3.4.3	Системы со сложной топологией аттрактора . . . . .	116
3.5	Выводы по главе 3 . . . . .	120
	<b>Заключение</b>	<b>123</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>126</b>

# Введение

## Актуальность диссертационного исследования

Обобщенная хаотическая синхронизация является одним из наиболее интересных явлений радиофизики [1–5]. Данное явление характеризуется существованием связи между состояниями взаимодействующих систем в виде функционального соотношения (в общем виде – функционала) [6–8]. Примечательно, что такой тип синхронизации наблюдается в системах самой различной природы и может возникать при однонаправленной и взаимной связи между ними [8–29].

Изучение обобщенной синхронизации и явлений, приосходящих вблизи ее границы, до сих пор не утратило актуальности, поскольку данное явление обладает широким потенциалом для применения в различных сферах человеческой деятельности, от исследования взаимодействия систем различной природы [16, 19, 22, 24, 26, 27, 29–34] до скрытой передачи информации, моделирования и изучения динамики отдельных нейронов и нейронных сетей и машинного обучения, а также разработки медицинского оборудования [35–43].

Вблизи границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение – режим перемежающейся обобщенной синхронизации, причем тип перемежаемости, реализуемой в данном случае, в значительной степени определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем [44, 45]. Так, в системах с относительно простой топологией аттрактора (например, системах Ресслера с аттракторами ленточного

типа [46,47]) на границе обобщенной синхронизации наблюдается перемежаемость типа on-off [48], в то время как в системах со сложной топологией аттрактора (системах с двулистной структурой, как, например, у систем Лоренца или генераторов Чуа) реализуется перемежаемость перескоков (jump intermittency) [45,49].

Для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации могут использоваться как традиционные методы и подходы, основанные на методе вспомогательной системы [50], так и новые методы и алгоритмы, учитывающие строение аттракторов этих систем [51]. Однако, все еще актуальным остается вопрос о разработке более универсальных подходов к диагностике и анализу данного режима, справедливых как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между взаимодействующими системами и независящих от вида аттракторов рассматриваемых систем. Поэтому настоящая диссертация посвящена, в первую очередь, разработке и применению к однонаправленно и взаимно связанным системам методов, основанных на непрерывном вейвлетном преобразовании и численном расчете локальных показателей Ляпунова, работоспособность которых в ряде случаев не зависит ни от топологии аттракторов взаимодействующих систем, ни от типа связи между ними.

Другим вопросом, тесно связанным с предыдущим, является анализ мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. При этом, под мультистабильностью в данном контексте подразумевается существование в фиксированные моменты времени фаз различного поведения (синхронного и асинхронного с точки зрения критерия обобщенной хаотической синхронизации) в зависимости от выбора начальных условий одной из взаимодействующих систем [52]. Как будет показано в рамках настоящей диссертационной работы, такой режим имеет место в системах с дискретным и непрерывным временем как с относительно простой, так и

со сложной топологией аттрактора и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи между ними.

Исследованию перемежающейся обобщенной синхронизации в таких системах, в том числе с точки зрения мультистабильности, и посвящена настоящая диссертационная работа.

## **Цель диссертационной работы**

Таким образом, целью настоящего диссертационного исследования является изучение особенностей перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, связанных однонаправленно или взаимно, выявление наличия мультистабильности в рассматриваемых случаях, разработка новых универсальных методов анализа этого режима, в том числе с учетом мультистабильности, и их применение к исследуемым системам.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи диссертационного исследования:

- Разработка универсальных методов анализа перемежающейся обобщенной синхронизации, справедливых для систем с различной топологией аттрактора, связанных однонаправленно и взаимно, и их апробация на системах с однонаправленной связью. Сравнение результатов разработанных методов с результатами классических методов и алгоритмов.
- Выявление существования режима перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи и исследование ее характеристик.
- Оценка влияния шума на статистические характеристики перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора.

- Изучение возможности существования мультистабильности на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, введение в рассмотрение меры мультистабильности.

## **Научная новизна**

Данная диссертационная работа содержит новые результаты в области изучения перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. В диссертационной работе впервые были получены следующие результаты:

- Разработан универсальный метод на основе оценки локальных показателей Ляпунова для выделения характерных фаз поведения систем и оценки статистических характеристик перемежаемости. Показано, что разработанный подход позволяет диагностировать режим перемежающейся обобщенной синхронизации вне зависимости от типа связи между системами и от топологии их аттракторов, в том числе в присутствии внешних шумов [53–55].
- Установлено, что тип перемежаемости, наблюдающийся вблизи границы обобщенной синхронизации, не зависит от типа связи между системами, а определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем. Так, в системах с простой топологией аттрактора, связанных однонаправленно и взаимно, имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной топологией – перемежаемость перескоков [54, 56].
- Проведено исследование влияния аддитивного шума на оценку статистических характеристик перемежаемости при взаимодействии систем с различной топологией аттрактора. Показано, что применение непрерывного вейвлетного преобразования к исследуемым временным рядам, полученным при помощи метода вспомогательной

системы, позволяет существенно повысить устойчивость выделения ламинарных фаз поведения систем к аддитивному шуму [55, 57].

- Обнаружено наличие мультистабильности на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. Разработаны подходы, позволяющие оценить меру мультистабильности, а также более точно выделить характерные ламинарные фазы в системах вне зависимости от начальных условий [52, 58–61].

Полученные результаты диссертационной работы находятся в хорошем соответствии с уже известными результатами в области обобщенной синхронизации. Они были опубликованы в ряде научных статей в престижных отечественных и зарубежных научных журналах, в том числе, с высоким импакт-фактором.

## **Личный вклад**

Все защищаемые результаты и положения, вошедшие в настоящую диссертационную работу, получены соискателем лично. Автором разработаны программы, с применением которых осуществлялось численное моделирование исследуемых нелинейных динамических систем, производилась диагностика режима перемежающейся обобщенной синхронизации, оценка статистических характеристик перемежаемости и обработка результатов. Совместно с научным руководителем осуществлялись планирование и постановка задач, интерпретация и обсуждение полученных результатов, а также написание тезисов и научных статей, подготовка докладов для представления на научных конференциях.

## **Научная и практическая значимость**

В данной диссертационной работе была решена важная для современной радиофизики научная задача в области изучения перемежающейся

обобщенной синхронизации в хаотических системах с различной топологией аттрактора.

Полученные в ходе работы результаты оказали, оказывают и будут оказывать влияние на дальнейшее развитие направления изучения перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации. Несмотря на то, что они носят, в первую очередь, фундаментальный характер, имеется также возможность их практического использования. Например, их можно использовать при разработке систем для скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в системах с односторонней и взаимной связью [35–38]. Особенно интересен потенциал к применению в случае взаимной связи, что стало возможным благодаря разработанным универсальным подходам, основанным на оценке локальных ляпуновских показателей, не зависящим от типа связи между системами и топологии их аттракторов [53, 54]. Данные методы также позволяют установить существование мультистабильности в системах с различной топологией аттрактора, что несомненно открывает новые возможности для изучения и диагностики режима перемежающейся обобщенной синхронизации [52, 58–61]. Также разработанный метод на основе непрерывного вейвлетного преобразования может быть успешно применен для повышения устойчивости выделения характерных фаз поведения по временному ряду исследуемого сигнала к аддитивному шуму [57]. На компьютерные программы, реализующие данные методы, получено три свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [62–64].

## **Основные научные положения, выносимые на защиту**

- Применение непрерывного вейвлетного преобразования для определения статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации (распределений длительностей ламинарных фаз, за-

висимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности) в системах с различной топологией аттракторов с однонаправленной связью позволяет повысить как точность выделения характерных фаз поведения систем, так и устойчивость к аддитивному шуму по сравнению с использованием только метода вспомогательной системы.

- Выделение характерных фаз поведения систем с различной топологией аттракторов, находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, и определение ее типа возможны при помощи метода, основанного на расчете локальных показателей Ляпунова, причем для систем с однонаправленной связью результаты данного метода находятся в хорошем количественном соответствии с результатом метода вспомогательной системы.
- Тип перемежаемости, наблюдающейся вблизи границы обобщенной синхронизации, не зависит от типа связи между системами, а определяется топологиями аттракторов взаимодействующих систем. В однонаправленно и взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттракторов (с аттракторами ленточного типа) имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной (двулистной) топологией с теми же типами связи – перемежаемость перескоков.
- Для режима перемежающейся обобщенной синхронизации характерна мультистабильность, проявляющаяся в реализации в один и тот же момент времени фаз различного (синхронного или асинхронного) поведения в зависимости от выбора начальных условий одной из взаимодействующих систем. Данный тип поведения характерен и для однонаправленной, и для взаимной связи между системами, а по поведению меры мультистабильности в зависимости от вре-

мени возможно определить тип перемежаемости, наблюдающийся в данном случае.

## **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 142 страницы текста, включая 45 иллюстраций и 7 таблиц. Список литературы содержит 119 источников.

Во **введении** определена актуальность диссертационной работы, ее цели и задачи, научная новизна, практическая и научная значимость, приведены сведения о достоверности полученных результатов и апробации разработанных подходов, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, даны сведения о структуре и объеме работы, и приведено краткое содержание основных разделов диссертации.

В **первой главе** диссертационной работы приведены основные сведения об обобщенной синхронизации, рассмотрены классические методы ее диагностики в системах с простой и сложной топологией аттрактора, связанных однонаправленно или взаимно. Особое внимание уделено методу вспомогательной системы и возможности его применения для исследования характеристик перемежаемости, имеющей место вблизи границы возникновения синхронного режима в однонаправленно связанных системах с различной топологией аттрактора. Для исследования были выбраны связанные однонаправленно системы Ресслера (системы с простой топологией аттрактора) и системы Лоренца (системы со сложной топологией аттрактора). Показано, что указанные характеристики (распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи, а также усредненная по времени зависимость длительности ламинарных фаз либо от параметра надкритичности, либо от параметра связи) подчиняются различным законам, зависящим от структуры аттракторов взаимодействующих систем, что находится в

хорошем соответствии с известными ранее теоретическими закономерностями: в случае систем Ресслера эти характеристики подчиняются степенным законам и соответствуют перемежаемости *on-off* типа; для систем Лоренца характеристики соответствуют экспоненциальным закономерностям и относятся к перемежаемости типа перескоков (*jump-intermittency*), характерной для аттракторов двулистного типа. Также продемонстрировано применение метода, основанного на непрерывном вейвлетном преобразовании, для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации. Показано, что данный метод позволяет повысить точность оценки статистических характеристик перемежаемости, особенно в присутствии внешних шумов.

**Вторая глава** диссертации посвящена разработке универсального метода анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, справедливого как для однонаправленно, так и взаимно связанных систем с различной топологией аттрактора, основанного на оценке локальных ляпуновских показателей. В данной главе приводится описание самого метода и особенностей его применения для изучения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации в случае тех же самых однонаправленно связанных систем Ресслера и однонаправленно связанных систем Лоренца, которые рассматриваются в первой главе. Результаты работоспособности нового подхода сопоставлены с результатами метода вспомогательной системы, описанными в первой главе, показано хорошее соответствие между ними. Разработанный метод применен к системам с взаимным типом связи: тем же системам Ресслера и Лоренца, но связанным взаимно. Впервые показано, что на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттрактора имеет место перемежаемость типа *on-off*, а в системах со сложной топологией реализуется перемежаемость перескоков, что свидетельствует о независимости типа переме-

жаемости на границе обобщенной синхронизации от типа связи между системами. В конце главы приводятся результаты исследования влияния аддитивного шума на определение статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации двух систем Лоренца в случае однонаправленной и взаимной связи при помощи разработанного подхода. Показано, что при относительно небольшой интенсивности шума оцененные основные характеристики перемежаемости хорошо аппроксимируются теоретическими закономерностями, характерными для перемежаемости перескоков.

В **третьей главе** диссертационной работы рассматривается возможность существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в потоковых системах с различной топологией аттрактора и дискретных отображениях. В начале главы представлены необходимые теоретические сведения, введено определение мультистабильности, описаны подходы для иллюстрации ее наличия, основанные на построении бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний в различные моменты времени и введении в рассмотрение меры мультистабильности как при помощи модификации метода вспомогательной системы (для однонаправленной связи), так и метода расчета локальных показателей Ляпунова (для однонаправленной и взаимной связи). Далее в третьей главе иллюстрируется наличие мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации на конкретных примерах: производится оценка меры мультистабильности и построение бассейнов притяжения для однонаправленно связанных логистических отображений, а также систем Ресслера и Лоренца в случае однонаправленной и взаимной связи между ними. На примере систем Ресслера и логистических отображений демонстрируется новый подход для более точной оценки характеристик перемежаемости на границе обобщенной синхронизации на основе метода, учитывающего мультистабильность. Результаты, полу-

ченные для различных систем при помощи различных методов и подходов, находятся в хорошем соответствии друг с другом и с результатами работ предшественников, что подтверждает наличие мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах, связанных однонаправленно и взаимно, с простой и сложной топологией аттракторов.

В **Заключении** приведены основные результаты и выводы диссертационного исследования.

## **Достоверность полученных результатов**

Достоверность полученных результатов и выводов обеспечена использованием известных, хорошо изученных моделей и подходов, воспроизводимостью результатов и подтверждается их хорошим согласованием с другими работами и данными, полученными различными методами диагностики обобщенной синхронизации и выделения характерных фаз поведения в режиме перемежаемости. В частности, достоверность разработанного подхода, основанного на оценке локальных показателей Ляпунова, к анализу перемежающейся обобщенной синхронизации подтверждается путем сопоставления его результатов с аналогичными данными, полученными при помощи метода вспомогательной системы в случае однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца.

## **Апробация работы и публикации**

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем института физики ФГБОУ ВО “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” (СГУ).

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно–исследовательских работ, проводимых в СГУ, среди которых гранты Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (проекты №№ МД-21.2020.2, МД-18.2022.1.2) и гранты Российского научного фонда (проекты №№ 14-12-00224, 19-12-00037).

Отраженные в диссертационной работе результаты, неоднократно представлялись на научных конференциях и школах и опубликованы в тезисах докладов: XVIII Научной школе “Нелинейные волны – 2018”, Нижний Новгород, Российская Федерация, 26 февраля – 4 марта 2018 г. [65] (стендовый доклад), XIII Всероссийской конференции молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”, г. Саратов, 4–6 сентября 2018 г. [66] (стендовый доклад), XVII Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн” имени А.П. Сухорукова (“Волны-2019”), г. Москва, Российская Федерация, 26-31 мая 2019 г. [67] (стендовый доклад), 12-ой Международной школе-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), г. Саратов, Российская Федерация, 1–6 октября 2019 г. [68] (стендовый доклад), XX Международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, 23–27 ноября 2020 г. [69] (устный доклад), Всероссийской школе-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2020”, 30 ноября - 4 декабря 2020г., г. Саратов, Российская Федерация (устный доклад), XXII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления: физика и применения имени профессора А.П. Сухорукова” (“Волны-2021”), г. Москва, Российская Федерация, 6-11 июня 2021 г. [70] (устный доклад), Конференции международных математических центров мирового уровня, 9-13 августа 2021 г. Сочи, Российская Федерация (устный доклад), XXI Международной конференции “Мате-

матическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, 22–26 ноября 2021 г. [71] (устный доклад), XIII научной конференции молодых ученых “Представляем научные достижения миру. Естественные науки”, г. Саратов, Российская Федерация, 11–12 апреля 2022 г. [72] (устный доклад), XXXIII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления: физика и применения” имени профессора А.П. Сухорукова, г. Москва, Российская Федерация, 5-10 июня 2022 г. [73] (устный доклад), Международной научной конференции “Динамические системы. Теория и приложения”, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, 26-29 июня 2022 г. [74] (устный доклад), XXII Международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, 14–17 ноября 2022 г. [75] (устный доклад), XXX Всероссийской научной конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023”, г. Саратов, Российская Федерация, 15–19 мая 2023 г. [76] (устный доклад), VIII Scientific School “Dynamics of Complex Networks and their Applications”, г. Калининград, Российская Федерация, 19-21 сентября 2024 г. [77] (устный доклад).

Результаты диссертационной работы опубликованы в научных журналах, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов кандидатских и докторских диссертаций [52–61] (всего 10 статей). Автором получено три свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [62–64].

# Глава 1

## **Подходы к исследованию обобщенной и перемежающейся обобщенной синхронизации**

**[57, 62, 65–68]**

В данной главе приводятся общие известные факты об обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных системах с простой и сложной топологией аттрактора. Рассматривается использование различных подходов, в том числе классического метода вспомогательной системы [50], для диагностики данного режима. Далее, демонстрируется применение метода вспомогательной системы для оценки основных статистических характеристик перемежаемости (с целью классификации ее типа), имеющей место на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. В конце описывается метод более точной оценки указанных характеристик, в основе которого лежит применение вейвлетного преобразования, и приводятся результаты его работы.

### **1.1 Диагностика обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах**

О режиме обобщенной синхронизации известно стало сравнительно недавно. Первая работа по ней появилась в 1995 году [6], где было описано указанное явление для двух однонаправленно связанных систем

Ресслера [78] и радиотехнических генераторов с 1.5 степенями свободы [79]. Позднее понятие обобщенной синхронизации было расширено на две взаимно связанные системы и сети связанных нелинейных элементов [8].

Под обобщенной хаотической синхронизацией следует понимать существование функциональной связи между состояниями взаимодействующих систем. В общем случае вид этой связи может являться и функционалом. В контексте потоковых динамических систем для однонаправленной связи данное определение можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – вектор состояния ведущей системы,  $\mathbf{y}(t)$  – вектор состояния ведомой системы,  $\mathbf{F}$  – функциональное соотношение (функционал), связывающее состояния двух систем. Для взаимно связанных систем соотношение (1.1) следует переписать в неявном виде:

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] = 0, \quad (1.2)$$

где векторы состояний  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  теперь относятся к первой и второй взаимодействующим системами без разделения на ведущую и ведомую.

Необходимость использования численных методов при анализе режима обобщенной синхронизации обусловлена тем фактом, что форма функционального соотношения  $\mathbf{F}$  далеко не всегда может быть получена аналитическим путем [50]. Во-первых, данная зависимость может иметь как гладкую, так и фрактальную структуру, в связи с чем выделяют режимы так называемой слабой и сильной обобщенной синхронизации [11, 18, 20]. Во-вторых, в случае обобщенной синхронизации в качестве взаимодействующих систем могут выступать системы с различной топологией аттрактора. Например, система Ресслера, с аттрактором ленточного типа с относительно простой топологией, может воздействовать на систему Лоренца, с двулистным аттрактором с относительно

сложной топологией [11]. К тому же, обобщенная синхронизация может также наблюдаться и между системами с различными размерностями фазового пространства [23].

В совокупности все перечисленные особенности обобщенной синхронизации приводят к трудностям, которые в общем случае не позволяют рассчитывать на аналитические методы при исследовании данного режима. В результате появились различные численные подходы, позволяющие с достаточной простотой и точностью установить различные закономерности данного режима. В частности, в данной диссертационной работе будут рассмотрены как классические подходы, такие как метод вспомогательной системы и метод оценки спектра показателей Ляпунова, так и менее популярные, в том числе относительно новые методы, такие как метод ближайших соседей и метод фазовых трубок, и особенности их применения.

### **1.1.1 Метод вспомогательной системы**

Метод вспомогательной системы был предложен в 1996 году [50]. Данный подход обладает одновременно и простотой, и высокой точностью, что значительно отличает его от других методов диагностики обобщенной синхронизации. В общем случае при исследовании обобщенной синхронизации при однонаправленной связи предпочтение отдают именно ему.

Данный метод заключается в следующем. Наряду с исходной ведомой системой в рассмотрение вводится дополнительная ведомая (вспомогательная) система, полностью идентичная ведомой системе по оператору эволюции и значениям управляющих параметров, но стартовая с других начальных условий, правда, лежащих в бассейне притяжения того же самого аттрактора, что и в ведомой системе. Тогда из определения обобщенной синхронизации будет следовать, что при ее возник-

новении будет наблюдаться одинаковое функциональное соотношение между состояниями ведомой и ведущей систем и между состояниями вспомогательной и ведущей систем. В свою очередь, это означает ни что иное, как эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем. Следовательно, для диагностирования наличия либо отсутствия обобщенной синхронизации нужно сравнить состояния этих двух (ведомой и вспомогательной) систем друг с другом. При возникновении обобщенной синхронизации состояния этих систем будут идентичны, следовательно, расстояние (модуль разности) между ними будет равно нулю. И наоборот, при отсутствии обобщенной синхронизации состояния систем будут достаточно сильно отличаться, а расстояние между ними может достигать величин порядка размера самих аттракторов. Стоит также учесть, что эквивалентность состояний будет наблюдаться не сразу, а только после некоторого переходного процесса, требуемого для перехода систем в режим обобщенной синхронизации.

К сожалению, поскольку данный метод предполагает сравнение состояний ведомых систем при одной и той же ведущей системе, это делает невозможным его применение в случае взаимной связи [80]. Вследствие этого, для исследования обобщенной синхронизации при взаимной связи требуется разработка других, более универсальных подходов. Однако, для однонаправленно связанных систем метод вспомогательной системы на текущий момент все еще является наиболее предпочтительным, поскольку он позволяет получить результаты с достаточно высокой точностью независимо от сложности топологии аттракторов рассматриваемых систем.

### **1.1.2 Метод ближайших соседей и метод фазовых трубок**

Поскольку метод вспомогательной системы оказывается неприменимым в случае взаимной связи, потребовалась разработка иных подходов

для анализа систем с данным типом связи [8]. К одному из таких методов относится метод фазовых трубок [7, 20], основанный на модификации метода ближайших соседей [6].

Рассмотрим метод ближайших соседей. Он основан на самом определении обобщенной синхронизации в контексте наличия функциональной связи между состояниями взаимодействующих систем [6]. Сначала в фазовом пространстве одной из двух систем выбираются опорные точки и ищутся соответствующие им ближайшие соседи. В случае обобщенной синхронизации образы ближайших соседей остаются близкими к образам соответствующих опорных точек, в то время как в асинхронном режиме они “разбегаются” по всему аттрактору. В качестве количественной меры можно использовать среднее расстояние между ближайшими соседними точками и опорными [81], нормированное на размер аттрактора. При наличии обобщенной синхронизации величина этой меры должна оставаться малой.

В случае метода фазовых трубок рассматриваются ближайшие соседи с учетом предыстории. Иными словами, ближайшая точка принимается в расчет только в том случае, если соответствующая ей фазовая траектория остается близкой к опорной траектории на всей длине предыстории (“фазовой трубки”). Во всем остальном метод фазовых трубок аналогичен методу ближайших соседей.

И метод ближайших соседей, и метод фазовых трубок позволяют установить факт наличия обобщенной синхронизации как в случае однонаправленной связи, так и в случае взаимной [6, 8], а также могут использоваться для количественного определения границы обобщенной синхронизации [82]. Однако, к сожалению, метод ближайших соседей оказывается неприменим в случае рассмотрения систем с относительно сложной топологией аттрактора, например, таких как системы Лоренца или системы Чена, при этом метод фазовых трубок в таких системах

работает достаточно эффективно [83]. Другим недостатком обоих подходов является существенное увеличение вычислительных затрат, требуемых для поиска ближайших соседей, особенно, с учетом фазовых трубок. В связи с этим, требовалась разработка более универсального и менее затратного подхода, применимого вне зависимости от сложности топологии аттрактора.

### **1.1.3 Метод расчета спектра показателей Ляпунова**

Одним из наиболее универсальных способов исследования обобщенной синхронизации является оценка спектра показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова характеризуют динамику нелинейной системы. Положительные показатели отвечают хаотической динамике, отрицательные – периодической, а нулевые – возмущению текущего состояния системы вдоль фазовой траектории. Число показателей Ляпунова совпадает с числом переменных, описывающих нелинейные уравнения системы. Известно, что для хаотических аттракторов динамических систем с размерностью фазового пространства  $3$  имеется один положительный показатель, один нулевой и один отрицательный [47]. В случае рассмотрения двух таких связанных хаотических систем общая размерность системы достигает  $6$ , следовательно, динамику систем в этом случае описывают  $6$  показателей Ляпунова.

Для диагностики обобщенной синхронизации путем оценки спектра показателей Ляпунова необходимо применить следующую последовательность действий. При фиксированных значениях управляющих параметров взаимодействующих систем после переходного процесса для определенного значения параметра связи вычисляются показатели Ляпунова в течение определенного, достаточно продолжительного интервала времени. В случае однонаправленной связи можно четко отделить показатели Ляпунова, которые не зависят от величины параметра свя-

зи (показатели ведущей системы), от показателей, изменяющихся при увеличении силы связи (показатели ведомой системы) и называемых условными [11, 84].

При нулевом значении параметра связи, когда обобщенная синхронизация отсутствует, в спектре наблюдаются два положительных, два нулевых и два отрицательных показателя Ляпунова. С увеличением величины параметра связи один из старших показателей Ляпунова уменьшается, пока его значение не станет отрицательным, что и будет соответствовать возникновению режима обобщенной синхронизации. Примечательно, что это справедливо как для однонаправленного типа связи, так и для взаимного.

Для показателей Ляпунова можно получить решения путем поиска собственных чисел матрицы Якоби для исходной системы уравнений (при непрерывном времени – дифференциальных после линеаризации). Однако, это само по себе не является тривиальной задачей, к тому же на практике не всегда представляется возможным получить такие уравнения, например, при использовании временных рядов для исследования. В связи с этим, обычно используют приближенные, численные методы для расчета (оценки) показателей Ляпунова. К одному из таких подходов относится алгоритм Бенеттина, Галгани, Георгилли и др. [47, 85]. Он характеризуется своей простотой реализации, достаточно высокой точностью и универсальностью, поскольку может быть использован вне зависимости от относительной сложности топологии аттрактора и типа связи. Для расчета спектра показателей Ляпунова применяется ортогонализация Грама-Шмидта.

Алгоритм расчета заключается в следующем. Сначала, после переходного процесса в определенный момент времени задается вектор малого возмущения по отношению к фазовой траектории. Этот вектор стоит направить либо вдоль наибольшего возмущения [86], либо вдоль воз-

мущения типа сдвиг [87]. В первом случае с наибольшей точностью вычисляется старший показатель Ляпунова, во втором случае – нулевой показатель. Поскольку для диагностики режима обобщенной синхронизации точное определение нулевого показателя не так важно, как определение старшего показателя, предпочтение, как правило, отдается именно первому способу. Для определения остальных показателей Ляпунова в спектре необходимо задать набор векторов, ортогональных заданному.

Затем через равные временные интервалы фиксируется изменение каждого вектора возмущения и производится их нормировка и ортогонализация. Тогда показатели Ляпунова вычисляются по формуле  $\Lambda \cong \frac{1}{k\tau} \sum_{i=1}^k \ln\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_i^j\|}{\xi}\right)$ , где  $k$  – число интервалов,  $\tau$  – длительность интервала,  $\xi = 1$  – единичный модуль начального вектора возмущения,  $\|\tilde{\mathbf{x}}_i^j\|$  – модуль  $j$ -го вектора возмущения для  $i$ -го интервала до нормировки, но после ортогонализации, при устремлении времени накопления  $\Theta_{acc} = k\tau$  к бесконечности. Стоит учесть, что если задать временной интервал слишком большим, то возмущенная траектория может вылететь на бесконечность. По этой причине величина интервала обычно выбирается небольшой. Однако, временной интервал накопления  $\Theta_{acc}$ , напротив, выбирается максимально возможным, чтобы усредненное значение показателя Ляпунова получилось наиболее точным. Стоит отметить, что ограничение величины интервала накопления позволяет рассмотреть более локальную (временную) динамику исследуемых систем.

Примечательно, что при численном моделировании, когда известны дифференциальные уравнения исследуемой системы, для вычисления показателей Ляпунова удобно использовать уравнения в вариациях. Если такие уравнения получить не предоставляется возможным, например, как в случае временных рядов, тогда стоит искать на аттракторе фазовые траектории, близкие к исходной [86]. К сожалению, второй случай

не позволит оценить весь спектр показателей Ляпунова, но по крайней мере даст достаточно высокую оценку двум старшим показателям.

При описанном подходе каждый вектор возмущения будет соответствовать определенному показателю Ляпунова. В случае двух однонаправленно связанных систем с размерностью фазового пространства, равной трем, при изменении параметра связи в спектре показателей Ляпунова будет наблюдаться три постоянных показателя, соответствующих ведущей системе, и три переменных, условных показателя, отвечающих ведомой системе. В таком случае, как отмечалось выше, обобщенная синхронизация будет наблюдаться при отрицательном значении старшего условного показателя Ляпунова. Это будет означать, что в среднем за время наблюдения взаимодействующие системы демонстрируют состояние синхронизации, что, однако, не исключает кратковременные временные интервалы асинхронной динамики. Поэтому для точного определения критического значения параметра связи, при котором после переходного процесса устанавливается только режим обобщенной синхронизации, следует использовать достаточно большое время наблюдения.

В случае взаимной связи все показатели Ляпунова в спектре зависят от величины параметра связи. При таком типе связи в случае взаимодействия трехмерных динамических систем обобщенная синхронизация будет наблюдаться в момент, когда второй старший показатель Ляпунова станет отрицательным. Как и в случае однонаправленной связи, кратковременные асинхронные всплески все еще могут наблюдаться в этом случае, что стоит учитывать при определении критического значения параметра связи.

## **1.2 Перемежаемость на границе обобщенной синхронизации**

При определенных значениях управляющих параметров и значении параметра связи больше критического значения можно добиться ситуации, когда после переходного процесса во взаимодействующих системах устанавливается режим обобщенной синхронизации. Причем, данный режим будет существовать на протяжении всего последующего времени наблюдения. Однако, если значение параметра связи оказывается немного меньше критического, то наблюдается другой режим, именуемый перемежающимся поведением на границе обобщенной синхронизации или перемежающейся обобщенной синхронизацией [48, 88]. Данный тип поведения характеризуется тем, что во временной динамике взаимодействующих систем после переходного процесса синхронные (ламинарные) фазы поведения прерываются всплесками асинхронных колебаний (турбулентными фазами), тогда как в режиме обобщенной синхронизации турбулентные всплески отсутствуют.

Тип наблюдаемой перемежаемости зависит от топологии аттракторов связанных систем [45, 48]. Для того, чтобы его определить, наряду с определением механизмов возникновения того или иного типа перемежаемости следует проанализировать основные статистические характеристики перемежаемости, такие как распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении параметра связи и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. В зависимости от топологии аттрактора указанные зависимости могут подчиняться либо степенным, либо экспоненциальным закономерностям [45, 48].

Поскольку для оценки статистических характеристик требуется выделение ламинарных и турбулентных фаз поведения, то возникает необхо-

димось в разработке универсальных подходов, которые позволили бы сделать это при любом типе связи и топологии аттрактора. Для этих целей можно использовать обычные методы диагностики обобщенной синхронизации, описанные в разделе 1.1, при этом в роли анализируемой величины должна выступать временная динамика систем. В случае однонаправленной связи можно использовать метод вспомогательной системы таким образом, чтобы анализировалась временная зависимость модуля разности между состоянием ведомой и вспомогательной систем. Тогда, временные интервалы, отвечающие модулю разности близкому к нулю, будут соответствовать ламинарным фазам поведения. И, наоборот, значительное отклонение указанного модуля от нуля будет соответствовать турбулентному всплеску.

Для получения наиболее точных статистических характеристик следует проводить расчеты при различных начальных условиях, а затем усреднять полученные результаты, или просто рассматривать очень длинную временную реализацию. Также, при вычислении характеристик может получиться ситуация, когда значительная доля распределения длительностей ламинарных фаз приходится на интервал малых длительностей, что приводит к искажению статистических характеристик длительностей ламинарных фаз в данном диапазоне. Во избежание указанной проблемы следует при оценке статистических характеристик игнорировать ультракороткие ламинарные фазы. Также, может наблюдаться и обратная ситуация, когда распределение в интервале больших значений длительностей оказывает сильно заниженным. Данная ситуация может возникнуть при недостаточном количестве ламинарных фаз, поэтому при расчете характеристик следует выбирать достаточно большое время наблюдения, по крайней мере, не меньше  $\Theta \sim 10^7$ .

При анализе статистических характеристик перемежаемости следует ожидать следующих результатов. Когда режим перемежающейся обоб-

щенной синхронизации отсутствует, распределение длительностей ламинарных фаз будет сосредоточено в нуле, поскольку ламинарные фазы не детектируются в данном случае. Соответственно, средняя длительность ламинарных фаз тоже будет равна нулю. Затем, при увеличении параметра связи, начиная с определенного значения, возникает перемежающееся поведение. По мере приближения величины параметра связи к критическому значению средняя длительность ламинарных фаз будет увеличиваться, а в распределении длительностей ламинарных фаз наибольшая доля фаз будет сдвигаться в сторону больших длительностей. После достижения критического значения параметра связи длительность ламинарных фаз будет равна времени наблюдения, а распределение длительностей будет представлять собой одно значение, равное времени наблюдения.

Стоит отметить, что для турбулентных фаз, соответственно, будет наблюдаться примерно противоположная картина по отношению к ламинарным фазам. Однако, рассмотрение изменения длительностей турбулентных фаз представляет собой меньший интерес, поскольку для определения типа перемежаемости используется статистика длительностей именно ламинарных фаз. Также именно ламинарные фазы можно использовать для скрытой передачи информации [37]. Однако, выделение ламинарных фаз поведения неразрывно связано с выделением турбулентных фаз. Поэтому для достижения наиболее оптимальных результатов при анализе перемежаемости следует при разработке метода выделения характерных фаз поведения уделить внимание определению той границы, когда происходит переключение между ламинарной и турбулентной временной динамикой. Так, неправильная диагностика турбулентной фазы приведет к некорректной диагностике ламинарных фаз и, соответственно, к некорректно рассчитанным характеристикам переме-

жаемости. Таким образом, при решении задачи выделения одного типа поведения автоматически решается и задача определения другого типа.

### 1.3 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в модельных системах с однонаправленной связью

Прежде, чем перейти к разработке универсального метода для исследования обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, необходимо получить результаты для уже известных и хорошо изученных моделей. В качестве моделей таких систем рассмотрены однонаправленно связанные системы с различной топологией аттрактора.

#### 1.3.1 Однонаправленно связанные системы Ресслера

В качестве первого примера были выбраны две однонаправленно связанные системы Ресслера с аттрактором ленточного типа, находящиеся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации [48,78]. Данные системы описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= b + z_d(x_d - c), \\ x_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= b + z_r(x_r - c), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10.0$ ,  $\omega_d = 0.99$ ,  $\omega_r = 0.95$  – управляющие параметры,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  – производные по безразмерному времени,  $\varepsilon$  – параметр связи. Индексы  $r$  и  $d$  соответствуют ведомой и ведущей системам, соответственно. Данная система интегрировалась численно при помощи

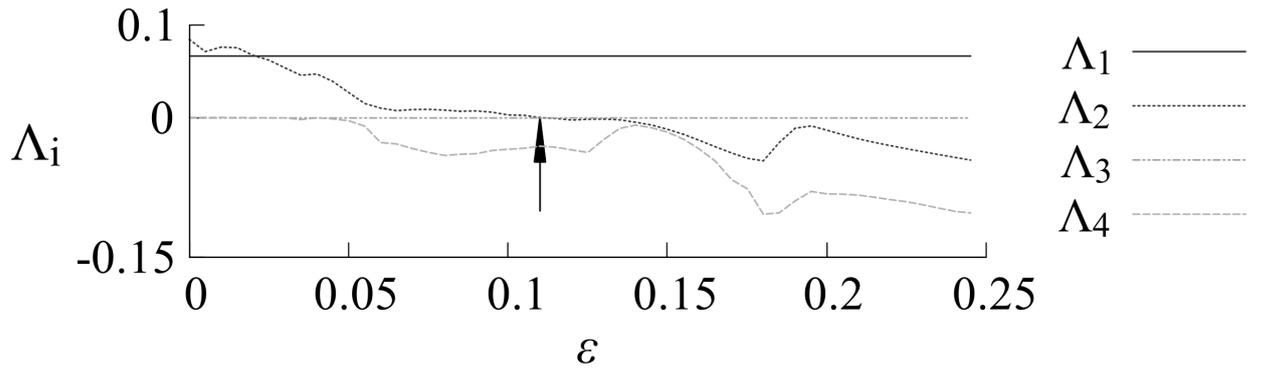


Рисунок 1.1 — Зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи для двух однонаправленно связанных систем Ресслера. Момент установления обобщенной синхронизации отмечен стрелкой

классического метода Рунге-Кутты 4 порядка с шагом  $h = 0.001$ . Это было необходимо для того, чтобы минимизировать накопление ошибки при достаточно длительном наблюдении по сравнению с использованием более простых интегрирующих сеток, например, метода Эйлера.

При построении спектра показателей Ляпунова установлено, что в данной системе переход к обобщенной синхронизации возникает при критическом значении параметра связи  $\varepsilon_c \approx 0.11$  (см. рисунок 1.1).

Из рисунка 1.1 видно, что переходу к режиму обобщенной синхронизации соответствует значение параметра связи, при котором второй (старший условный) показатель Ляпунова меняет знак с положительного на отрицательный. Это неудивительно, поскольку положительный показатель Ляпунова отвечает за хаотическую динамику, а при наступлении обобщенной синхронизации происходит подавление собственной хаотической динамики ведомой системы, что приводит к смене знака этого показателя Ляпунова [12, 89].

При значении параметра связи чуть ниже критического  $\varepsilon_c$  в системе (1.3) возникает перемежаемость типа on-off [48]. Данный тип перемежаемости характеризуется распределением длительностей ламинарных

фаз, соответствующим степенному закону с показателем  $-3/2$  [90, 91]:

$$p(\tau) \sim \tau^{-3/2}; \quad (1.4)$$

и зависимостью средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, отвечающей степенному закону с показателем  $-1$ :

$$T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}. \quad (1.5)$$

Для подтверждения вышесказанного к исследуемым системам (1.3) был применен подход на основе метода вспомогательной системы, модифицированного таким образом, чтобы анализировалась временная динамика связанных систем. На рисунке 1.2 представлена временная зависимость модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $\Delta x(t) = |x_r(t) - x_a(t)|$ , где  $x_a(t)$  –  $x$ -координата вспомогательной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= -\omega_r y_a - z_a + \varepsilon(x_d - x_a), \\ \dot{y}_a &= \omega_r x_a + a y_a, \\ \dot{z}_a &= b + z_a(x_a - c), \end{aligned} \quad (1.6)$$

описываемой тем же уравнением, что и ведомая система из (1.3), но с другими начальными условиями. Из рисунка видно, что временная зависимость  $\Delta x(t)$  носит перемежающийся характер, т.е. на ее графике наблюдаются турбулентные всплески, чередуемые с фазами синхронизации, что согласуется с теоретическими сведениями. Стоит отметить, что очень коротких турбулентных всплесков с длительностью  $\tau \leq 20$  наблюдается мало, что должно упростить определение длительностей ламинарных фаз.

Введение порога разделения характерных фаз поведения  $\Delta = 8 \times (10^{-4})^1$  (если  $\Delta x(t) < \Delta$ , фаза считается ламинарной) позволило выде-

<sup>1</sup>Важно отметить, что выбор порога разделения характерных фаз поведения  $\Delta$  является достаточно произвольным. В то же самое время, он должен быть близок к нулю и одновременно оказываться во много раз меньше характерного размера аттрактора системы. Изменение величины  $\Delta$  в разумных пределах не оказывает сильного влияния на статистические характеристики перемежаемости.

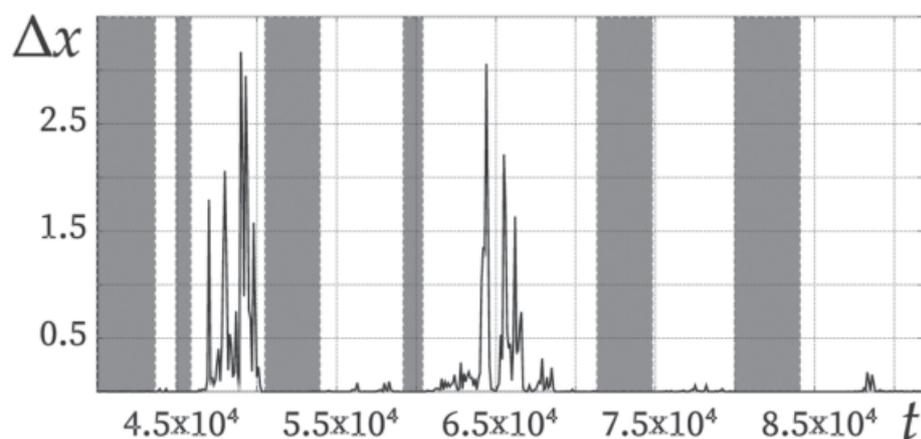


Рисунок 1.2 — Временная зависимость модуля разности  $\Delta x = |x_r - x_a|$  между состояниями ведомой и вспомогательной систем Ресслера (1.3) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.106$ . Ламинарные фазы, обнаруженные при помощи метода вспомогательной системы, показаны серыми прямоугольниками. Порог разделения характерных фаз поведения был задан как  $\Delta = 8 \times 10^{-4}$

лить ламинарные фазы, благодаря чему стала возможной оценка статистических характеристик перемежаемости. В первую очередь, был выполнен расчет нормированных распределений длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи (см. рисунок 1.3).

Из полученных данных видно, что вблизи границы обобщенной синхронизации (то есть, при относительно небольшом отклонении значения параметра связи от критического) распределения соответствуют степенной функции с показателем  $-3/2$ , что характерно для перемежаемости типа on-off, типичной для систем Ресслера. Если бы мы имели дело с другим типом перемежаемости, например, с перемежаемостью перескоков, то угол наклона прямой, аппроксимирующей распределение, зависел бы сильнее от изменения величины параметра связи или вовсе не соответствовал бы степенной функции.

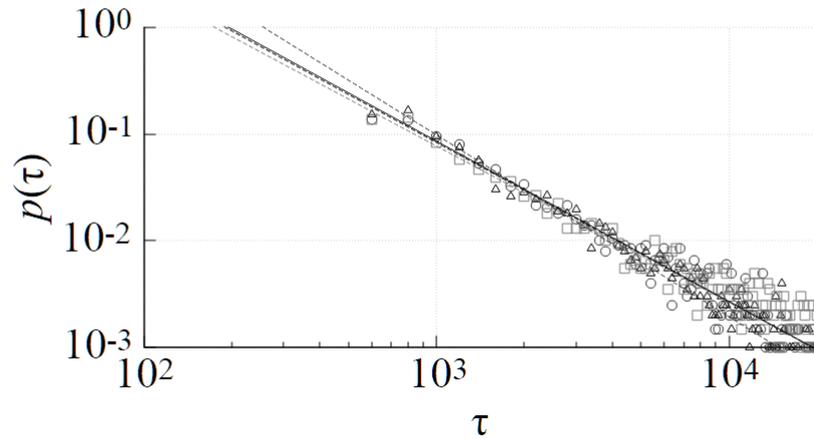


Рисунок 1.3 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз в двойном логарифмическом масштабе в случае однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3) при значениях параметра связи  $\varepsilon = 0.1075$  (треугольники),  $\varepsilon = 0.1085$  (кружки) и  $\varepsilon = 0.1095$  (квадраты). Сплошная линия соответствует теоретической степенной функции (1.4) с показателем  $-3/2$ . Пунктирные линии соответствуют аппроксимациям степенным законом (1.7) численных данных при помощи метода наименьших квадратов

Результат аппроксимации полученных распределений степенной функцией

$$f(x) = bx^a \tag{1.7}$$

при помощи метода наименьших квадратов представлен в таблице 1.1. Наибольший интерес представляет параметр  $a$ , отвечающий показателю степенной функции (наклону графика распределения в двойной логарифмической шкале), в то время как второй параметр  $b$  отвечает за сдвиг функции по вертикали. Относительное отклонение оцененных значений показателя степенной функции от теоретической функции (1.4) с показателем  $-3/2$  для значений параметра связи 0.1075, 0.1085 и 0.1095 составило 3.05%, 3.69% и 0.23%. Если бы распределения не соответство-

Таблица 1.1 — Аппроксимация распределений длительностей ламинарных фаз, полученных для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3), степенным законом (1.7) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$

Параметр аппроксимирующей функции $f(x)$	Параметр связи $\varepsilon$		
	0.1075	0.1085	0.1095
$a$	-1.545	-1.555	-1.497
$b$	$\exp(8.21)$	$\exp(8.323)$	$\exp(7.79)$

вали степенной функции, то наблюдалось бы значительное отклонение не только от теоретической функции, но и между полученными значениями параметров аппроксимирующих функций.

Далее была получена зависимость другой статистической характеристики перемежаемости — средней длительности ламинарных фаз — от параметра надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon$ , т.е. разности между критическим значением параметра связи и тем, для которого была рассчитана средняя длительность (см. рисунок 1.4). Расчет данной характеристики был выполнен после оценки распределений длительностей ламинарных фаз, поскольку он требовал больших вычислительных затрат из-за необходимости анализа множества значений параметра связи.

Из рисунка 1.4 видно, что средняя длительность хорошо аппроксимируется степенной функцией (1.5) с показателем  $-1$ , что также соответствует перемежаемости типа on-off, что подтверждает теоретические данные. Аппроксимация степенной функцией (1.7) при помощи метода наименьших квадратов показала, что  $a \approx -1.11$ ,  $b \approx 14.013$ . Видно, что параметр  $a$  достаточно близок к теоретическому значению  $-1$ , что подтверждает корректность полученной зависимости средней длительности.

Таким образом, результаты оценки основных статистических характеристик перемежаемости позволяют сделать вывод, что описанный под-

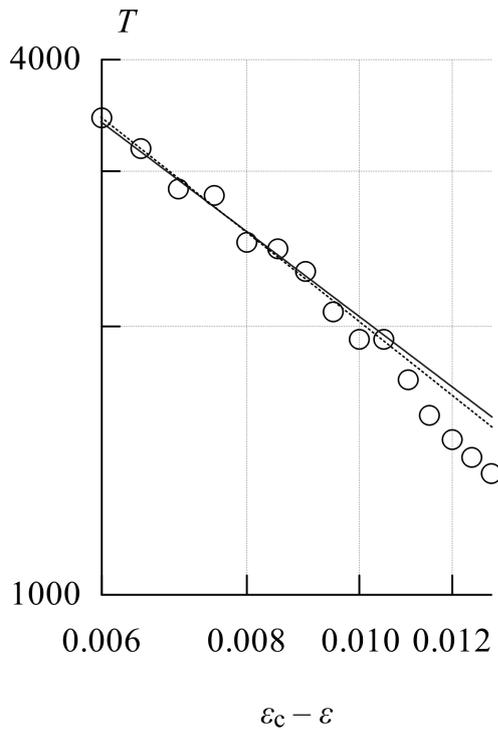


Рисунок 1.4 — Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3) от параметра надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon$ , полученная при помощи метода вспомогательной системы и ее аппроксимации степенным законом (1.5) с показателем  $-1$  (сплошная линия) и степенной функцией (1.7) (пунктирная линия).

ход на основе модификации метода вспомогательной системы может быть применен для достаточно точной оценки указанных характеристик и также для выявления типа перемежаемости в системах с относительно простым типом аттрактора (таких как системы Ресслера).

### 1.3.2 Однонаправленно связанные системы Лоренца

В качестве второго примера рассмотрено применение метода вспомогательной системы к системам с относительно сложной топологией аттрактора. В качестве таких систем были взяты однонаправленно связанные системы Лоренца [92], находящиеся в режиме перемежающейся

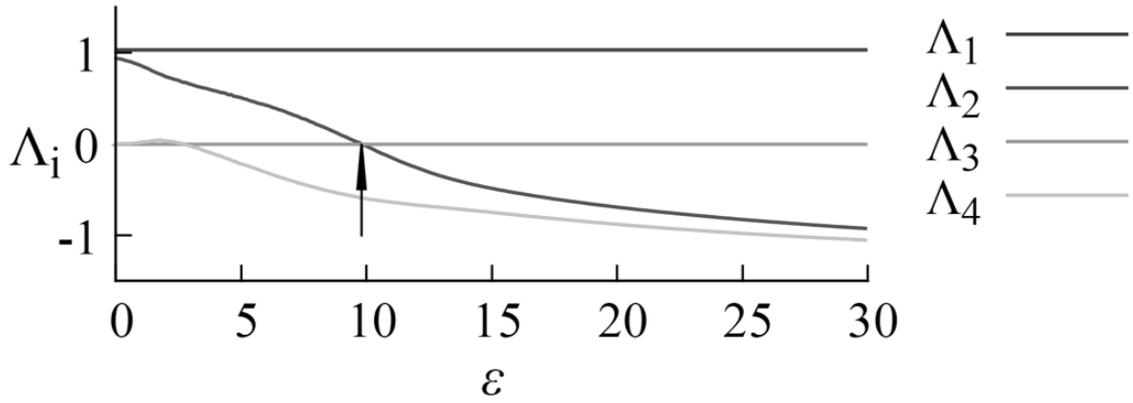


Рисунок 1.5 — Зависимость четырех старших показателей Ляпунова для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8). Момент установления обобщенной синхронизации отмечен стрелкой

обобщенной синхронизации, описываемые следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений [44, 45]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\
 \dot{z}_1 &= -b_1 z_1 + x_1 y_1,
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\
 \dot{z}_2 &= -b_2 z_2 + x_2 y_2,
 \end{aligned}$$

где  $\sigma = 10.0$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 8/3$ ,  $r_1 = 40$ ,  $r_2 = 35$  — управляющие параметры,  $\varepsilon$  — параметр связи. Данная система интегрировалась численно при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка с шагом  $h = 0.001$ .

Построение спектра показателей Ляпунова показало, что в данной системе возникновение обобщенной синхронизации происходит при критическом значении параметра связи  $\varepsilon_c \approx 10.0$  (см. рисунок 1.5). Как и в случае однонаправленно связанных систем Ресслера, данному переходу соответствует значение параметра связи, при котором второй (старший условный) показатель Ляпунова переходит в область отрицатель-

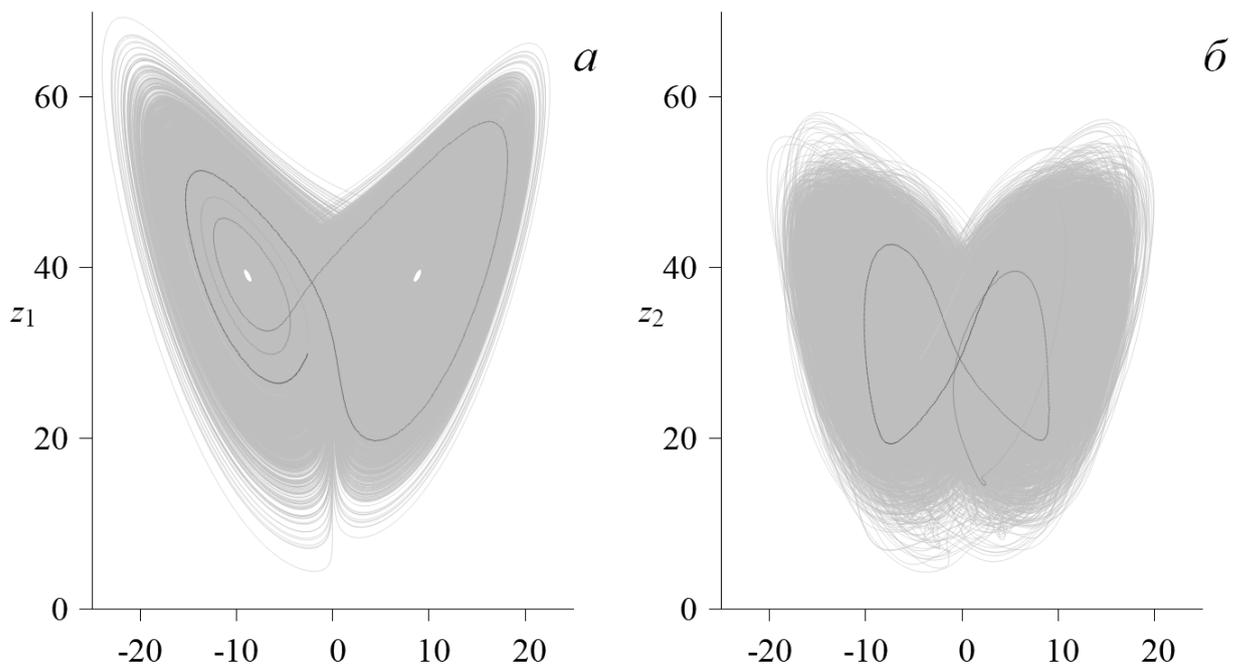


Рисунок 1.6 — Фазовые портреты ведущей (слева) и ведомой (справа) систем Лоренца (1.8) при  $\varepsilon = 9.9$ . Линией отмечена фазовая траектория в процессе перехода к турбулентной фазе. Градации серого при переходе от темного к светлому соответствуют росту величины безразмерного времени

ных значений. По факту режим обобщенной синхронизации наступает чуть позже, при  $\varepsilon_c \approx 10.5$ , о чем свидетельствуют результаты применения метода вспомогательной системы к исследуемой системе (1.8).

Легко убедиться, что наблюдаемый тип перемежаемости (перескоков) [45] обусловлен структурой самих аттракторов Лоренца (см. рисунок 1.6).

На рисунке 1.6 видно, что перед моментом возникновения турбулентного всплеска фазовая траектория на аттракторе одной системы и соответствующий ей образ на аттракторе другой системы расположены на одном и том же листе (в одной и той же области) аттракторов. Однако, с течением безразмерного времени фазовая траектория и ее образ на неопределенное время оказываются в разных областях соответствующих

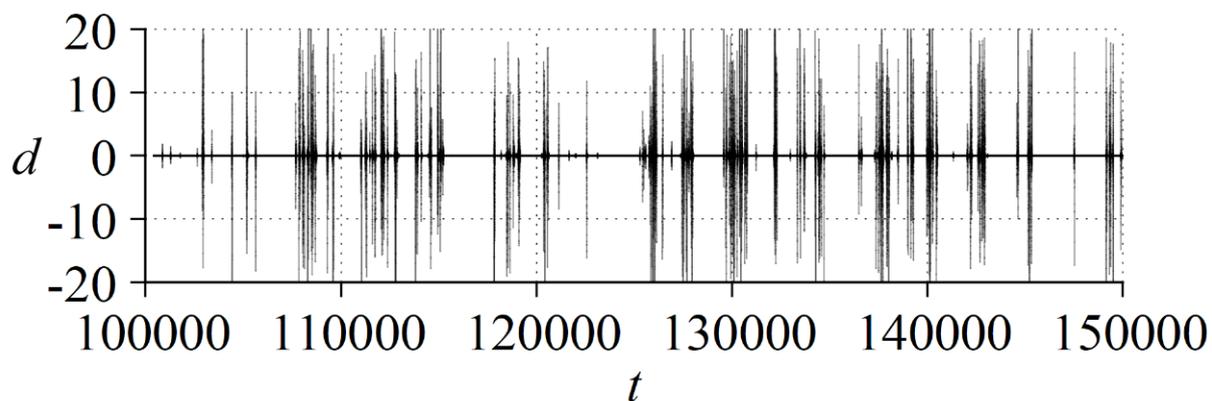


Рисунок 1.7 — Временная зависимость разности между состояниями вспомогательной и ведомой систем Лоренца (1.8)  $d = x_a - x_2$ . Величина параметра связи  $\varepsilon = 9.9$

аттракторов. Одна из траекторий “перескакивает” на другую половину аттрактора, вследствие чего обе траектории двигаются асинхронно, что и приводит к разрушению обобщенной синхронизации, т.е. к появлению турбулентной фазы. Из-за такой особенности данное поведение и носит название перемежаемости перескоков [45].

Существует множество отличий перемежаемости перескоков от перемежаемости типа on-off. Чтобы их проанализировать, а также оценить впоследствии статистические характеристики перемежаемости, как и для систем с простой топологией аттрактора, был использован метод вспомогательной системы, модифицированный для анализа временных рядов. Для начала была получена временная зависимость разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем Лоренца (1.8)  $d = x_a - x_2$  (см. рисунок 1.7).

Из рисунка 1.7 видно, что в отличие от перемежаемости типа on-off на временной зависимости  $d(t)$  наблюдается наличие очень коротких турбулентных всплесков. Это стоит учитывать при выборе величины шага дискретизации временных рядов, т.к. если шаг будет слишком большим, то возрастает риск проигнорировать множество таких турбулент-

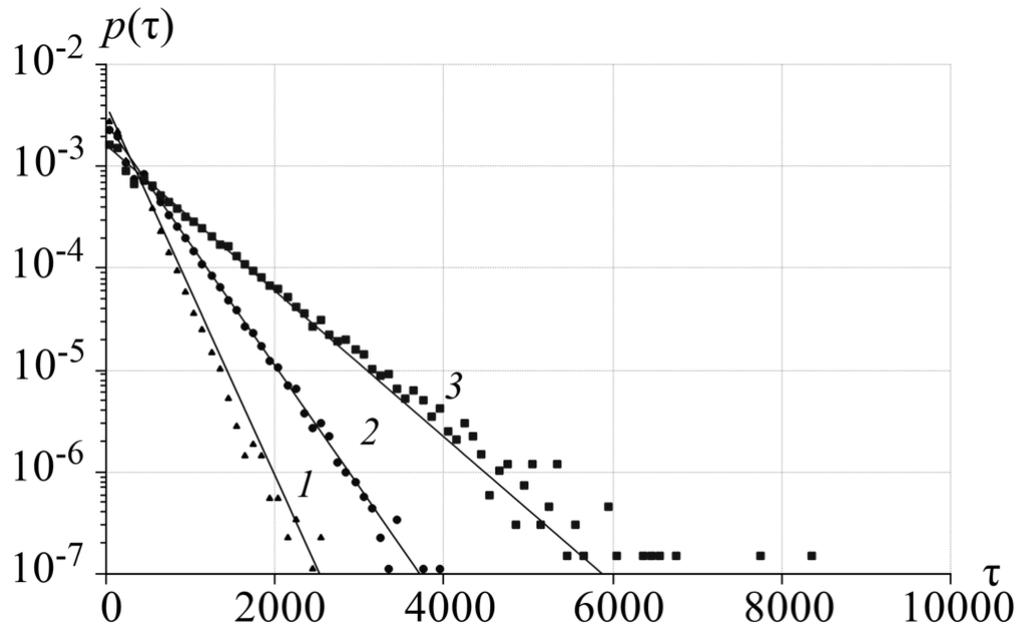


Рисунок 1.8 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8) при значениях параметра связи  $\varepsilon = 9.6, 9.9$  и  $10.2$  (цифры 1, 2 и 3, соответственно). Точки соответствуют результатам, полученным при помощи метода вспомогательной системы. Линии соответствуют аппроксимирующим экспоненциальным законам вида (1.9)

ных всплесков, что приведет к возрастанию погрешности при оценке статистических характеристик.

Далее был произведен расчет нормированных распределений длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи (см. рисунок 1.8).

Из полученных распределений видно, что они описываются не степенными, а экспоненциальными закономерностями вида

$$\ln(f(x)) = -x/T - \ln(T), \quad (1.9)$$

где  $T$  — средняя длительность ламинарных фаз. Такой характер распределений полностью соответствует перемежаемости типа перескоков [45]. Также видно, что с увеличением величины параметра связи средняя дли-

Таблица 1.2 — Аппроксимация распределений длительностей ламинарных фаз однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8) экспоненциальной зависимостью вида (1.9) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$

Параметр аппроксимирующей функции $f(x)$	Параметр связи $\varepsilon$		
	9.6	9.9	10.2
$T$	237.905	363.43	604.405

тельность ламинарных фаз увеличивается (распределение сдвигается в сторону увеличения длительности), что также подтверждает корректность полученных результатов. Результат аппроксимации полученных распределений экспоненциальной закономерностью вида (1.9) представлен в таблице 1.2.

Наконец, была получена зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  и ее аппроксимации (см. рисунок 1.9). Из рисунка 1.9 видно, что при достаточно большом отклонении величины параметра связи от критического значения ( $\varepsilon_c \approx 10.5$ ) средняя длительность ламинарных фаз меняется по закону

$$\ln(f(x)) = a + bx, \quad (1.10)$$

параметры которого после сопоставления данной функции и исходной зависимости средней длительности при помощи метода наименьших квадратов оказываются следующими:  $a = -4.82519$ ,  $b = 1.07259$ . Однако, по мере приближения величины параметра связи к критическому значению, отклонение между указанной экспоненциальной функцией и данными численного моделирования увеличивается. В таком случае данная характеристика перемежаемости более точно описывается другой закономерностью [45]:

$$\ln(g(x)) = a + e^{bx} + \frac{2}{d} \left( \frac{1}{12} + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3^{5/4}} x^{3/2} + \frac{x^2}{12} \right), \quad (1.11)$$

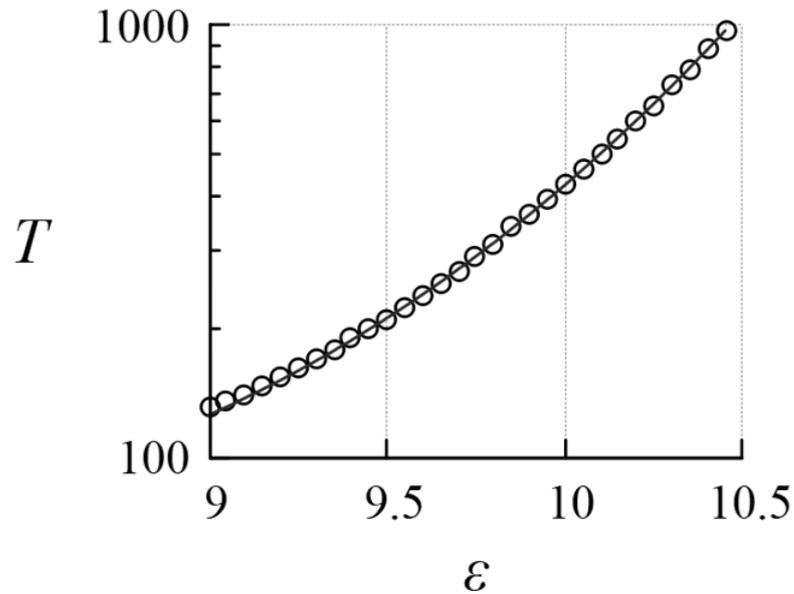


Рисунок 1.9 — Зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от параметра связи  $\varepsilon$  для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8). Линия соответствует аппроксимирующей функции (1.11)

где  $a, b, d$  — некоторые положительные константы. Стоит отметить, что данная закономерность была получена аналитически при помощи анализа исходной системы уравнений и учитывает больше нелинейных слагаемых, чем и объясняется ее большее сходство со средней длительностью ламинарных фаз в достаточно большом диапазоне величины параметра связи. Оценка параметров после применения метода наименьших квадратов оказывается следующей:  $a \approx 8.74106$ ,  $b \approx 0.246484$ ,  $d \approx 0.253442$ .

Поскольку обе описанные аппроксимирующие функции являются экспоненциальными, то это снова указывает на перемежаемость типа переключений. Также можно убедиться в достоверности полученных результатов, если сопоставить значения средней длительности ламинарных фаз, полученные при расчете распределения длительностей, с графиком на рисунке 1.9.

Таким образом, метод вспомогательной системы позволяет успешно выявить перемежаемость переключений и получить достаточно точную

оценку ее основных статистических характеристик, таких как распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. Отклонения между численно полученными значениями и теоретическими кривыми незначительны и могут быть сведены к минимуму при увеличении длительности расчета и использовании более точного шага интегрирования.

#### **1.4 Применение метода вейвлетного преобразования для анализа характеристик перемежаемости**

Основная сложность при анализе статистических характеристик перемежаемости заключается в необходимости точного определения интервалов характерных фаз поведения исследуемой системы. Например, при рассмотрении временного ряда, представляющего собой разность состояний ведомой и вспомогательной систем для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3), (1.6) (см. рисунок 1.10а), можно обнаружить флуктуации, из-за которых граница между интервалами синхронной и асинхронной динамики размывается, что затрудняет анализ перемежаемости. Для решения возникающей проблемы требовалось использовать другой метод.

Так, более эффективным методом определения характеристик перемежаемости оказался метод, основанный на применении непрерывного вейвлетного преобразования [93–96]. Данный подход уже был опробован в случае фазовой синхронизации [95, 96] и синхронизации с запаздыванием [93, 94].

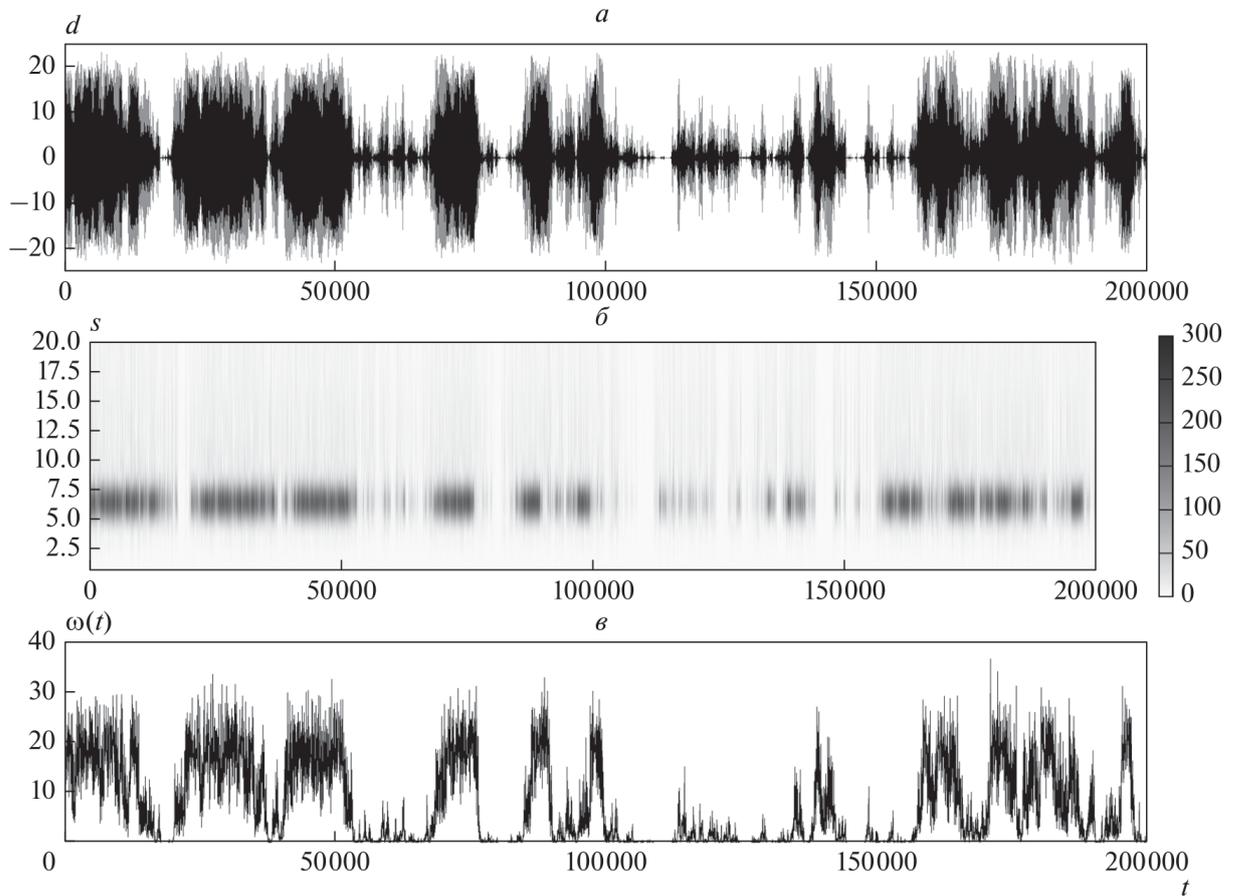


Рисунок 1.10 — (а) Временная зависимость разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем Ресслера (1.3), (1.6)  $d = x_a - x_2$ . (б) Проекция вейвлетной поверхности  $W(s, t)$  на плоскость  $(t, s)$  для временной зависимости  $d(t)$ . Градация цвета пропорциональна модулю вейвлетной поверхности  $|W(s, t)|$ . (в) Энергия вейвлетного спектра  $\omega(t)$ , приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов  $s \in (5.0, 7.0)$ . Параметр надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon = 0.004, \varepsilon_c = 0.11$

Сначала для исходного временного ряда, выступающего в роли входного сигнала, проводится непрерывное вейвлетное преобразование, имеющее следующий вид:

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \psi^* \left( \frac{t' - t}{s} \right) dt', \quad (1.12)$$

где  $\psi(\eta) = \pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$  – базисный вейвлет Морле (звездочкой обозначено комплексное сопряжение),  $s$  – временной масштаб.

Затем вводится мгновенное распределение энергии по временным масштабам  $E(s, t) = |W(s, t)|^2$  (см. рисунок 1.10б). Наконец, проводится расчет суммарной энергии вейвлетного спектра  $\omega(t) = \int_S E(s, t) ds$ , приходящейся на выбранный диапазон характерных временных масштабов  $s \in S = (s_1, s_2)$  (см. рисунок 1.10в). Это позволяет выделить ламинарные и турбулентные фазы поведения систем при рассмотрении распределения энергии вейвлетного спектра по характерным временным масштабам.

Существует несколько способов решения задачи об автоматическом определении диапазона характерных временных масштабов. Первый метод – определить среднее значение энергии вейвлетного спектра и значение временного масштаба, соответствующее ему, при этом следует взять небольшое отклонение от полученного значения (около 10% от амплитуды входных данных). Второй подход заключается в определении границ диапазона, которые соответствуют минимальному и максимальному временному масштаба, при котором энергия вейвлетного спектра больше среднего значения. Третий способ – это исключение из рассмотрения всех временных масштабов, для которых энергия вейвлетного спектра меньше среднего значения.

Результаты численного моделирования показали, что в отсутствие шума получаемые зависимости имеют незначительные отклонения друг от друга. Однако, при добавлении аддитивного белого шума к анализируемому сигналу при увеличении его амплитуды первые два способа

перестают давать адекватную оценку, поскольку диапазон временных масштабов сильно расширяется, а временной масштаб, соответствующий средней энергии вейвлетного спектра увеличивается. В связи с этим, наиболее предпочтительным является третий подход, который больше всего близок к идеальному выбору диапазона. Именно данный подход и был использован далее при исследовании перемежаемости. Для дальнейшего улучшения полученных результатов необходима уже разработка иных подходов либо использование ручного способа определения диапазона, что не всегда возможно.

На рисунке 1.11 представлены основные характеристики перемежаемости, полученные с помощью метода вспомогательной системы и непрерывного вейвлетного преобразования. Видно, что более сглаженная по сравнению с исходными данными временная зависимость модуля вейвлетной поверхности позволила рассчитать характеристики перемежаемости с большей точностью, что выражается в их меньшем отклонении от теоретических значений.

Кроме распределений длительностей ламинарных фаз (см. рисунок 1.11а) также были рассмотрены зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (см. рисунок 1.11б). Данные зависимости хорошо аппроксимируются степенной функцией (1.5) с показателем  $-1$ , что, как отмечалось в предыдущих разделах, соответствует перемежаемости типа on-off.

Также было проведено исследование влияния аддитивного белого шума на точность определяемых статистических характеристик перемежаемости. На рисунке 1.12 представлена зависимость относительного отклонения

$$\varphi_a = \frac{|3/2 - a|}{3/2} \quad (1.13)$$

показателя степенной функции (1.7) для распределения длительностей ламинарных фаз от отношения амплитуды белого шума к амплитуде

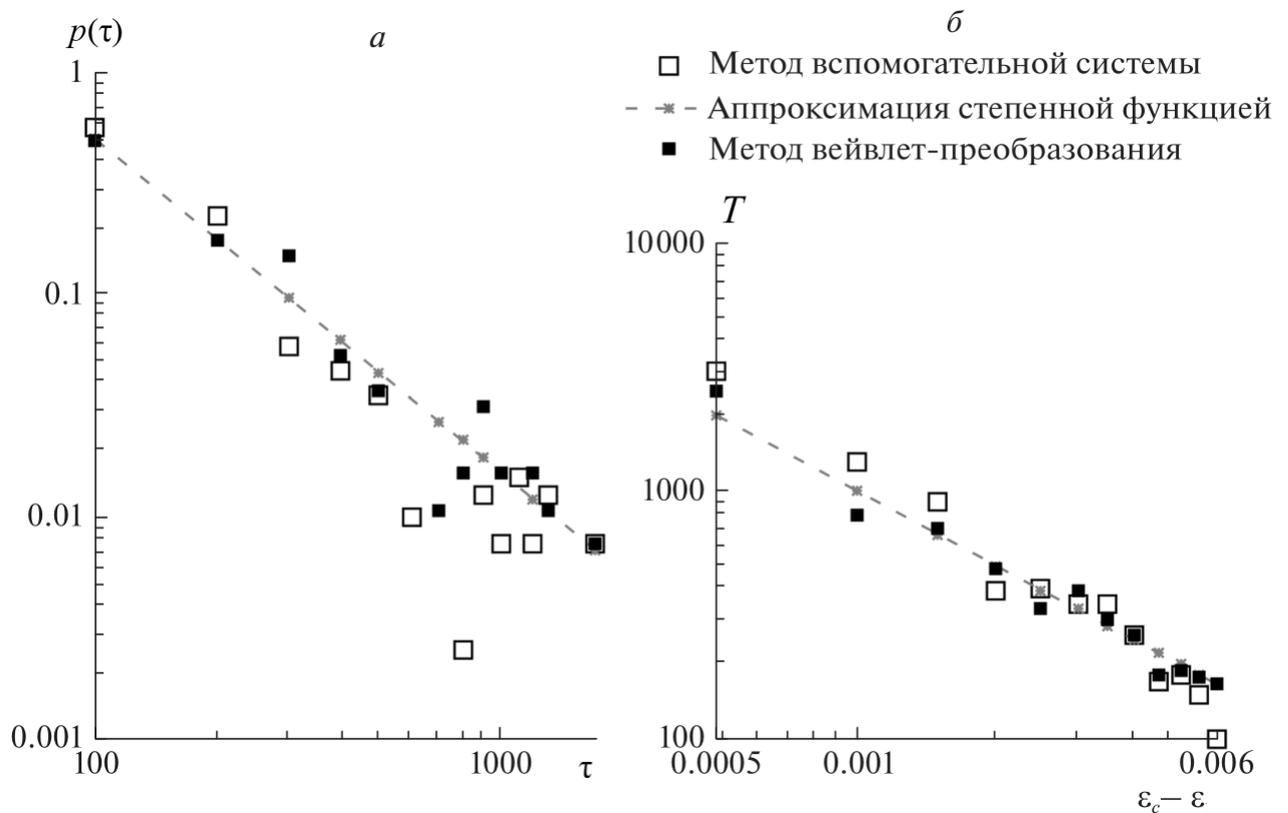


Рисунок 1.11 — (а) Распределения длительностей ламинарных фаз  $p(\tau)$  в двойном логарифмическом масштабе, полученные для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3), (1.6),  $\varepsilon = 0.106$  при помощи метода вспомогательной системы и с использованием непрерывного вейвлет-преобразования, и их аппроксимации степенной функцией (1.4). (б) Зависимости средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon$  для обоих методов и их аппроксимации степенной функцией (1.5) с показателем  $-1$ . Аппроксимации были построены для длительностей ламинарных фаз, полученных при помощи вейвлетного преобразования

входного сигнала  $\theta$  при использовании вейвлетного преобразования и метода вспомогательной системы. Указанный шум был добавлен к разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем, поскольку при добавлении шума в сами уравнения результат не оказал влияния на полученные характеристики.

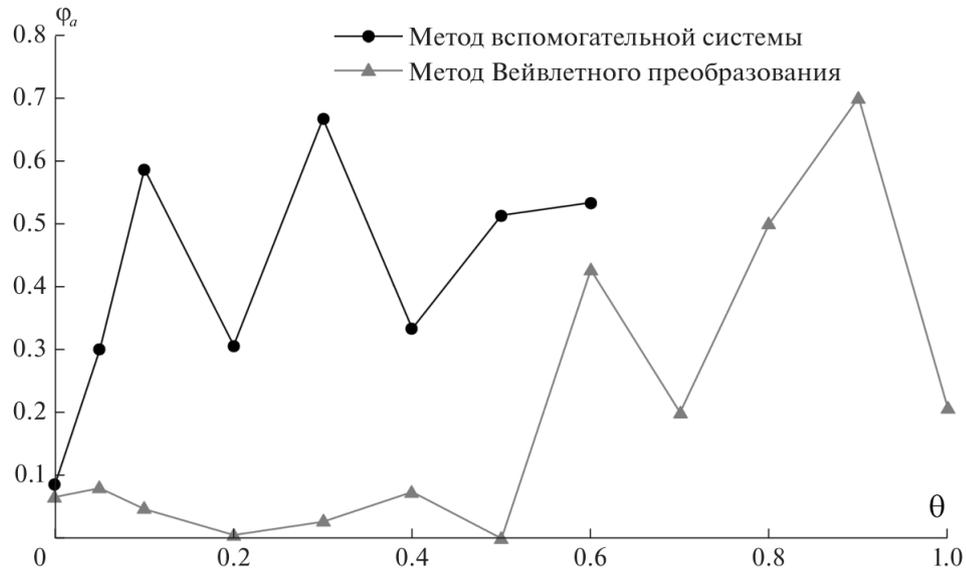


Рисунок 1.12 — График зависимости относительного отклонения  $\varphi_a$  рассчитанного показателя степенной функции (1.7), аппроксимирующей распределение длительностей ламинарных фаз, от отношения амплитуды белого шума к амплитуде входного сигнала  $\theta$  при диапазоне характерных временных масштабов  $s \in (5.0, 7.0)$

Стоит отметить, что флуктуации на графиках относительных отклонений связаны с рассмотрением одних и тех же начальных условий при различных величинах белого шума. Для их сглаживания потребовалось бы использование множества начальных условий и усреднение результата, полученного для каждого из них. Тем не менее, результат расчета позволяет установить некоторые качественные особенности, которые с достаточной уверенностью будут справедливы для любых начальных условий.

Так, полученные графики относительных отклонений позволяют сделать вывод, что обычный метод вспомогательной системы не позволяет дать адекватную оценку характеристик перемежаемости уже при величине  $\theta = 0.05$ . В это же время, вейвлетное преобразование обеспечивает хорошую устойчивость к шумовым помехам [95]. Так, относительное отклонение не превышает 10% в случае, когда амплитуда полезного сигнала оказывается хотя бы вдвое больше, чем амплитуда аддитивного шума. С дальнейшим увеличением амплитуды шума указанный метод также перестает давать адекватную оценку характеристикам перемежаемости. В связи с этим, для решения данной проблемы требуется разработка уже других, более совершенных методов выделения полезного сигнала на фоне шума.

## **1.5 Выводы по главе 1**

Таким образом, в первой главе диссертационной работы рассмотрены методы диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с различной топологией аттрактора. Показана возможность применения метода вспомогательной системы для определения типа перемежаемости в случае однонаправленной связи при помощи расчета ее основных статистических характеристик, таких как распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Полученные характеристики для однонаправленно связанных систем Ресслера и однонаправленно связанных систем Лоренца полностью соответствуют перемежаемости типа on-off и типа перескоков, соответственно, а также хорошо согласуются с результатами других работ, что подтверждает корректность полученных результатов. Отклонение рассчитанных характеристик перемежаемости

от теоретических зависимостей не превышает 4% и 11% для распределений и средней длительности, соответственно.

На примере однонаправленно связанных систем Ресслера показана возможность применения непрерывного вейвлетного преобразования для изучения характеристик перемежаемости на границе обобщенной синхронизации. Установлено, что при добавлении аддитивного белого шума к разности состояний между ведомой и вспомогательной системами применение метода вейвлетного преобразования позволяет существенно увеличить точность оценки статистических характеристик перемежаемости при том условии, что амплитуда шума не превышает половину средней амплитуды исходного сигнала. Разработанный подход на основе применения метода вейвлетного преобразования может быть использован для анализа взаимодействия однонаправленно связанных хаотических систем в присутствии шума.

## Глава 2

### **Универсальный метод исследования перемежающейся обобщенной синхронизации с помощью локальных показателей Ляпунова**

**[53–56, 63, 69, 74, 77]**

В настоящей главе диссертационной работы приводится описание разработанного подхода, основанного на расчете локальных показателей Ляпунова [53, 97, 98], для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации независимо от типа связи и сложности топологии аттрактора. Далее описываются особенности применения указанного метода для изучения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации [45, 48] в случае однонаправленно связанных систем Ресслера [14, 37, 46, 48] и однонаправленно связанных систем Лоренца [44, 92]. Производится сравнение результатов нового подхода с результатами, полученными с помощью метода вспомогательной системы, описанными в главе 1. Далее проводится апробация разработанного метода выделения синхронных (ламинарных) и асинхронных (турбулентных) фаз с помощью расчета локальных показателей Ляпунова в случае взаимной связи для систем Ресслера и для систем Лоренца. Наконец, приводятся результаты исследования влияния аддитивного шума на определение статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации двух систем Лоренца в случае однонаправленной и взаимной связи при помощи разработанного подхода.

## 2.1 Метод выделения синхронных участков, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова

Для исследования перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации потребовалась разработка универсального метода, который не зависел бы ни от типа связи, ни от относительной сложности топологии аттракторов взаимодействующих систем. В связи с этим внимание было сосредоточено на разработке метода, основанного на расчете локальных показателей Ляпунова [53, 97, 98]. Как отмечалось в главе 1, традиционный метод расчета спектра показателей Ляпунова используется для исследования динамики взаимодействующих систем в целом при изменении параметра связи между ними. Однако, имеется возможность получить оценку показателей Ляпунова на ограниченных интервалах времени для исследования временной динамики взаимодействующих систем и, как следствие, использовать ее для оценки характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации.

Определение локальных показателей Ляпунова [97, 98] отличается от определения обычных показателей тем, что в данном случае время накопления  $\Theta_{acc}$  показателей не равно всему времени наблюдения, а равно некоторой константе  $\Theta$ , которая может быть на несколько порядков меньше времени наблюдения. Тогда, для расчета показателей Ляпунова в момент времени  $t$  учитываются только мгновенные значения, полученные при помощи алгоритма Бенеттина, Галгани, Георгилли и др. [99] с ортогонализацией Грама-Шмидта, находящиеся в интервале  $t \in [t - \Theta, t]$ . То есть, значения, не попавшие в указанный временной интервал, отбрасываются. При таком подходе любому моменту  $t$  будет соответствовать некоторый спектр значений локальных показателей Ляпунова, что и позволяет оценить временную динамику взаимодействующих систем.

Стоит отметить, что способность оценить характеристики перемежаемости при помощи расчета локальных показателей Ляпунова зависит от выбранных значений параметров метода, в том числе, от интервала накопления. Так, при очень малой величине  $\Theta$  (меньше порядка периода собственных колебаний системы) будут наблюдаться сильные осцилляции локальных показателей возле некоторых постоянных значений, зависящих от аттракторов рассматриваемых систем. Если же увеличивать величину  $\Theta$ , то начиная с некоторого значения временные зависимости показателей будут слишком сильно сглажены. В пределе, если устремить величину  $\Theta$  к времени наблюдения, то получится обычный спектр показателей Ляпунова.

В любом из описанных выше случаев определение характеристик перемежаемости оказывается невозможным, поэтому на практике величина  $\Theta$  подбирается достаточно крупной, чтобы снизить лишние осцилляции, но достаточно мелкой, чтобы не потерять информацию, соответствующую локальной динамике. В итоге интервал допустимых значений  $\Theta$  оказывается достаточно широким, но ограниченным, и для каждой конкретной системы он должен подбираться индивидуально.

Для выделения характерных фаз поведения связанных систем, как и в случае метода вспомогательной системы, вводится некоторый постоянный порог разделения ламинарных (синхронных) и турбулентных (асинхронных фаз)  $\Delta \geq 0$ . Поскольку режим обобщенной синхронизации для хаотических систем характеризуется переходом второго (для однонаправленной связи – старшего условного) показателя Ляпунова в область отрицательных значений, то следует рассматривать временную динамику соответствующего локального показателя Ляпунова  $\Lambda_2^t$ . Когда его значение превышает величину порога  $\Delta$ , в системе наблюдается асинхронный режим. И, напротив, когда величина  $\Lambda_2^t$  оказывается меньше или равной  $\Delta$ , тогда в исследуемой системе возникает режим обоб-

щенной синхронизации. В идеальном случае, когда отсутствуют ошибки, обусловленные конечностью выбранного интервала накопления  $\Theta_{acc}$ , значение  $\Delta = 0$  (как при использовании достаточно длительной величины  $\Theta_{acc}$  равной времени наблюдения). В противном случае, использование малой величины  $\Delta$  позволяет добиться более точных результатов при выделении характерной фазы поведения, поскольку оцененные значения нулевых локальных показателей колеблются с небольшой амплитудой.

Стоит также отметить, что при расчете спектра локальных показателей Ляпунова оценка критического значения параметра связи оказывается немного заниженной, что следует учитывать при определении характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации. В то же самое время, в случае однонаправленной связи значения старшего условного показателя Ляпунова для каждого момента времени можно сопоставить с разностью состояний ведомой и вспомогательной систем, полученной при помощи метода вспомогательной системы (см. главу 1), что позволяет подобрать оптимальные значения параметров  $\Theta$  и  $\Delta$  для анализа перемежаемости при помощи расчета локальных показателей Ляпунова. Если не менять значения управляющих параметров, то эти же значения параметров  $\Theta$  и  $\Delta$  можно использовать и в случае взаимной связи.

## **2.2 Выделение участков синхронной динамики с помощью локальных показателей Ляпунова в случае однонаправленной связи**

В первой главе было рассмотрено применение классического метода вспомогательной системы для оценки основных статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации в случае однонаправленной связи. Теперь в данном разделе будет рассмотрено приме-

нение разработанного подхода на основе оценки локальных показателей Ляпунова к тем же системам с целью получения более универсального метода, который можно было бы впоследствии применить также и для случая взаимной связи.

### **2.2.1 Выделение участков синхронной динамики с помощью локальных показателей Ляпунова для однонаправленно связанных систем Ресслера**

Для апробации разработанного подхода в качестве примера были взяты хорошо изученные однонаправленно связанные системы Ресслера, рассмотренные в главе 1 и описываемые системой уравнений (1.3) [46, 48]. Поскольку расчет спектра показателей Ляпунова показал, что критическое значение параметра связи  $\varepsilon_c \approx 0.11$ , то для исследования был выбран диапазон значений, верхний предел которого немного меньше критического:  $\varepsilon \in [0.096, 0.109]$ . Интервалу накопления  $\Theta$  было установлено значение 3500, поскольку при этом достигается оптимальный баланс между разрешающей способностью временных рядов и точностью оценки величины локальных показателей Ляпунова. Хотя, стоит отметить, что имеется достаточно широкий диапазон значений интервала накопления  $\Theta$ , при которых оценка показателей претерпевает количественные, но не качественные изменения.

Сначала были получены временные ряды для исследования – временные зависимости второго (старшего условного) локального показателя Ляпунова для различных значений параметра связи. На рисунке 2.1а приведен график такого временного ряда при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.109$ . Кроме него на рисунке 2.1б представлена временная зависимость модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем Ресслера, полученная при том же значении параметра связи и тех же самых начальных условиях.

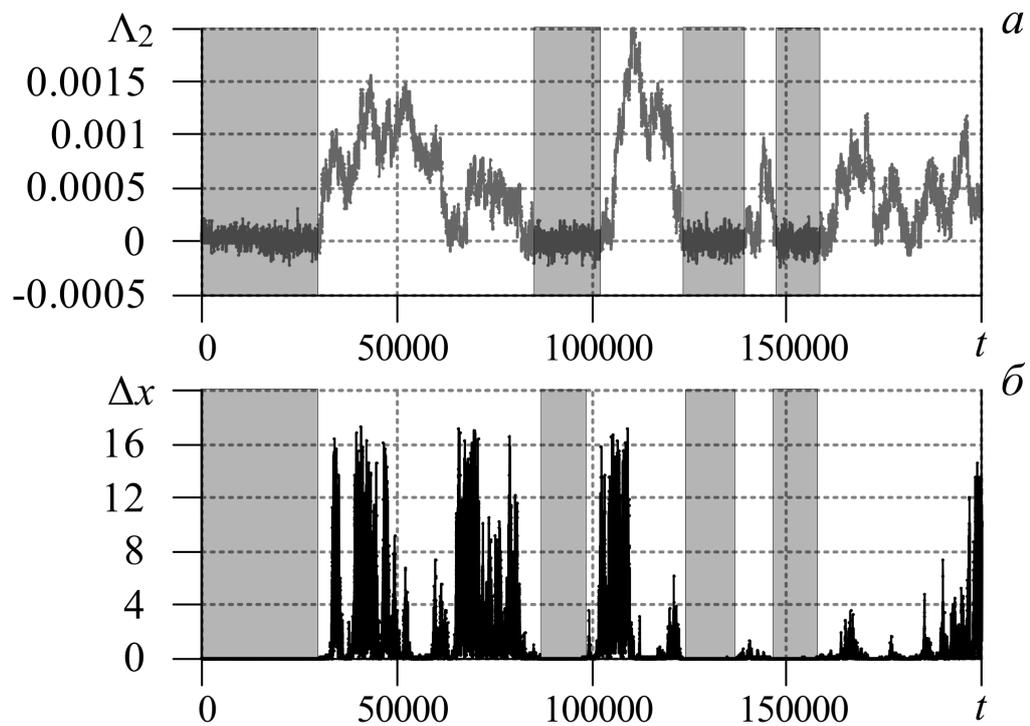


Рисунок 2.1 — Временная зависимость старшего условного локального показателя Ляпунова  $\Lambda_2$ , полученная для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.109$  (а) и временная динамика модуля разности между  $x$ -координатами ведомой и вспомогательной систем  $\Delta x$  (б) при том же значении параметра связи. Области, соответствующие ламинарным фазам поведения, отмечены серыми прямоугольниками

Как видно на рисунке 2.1, обе временные зависимости отражают перемежающийся характер установившегося режима: наблюдаются как интервалы синхронной динамики, где  $\Lambda_2 < \Delta$ , так и интервалы турбулентных (асинхронных) всплесков. В моменты времени, соответствующие турбулентным фазам поведения, и разность состояний ведомой и вспомогательной систем, и величина локального показателя Ляпунова оказываются положительными, в то время как во время ламинарных фаз разность состояний ведомой и вспомогательной систем оказывается близкой к нулю, а локальный показатель Ляпунова – близким к нулю,

либо отрицательным. Такое соответствие между поведением ведомой и вспомогательной систем и локальными показателями Ляпунова говорит о возможности применения обоих методов для определения статистических характеристик длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации.

Далее для выделенных при помощи расчета локальных показателей Ляпунова участков синхронной динамики были рассчитаны распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи (см. рисунок 2.2).

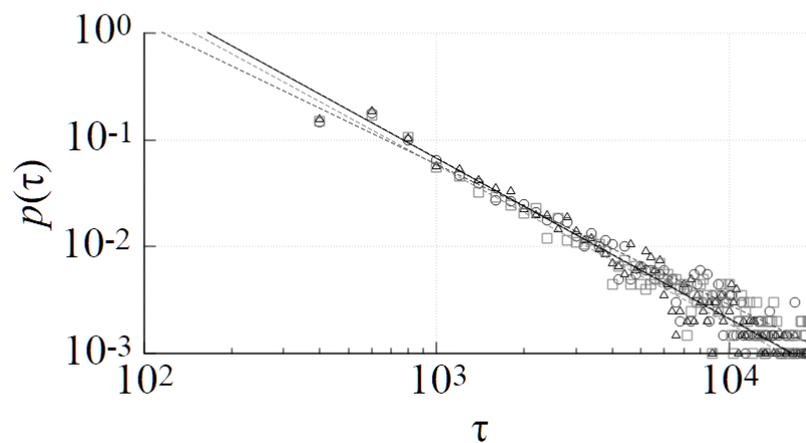


Рисунок 2.2 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз, полученных при помощи расчета локальных показателей Ляпунова, в двойном логарифмическом масштабе в случае однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3) при значениях параметра связи  $\varepsilon = 0.1075$  (треугольники),  $\varepsilon = 0.1085$  (кружки) и  $\varepsilon = 0.1095$  (квадраты). Сплошная линия соответствует теоретической степенной функции (1.4) с показателем  $-3/2$ . Пунктирные линии соответствуют аппроксимациям степенным законом (1.7) численных данных при помощи метода наименьших квадратов

На рисунке 2.2 видно, что наблюдается хорошее соответствие между теоретической степенной функцией (1.4) с показателем  $-3/2$  и степен-

ными функциями, аппроксимирующими рассчитанные распределения, что подтверждает корректность полученных результатов. Это также показывает, что разработанный метод на основе расчета локальных показателей Ляпунова можно использовать для классификации типа перемежаемости по распределению длительностей ламинарных фаз.

Результат аппроксимации полученных распределений степенной функцией (1.7) при помощи метода наименьших квадратов представлен в таблице 2.1. Относительное отклонение оцененных значений

Таблица 2.1 — Аппроксимация распределений длительностей ламинарных фаз, полученных для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3) методом расчета локальных показателей Ляпунова, степенным законом вида (1.7) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$

Параметр аппроксимирующей функции $f(x)$	Параметр связи $\varepsilon$		
	0.1075	0.1085	0.1095
$a$	-1.403	-1.417	-1.447
$b$	$\exp(6.94)$	$\exp(7.01)$	$\exp(7.12)$

показателя степенной функции от теоретической функции (1.4) с показателем  $-3/2$  для значений параметра связи 0.1075, 0.1085 и 0.1095 составило 6.41%, 5.52% и 3.56%, что является вполне небольшим. Для сравнения, метод вспомогательной системы в среднем продемонстрировал немного более лучшую точность с пониженным на 2.84% относительным отклонением.

Наконец, была получена зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (см. рисунок 2.3). Из рисунка 2.3 следует, что, как и в случае распределения длительностей ламинарных фаз, теоретическая кривая хорошо согласуется с полученными численными данными. Аппроксимация степенной функцией (1.7) при помощи метода наименьших квадратов показала, что  $a \approx -1.06225$ ,  $b \approx 15.5158$ . Видно, что параметр  $a$  достаточно близок к теоретическому значению

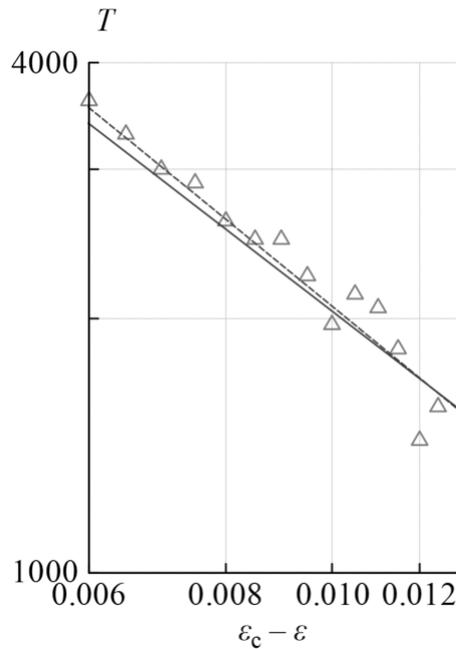


Рисунок 2.3 — Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon$ , полученная для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3). Треугольники соответствуют численно полученным результатам, сплошная линия — теоретической степенной функции (1.5) с показателем  $-1$ , пунктирная линия — степенной функции (1.7), аппроксимирующей численные данные при помощи метода наименьших квадратов

$-1$ , что подтверждает корректность полученных результатов и разработанного подхода на основе оценки локальных показателей Ляпунова.

Если сравнить полученные данные с результатами, полученными с помощью метода вспомогательной системы, то можно заметить, что оценка средней длительности ламинарных фаз оказалась немного точнее при использовании разработанного подхода по сравнению с классическим методом, в то время как оценка распределений длительностей оказалась немного менее точной. Также, метод, основанный на использовании локальных показателей, в среднем немного занижил оценку (по модулю) показателя степенной функции распределений, в то время как

подход, использующий метод вспомогательной системы, ее, напротив, немного зависил. Тем не менее, оба метода показали достаточно высокую точность определяемых характеристик.

Таким образом, разработанный метод, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова, может быть успешно применен при анализе связанных систем с относительно простой топологией аттрактора в случае однонаправленной связи. Также, как и метод вспомогательной системы, он позволяет достаточно точно вычислить статистические характеристики перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации и определить ее тип. При этом, метод вспомогательной системы в среднем дает более точный результат по сравнению с разработанным подходом и оказывается более простым в реализации. Метод, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова, оказывается более громоздким и требует больше ресурсов по сравнению с выделением ламинарных фаз с помощью метода вспомогательной системы. К тому же, он является менее наглядным и, как отмечалось выше, дает большее отклонение от теоретических предсказаний. В то же самое время, как будет показано в разделе 2.3, у нового метода есть одно крупное преимущество: он может быть легко обобщен на случай взаимной связи между системами, а использовать метод вспомогательной системы в этом случае нельзя в принципе [80].

### **2.2.2 Выделение синхронных участков поведения с помощью локальных показателей Ляпунова для однонаправленно связанных систем Лоренца**

Далее была исследована возможность применения разработанного подхода на основе расчета локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах с аттракторами с отно-

сительно сложной топологией. Для исследования были взяты две однонаправленно связанные системы Лоренца, описываемых системой уравнений (1.8) [44, 92].

Сперва по аналогии с системами Ресслера были рассчитаны локальные показатели Ляпунова при фиксированных значениях параметра связи. Величина времени накопления была установлена равной  $\Theta_{acc} = 400$ . В отличие от систем Ресслера в данном случае время накопления было задано меньшим. Такое повышение разрешающей способности стало возможным благодаря тому, что при рассмотрении систем Лоренца наблюдаются достаточно короткие ярко выраженные турбулентные всплески, в то время как при рассмотрении систем Ресслера они более плавные и протяженные. Такая особенность перемежаемости в системах Лоренца позволяет выделить характерные фазы поведения с большей легкостью и, соответственно, определить их длительность.

На рисунке 2.4а приведены временные зависимости второго и третьего показателей Ляпунова при величине параметра связи  $\varepsilon = 9.9^1$ . Величина порога разделения ламинарных и турбулентных фаз была установлена  $\Delta = 0.01$ . Из рисунка видно, что имеет место явление перемежаемости, когда в различные моменты времени наблюдается либо фаза синхронизации ( $\Lambda_2 \leq \Delta$ ), либо асинхронные колебания ( $\Lambda_2 > \Delta$ ).

Также на рисунке 2.4б приведена временная зависимость модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем, полученная при том же значении параметра связи, что и для локальных показателей Ляпунова. Если сопоставить оба графика между собой, то можно увидеть незначительные расхождения между турбулентными и ламинарными фазами. Причина такого расхождения заключается в том, что метод локальных показателей работает более “тонко”, реагируя на малей-

---

<sup>1</sup>Третий показатель Ляпунова в связанных системах должен быть равен нулю и оставаться практически постоянным. Он приведен на рисунке 2.4а и последующих аналогичных рисунках для подтверждения корректности расчета спектра локальных показателей Ляпунова.

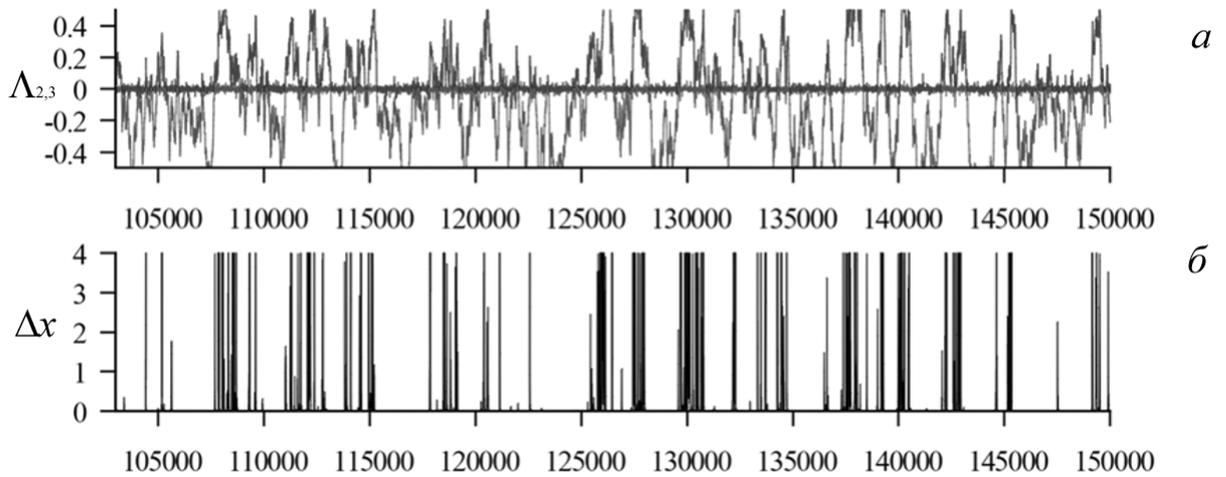


Рисунок 2.4 — Временные зависимости второго и третьего старших локальных показателей Ляпунова (*а*) и модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем (*б*), полученные для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8) при значении параметра связи  $\varepsilon = 9.9$

шее изменение состояния исследуемой системы. Если сильно уменьшить масштаб для метода вспомогательной системы и рассматривать модуль разности порядка  $10^{-8}$  или еще меньше, то графики станут больше соответствовать друг другу. Тем не менее, такая особенность не повлияет качественным образом на определяемые значения статистических характеристик перемежаемости.

Далее на основе полученных временных зависимостей локальных показателей Ляпунова были рассчитаны основные статистические характеристики перемежаемости. Сперва были получены распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи (см. рисунок 2.5).

Результат аппроксимации полученных данных экспоненциальными законами вида (1.9) представлен в таблице 2.2. Видно, что полученные распределения полностью соответствуют перемежаемости перескоков, описываемой экспоненциальными закономерностями. Причем, рас-

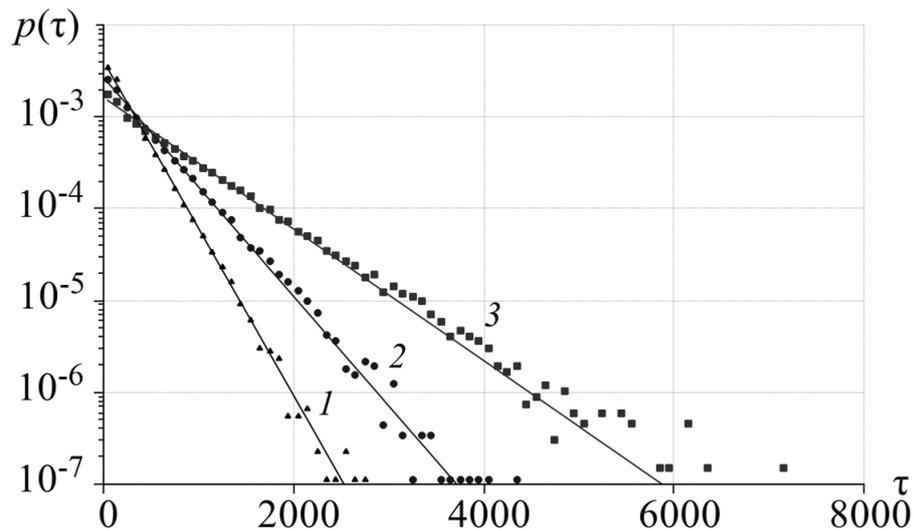


Рисунок 2.5 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8) при значениях параметра связи  $\varepsilon = 9.6, 9.9$  и  $10.2$  (цифры 1, 2 и 3, соответственно). Точки соответствуют распределениям, полученным с помощью расчета спектра локальных показателей Ляпунова, линии – экспоненциальным законам (1.9)

пределение длительностей ламинарных фаз при конкретном значении параметра связи  $\varepsilon$  зависит от величины средней длительности ламинарных фаз  $T$ , соответствующей тому же значению  $\varepsilon$ .

Если сопоставить результаты, полученные текущим методом с результатами, полученными с помощью метода вспомогательной системы, то можно заметить, что между ними наблюдаются количественные отличия, но не качественные. Это подтверждает корректность данных, полученных с применением разработанного подхода на основе расчета локальных показателей Ляпунова.

Наконец, была рассчитана зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  (см. рисунок 2.6). Рассчитанные данные хорошо аппроксимируются теоретической экспоненциальной функцией, соответствующей перемежаемости типа перескоков. Оцен-

Таблица 2.2 — Аппроксимация распределений длительностей ламинарных фаз, полученных для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8) методом расчета локальных показателей Ляпунова, экспоненциальной функцией вида (1.9) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$

	Параметр связи $\varepsilon$		
Параметр аппроксимирующей функции $f(x)$	9.6	9.9	10.2
$T$	244.205	369.4	619.42

ка параметров аппроксимирующей функции (1.11) после применения метода наименьших квадратов следующая:  $a \approx 5.68722$ ,  $b \approx 0.23667$ ,  $d \approx 0.355329$ .

Таким образом, было установлено, что разработанный метод выделения ламинарных (синхронных) фаз с помощью расчета локальных показателей Ляпунова может быть успешно применен для анализа перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах с относительно сложной топологией аттрактора. Стоит отметить, что точность определяемых характеристик в случае рассмотрения систем Лоренца оказалась заметно выше, чем в случае аналогичного анализа систем Ресслера с более простой топологией. В первую очередь, это связано с тем, что длительность турбулентных фаз значительно больше в последнем случае. Вследствие этого, методы выделения характерных фаз поведения по спектру локальных показателей оказываются более точными, поскольку исследуемая величина позволяет с большей легкостью разграничить участки синхронной и асинхронной динамики.

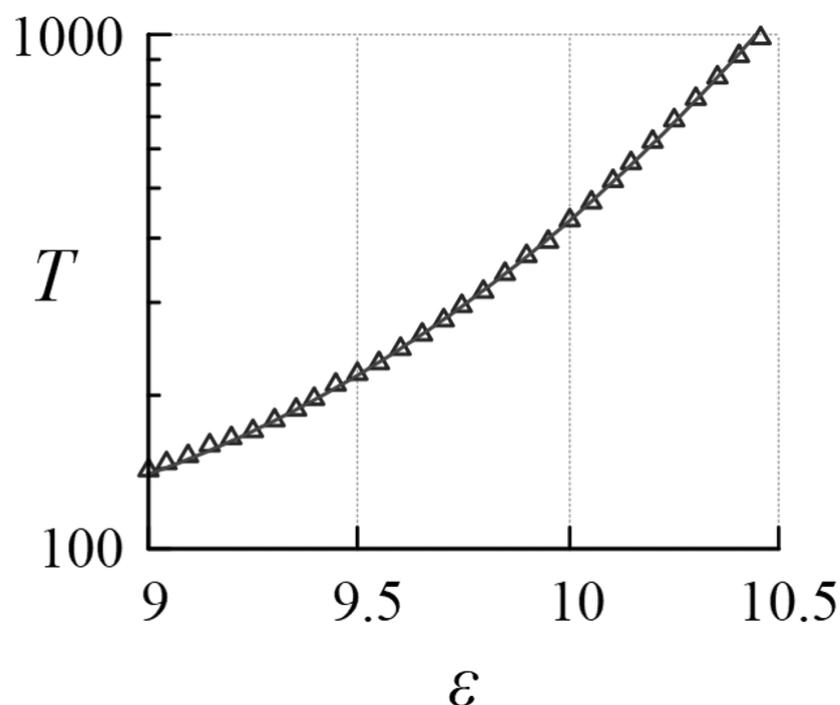


Рисунок 2.6 — Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  для однонаправленно связанных систем Лоренца (1.8). Треугольники соответствуют данным, определенным численно. Линия соответствует аппроксимации экспоненциальной функцией (1.11)

### 2.3 Перемежающаяся обобщенная синхронизация в случае взаимной связи

Как отмечалось в главе 1, изначально обобщенная синхронизация была введена в рассмотрение для взаимодействующих хаотических систем с однонаправленной связью. Позднее данное понятие было расширено и на случай взаимной связи [8], а существование данного режима было доказано при помощи метода расчета спектра показателей Ляпунова и метода ближайших соседей. Логично предположить, что вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи должно наблюдаться перемежающееся поведение по аналогии со случаем однонаправленной связи. Однако, существование этого режима доказано не

было из-за неработоспособности метода вспомогательной системы в данном случае [80].

Закономерно возникла потребность в разработке подхода, способного подтвердить (или опровергнуть) существование перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в случае взаимной связи между системами и исследовать статистические характеристики данного режима. Для решения указанного вопроса был разработан метод расчета локальных показателей Ляпунова, описанный в предыдущих разделах этой главы. Поскольку данный метод не имеет ограничений по характеру связи взаимодействующих систем (в отличие от метода, основанного на использовании вспомогательной системы) и был успешно опробован в случае однонаправленной связи, то можно ожидать, что результаты его применения в случае взаимной связи также будут успешными, что позволят определить тип перемежаемости в данном случае.

### **2.3.1 Выделение ламинарных фаз с помощью локальных показателей Ляпунова для взаимно связанных систем Ресслера**

Для исследования возможности применения разработанного подхода в случае взаимной связи были взяты две взаимно связанные системы Ресслера, описываемые системой уравнений [8, 46]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= b + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10.0$ ,  $\omega_1 = 0.99$ ,  $\omega_2 = 0.95$  – управляющие параметры,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  – производные по безразмерному времени,  $\varepsilon$  – параметр связи. Цифры 1 и 2 соответствуют индексам первой и второй взаимодействующих систем, соответственно. При выбранных значениях

управляющих параметров режим обобщенной синхронизации, диагностируемый по моменту перехода второго показателя Ляпунова в область отрицательных значений, возникает при  $\varepsilon_c \approx 0.116$  (рисунок 2.7).

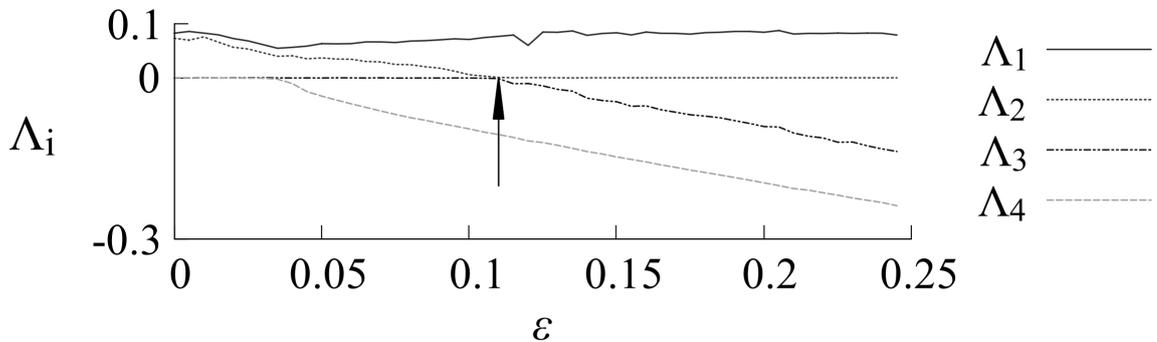


Рисунок 2.7 — Зависимости четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи для двух взаимно связанных систем Ресслера (2.1). Момент установления обобщенной синхронизации отмечен стрелкой

На рисунке 2.8 приведены временные зависимости второго и третьего локальных показателей Ляпунова, рассчитанные для системы (2.1) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.106$ . Полученные временные зависимо-

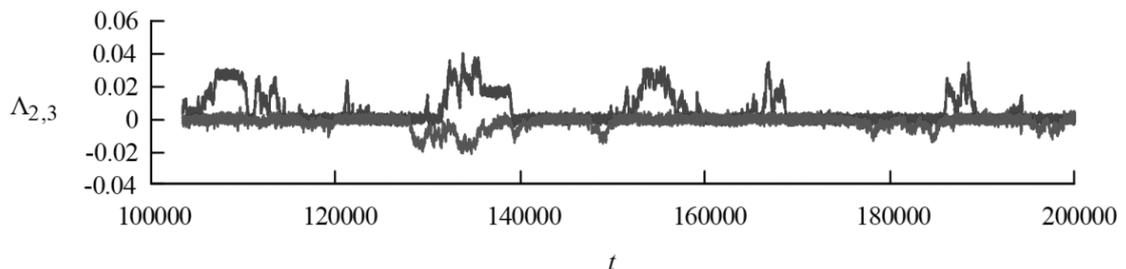


Рисунок 2.8 — Временные зависимости второго и третьего старших локальных показателей Ляпунова для взаимно связанных систем Ресслера (2.1) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.106$

сти демонстрируют поведение, качественно аналогичное случаю односторонней связи. В частности, второй локальный показатель Ляпунова  $\Lambda_2$  отражает перемежающееся поведение установившегося режима, поскольку имеются как интервалы, где  $\Lambda_2 \leq \Delta = 0.005$ , соответствующие

синхронизации, так и  $\Lambda_2 > \Delta$ , соответствующие асинхронным колебаниям.

Далее были получены временные ряды локальных показателей Ляпунова при различных значениях параметра связи. Для указанных временных рядов были рассчитаны распределения длительностей ламинарных фаз (см. рисунок 2.9).

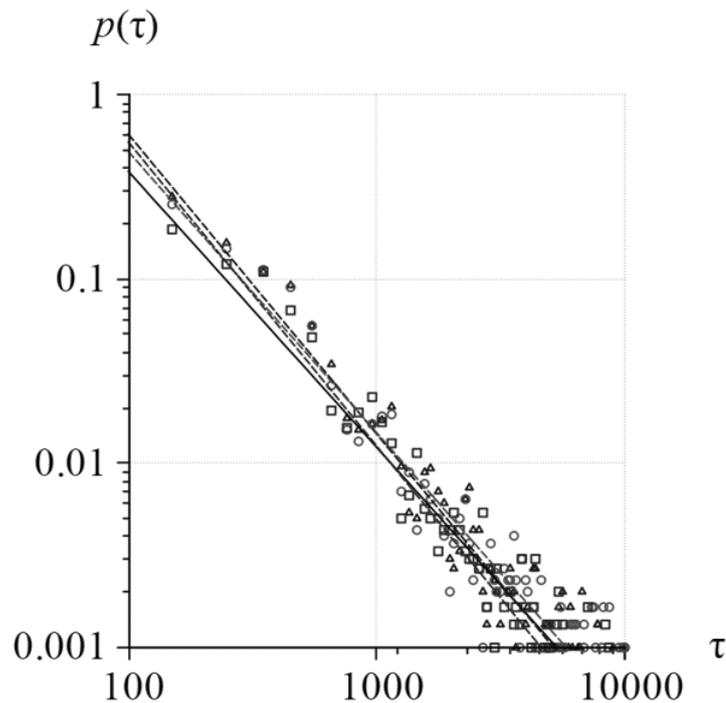


Рисунок 2.9 — Распределения длительностей ламинарных фаз в двойном логарифмическом масштабе в случае взаимно связанных систем Ресслера (2.1) при значениях параметра связи  $\varepsilon = 0.1$  (треугольники),  $\varepsilon = 0.105$  (кружки) и  $\varepsilon = 0.11$  (квадраты). Сплошная линия соответствует теоретической степенной функции (1.4) с показателем  $-3/2$ . Пунктирные линии соответствуют аппроксимациям численных данных степенным законом (1.7) при помощи метода наименьших квадратов

На рисунке 2.9 видно, что наблюдается хорошее соответствие между теоретической степенной функцией (1.4) с показателем  $-3/2$  и степенной функцией (1.7), аппроксимирующей рассчитанные значения, что

позволяет предположить, что на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах Ресслера наблюдается перемежаемость типа on-off. Это также свидетельствует о том, что разработанный подход на основе расчета локальных показателей Ляпунова можно использовать для классификации типа перемежаемости по распределению длительностей ламинарных фаз не только в случае однонаправленной связи, но и при взаимной связи. Коэффициенты аппроксимации полученных данных методом наименьших квадратов функцией вида (1.7) представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 — Аппроксимация распределений длительностей ламинарных фаз, полученных в случае взаимно связанных систем Ресслера (2.1) методом расчета локальных показателей Ляпунова, степенным законом вида (1.7) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$

Параметр аппроксимирующей функции $f(x)$	Параметр связи $\varepsilon$		
	0.1	0.105	0.11
$a$	-1.63	-1.53	-1.65
$b$	$\exp(7.0004)$	$\exp(6.32)$	$\exp(7.02)$

Относительное отклонение показателя аппроксимирующей степенной функции от теоретической не превышает 10%, а среднее отклонение составило 0.0689%, что указывает на хорошую точность оцененных распределений длительностей ламинарных фаз и, соответственно, хорошее качество полученных временных рядов при использовании разработанного подхода.

Теперь, когда рассчитанные распределения длительностей ламинарных фаз показали успешность примененного подхода, можно ожидать аналогичного результата при расчете другой статистической характеристики перемежаемости – зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Результат оценки данной характеристики представлен на рисунке 2.10. Диапазон параметра связи был

задан таким образом, чтобы число ламинарных фаз было не меньше 10000 при времени наблюдения не больше  $10^7$ .

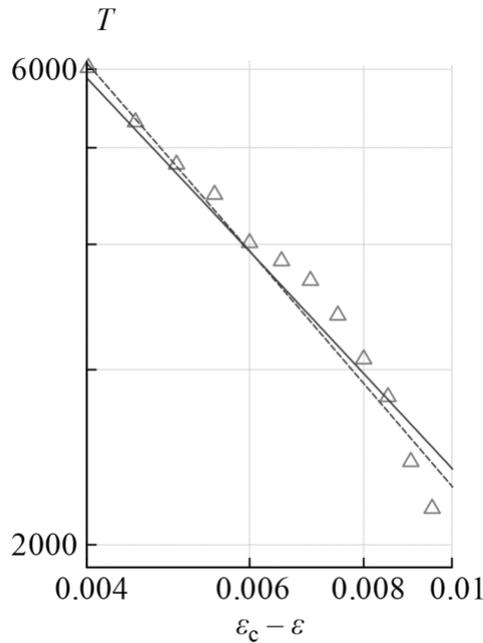


Рисунок 2.10 — Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon$  в случае взаимно связанных систем Ресслера (2.1). Треугольники соответствуют зависимости, полученной численным методом. Сплошная линия соответствует теоретической степенной функции (1.5) с показателем  $-1$ . Пунктирная линия соответствует степенной функции (1.7), аппроксимирующей численные данные при помощи метода наименьших квадратов

Из рисунка 2.10 следует, что теоретическая степенная кривая (1.5) с показателем  $-1$ , характерная для перемежаемости типа on-off, хорошо согласуется с данными, полученными численным путем. Также кривая степенной функции вида (1.7), аппроксимирующей численные данные при помощи метода наименьших квадратов, практически совпадает с теоретической. Были получены следующие значения параметров аппроксимирующей функции:  $a \approx -1.08451$ ,  $b \approx 15.6639$ . Видно, что параметр  $a$  достаточно близок к теоретическому значению  $-1$ , что подтверждает реализацию перемежаемости типа on-off в данном случае.

Также на графике видно, что по мере приближения величины параметра связи к критическому значению ( $\varepsilon_c - \varepsilon \in (0.004, 0.006)$ ) отклонение между теоретической кривой и полученными данными уменьшается. По мере приближения величины параметра связи к критической средняя длительность ламинарных фаз увеличивается по степенному закону, вследствие чего для сохранения точности определяемых характеристик потребовалось бы увеличить время наблюдения также по степенному закону, резко повышая требуемое время расчета и затраты машинного времени.

Таким образом, разработанный подход может быть успешно применен для анализа двух взаимодействующих хаотических систем с относительно простой топологией аттрактора в случае взаимной связи. Полученные результаты показывают, что на границе обобщенной синхронизации в данном случае имеет место перемежаемость типа on-off, как и в случае однонаправленной связи, а, следовательно, тип перемежаемости на границе обобщенной синхронизации не зависит от типа связи между системами. Аналогичные результаты были получены для двух взаимно связанных генераторов Кияшко-Пиковского-Рабиновича, также характеризующихся относительно простой топологией аттрактора [54].

### **2.3.2 Выделение ламинарных фаз с помощью локальных показателей Ляпунова для взаимно связанных систем Лоренца**

В предыдущем разделе было показано, что разработанный метод на основе расчета локальных показателей Ляпунова может быть успешно применен в случае взаимной связи при работе с системами с относительно простой топологией аттрактора, такими как системы Ресслера с аттрактором ленточного типа. Остается ответить на вопрос о возможности применения данного подхода в аналогичном случае связи для ана-

лиза систем с относительно сложной топологией аттрактора, таких как системы Лоренца с аттрактором типа “бабочка” [92].

Системы Лоренца в случае взаимной связи описываются следующей системой уравнений [8, 45, 100]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= (r_{1,2})x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= -b_{1,2}z_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\sigma = 10.0$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 8/3$ ,  $r_1 = 40$ ,  $r_2 = 35$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи. В работах [44, 45] при помощи анализа расположения изображающих точек на аттракторах взаимодействующих систем было установлено, что в данной системе на границе обобщенной синхронизации, как и в случае однонаправленной связи, наблюдается перемежаемость типа перескоков, описываемая экспоненциальными законами (1.9)–(1.11).

Для ответа на поставленный вопрос была рассчитана зависимость спектра показателей Ляпунова от параметра связи (см. рисунок 2.11). Из рисунка видно, что при значении параметра связи  $\varepsilon_c \approx 5.95$  второй старший показатель становится отрицательным, что указывает на установление режима обобщенной синхронизации. Стоит отметить, что критическое значение параметра связи оказалось примерно вдвое меньше, чем в случае однонаправленной связи, что отлично согласуется с результатами работ предшественников [101].

Далее был произведен расчет временной зависимости второго и третьего старших локальных показателей Ляпунова при различных значениях параметра связи. Значение интервала накопления было установлено равным 400, как и в случае однонаправленной связи. Результат для величины параметра связи  $\varepsilon = 5.8$  представлен на рисунке 2.12.

На рисунке 2.12 наблюдается картина, аналогичная временным рядам в случае взаимодействия двух взаимно связанных систем Ресслера.

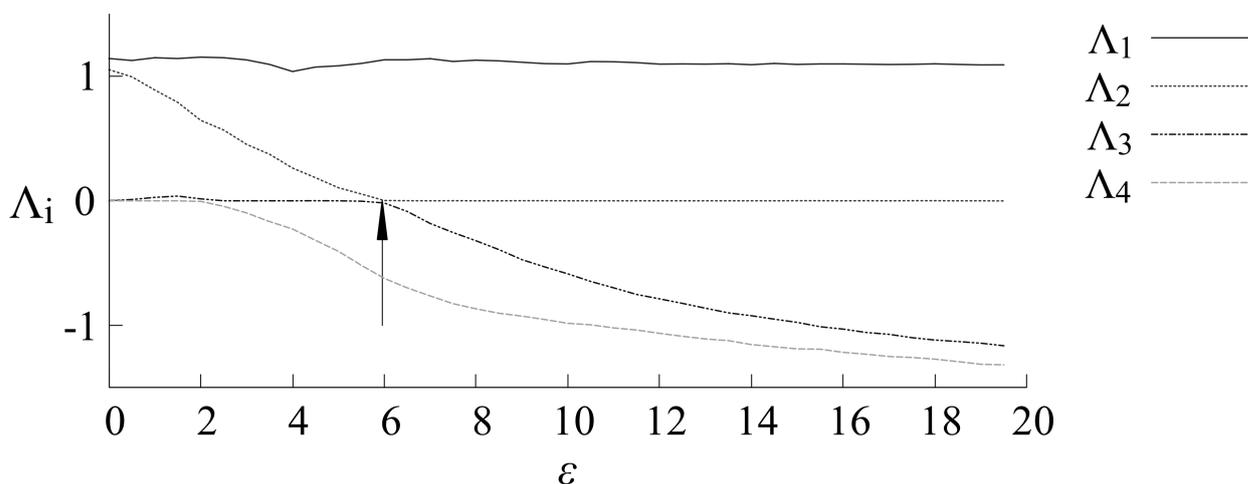


Рисунок 2.11 — Зависимость четырех старших показателей Ляпунова от параметра связи для двух взаимно связанных систем Лоренца (2.2). Стрелкой отмечена граница установления режима обобщенной синхронизации

Имеются интервалы синхронных колебаний, где второй старший показатель Ляпунова меньше или равен порогу разделения характерных фаз поведения  $\Delta = 0.01$ , чередуемые с интервалами турбулентных всплесков, где второй старший показатель больше нуля. Эта динамика полностью соответствует режиму перемежаемости.

Затем полученные временные ряды были использованы для определения основных характеристик перемежаемости. Сначала были получены распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи. Результат представлен на рисунке 2.13.

Видно, что полученные распределения полностью соответствуют перемежаемости типа перескоков, описываемой экспоненциальными закономерностями. Причем, распределение длительностей ламинарных фаз зависит от величины средней длительности ламинарных фаз, взятой при том же фиксированном значении параметра связи. Результат аппроксимации полученных данных экспоненциальными законами вида (1.9) представлен в таблице 2.3.

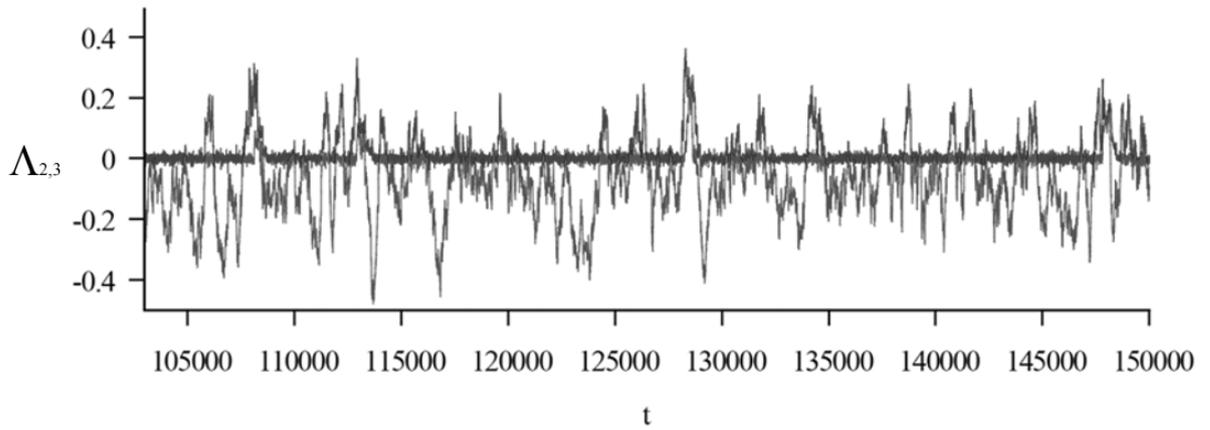


Рисунок 2.12 — Временные зависимости второго и третьего старших локальных показателей Ляпунова для двух взаимно связанных систем Лоренца (2.2) при значении параметра связи  $\varepsilon = 5.8$

Таблица 2.4 — Аппроксимация распределений длительностей ламинарных фаз, полученных методом расчета локальных показателей Ляпунова для двух взаимосвязанных систем Лоренца (2.2), экспоненциальной функцией вида (1.9) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$

Параметр аппроксимирующей функции $f(x)$	Параметр связи $\varepsilon$			
	5.6	5.7	5.8	5.9
$T$	222.74	358.09	685.745	1573.395

Наконец, была получена зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  (см. рисунок 2.14). Видно, что наблюдается хорошее соответствие теоретической экспоненциальной функции и рассчитанных данных. Оценка параметров аппроксимирующей функции (1.11) после применения метода наименьших квадратов следующая:  $a \approx 21.2997$ ,  $b \approx 0.643285$ ,  $d \approx 0.0297655$ .

Стоит также отметить, что если сопоставить полученный график зависимости  $T(\varepsilon)$  и оцененные значения  $T$  для рассчитанных распределений, то можно будет легко увидеть, что они полностью соответствуют друг другу. Это в очередной раз подтверждает корректность полученных данных и используемого подхода.

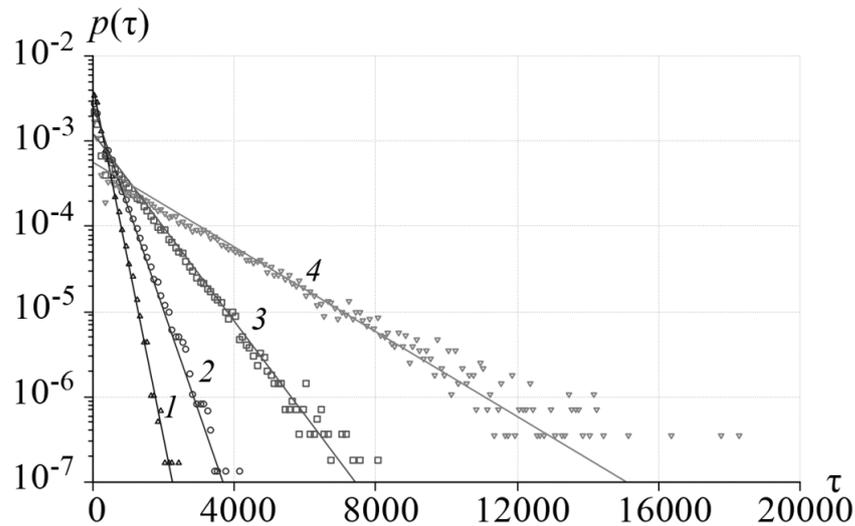


Рисунок 2.13 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз взаимно связанных систем Лоренца (2.2) при значениях параметра связи  $\varepsilon = 5.6, 5.7, 5.8$  и  $5.9$  (цифры 1, 2, 3 и 4, соответственно). Треугольники соответствуют численно полученным данным, линии — экспоненциальным законам (1.9)

Таким образом, была доказана возможность успешного применения разработанного подхода на основе расчета локальных показателей Ляпунова для анализа взаимно связанных систем Лоренца с относительно сложной топологией аттрактора. Полученные результаты также подтверждают независимость типа перемежаемости, реализуемой вблизи границы обобщенной синхронизации, от типа связи между системами в системах с различной топологией аттрактора.

## 2.4 Влияние шума на определение характеристик перемежаемости при помощи локальных показателей Ляпунова

В разделе 1.4 на примере однонаправленно связанных систем Ресслера было рассмотрено влияние аддитивного шума на распределения

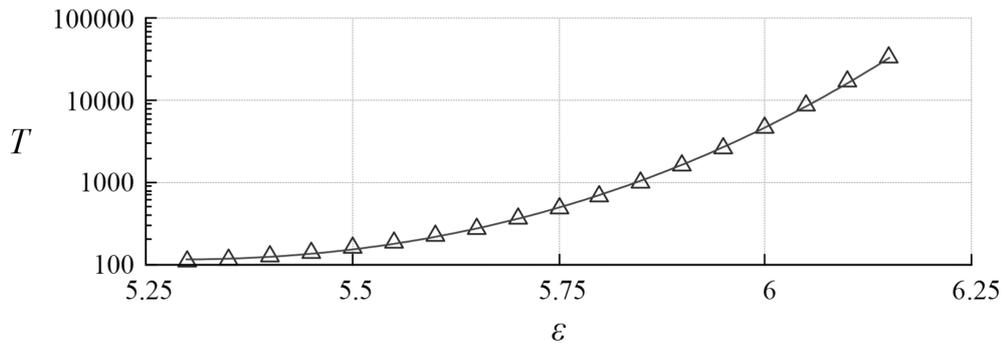


Рисунок 2.14 — Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  для взаимно связанных систем Лоренца (2.2). Треугольники соответствуют данным, определенным численно, линия — аппроксимации экспоненциальной функцией (1.11)

длительностей ламинарных фаз, выделенных с помощью метода вспомогательной системы и вейвлетного преобразования. Теперь, на примере однонаправленно и взаимно связанных систем Лоренца будет рассмотрено влияние аддитивного шума на основные статистические характеристики перемежающейся обобщенной синхронизации при использовании метода выделения ламинарных фаз с помощью расчета локальных показателей Ляпунова.

Полагая, что в случае однонаправленной связи сигнал от первой системы отправляется без помех, ограничимся при таком типе связи рассмотрением случая, когда внешний шум проявляется только во второй (ведомой) системе. Тогда, с учетом шумового воздействия, две связанные системы Лоренца будут описываться следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

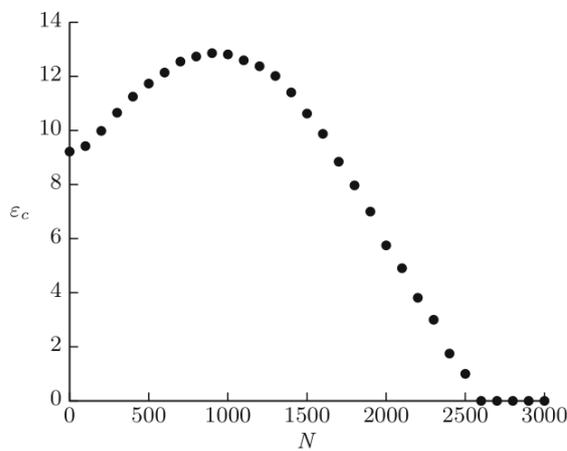
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1} - x_{1,2}) + N_{1,2}\psi, \\
 \dot{y}_{1,2} &= r_{1,2}x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\
 \dot{z}_{1,2} &= -b_{1,2}z_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $\sigma = 10.0$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 8/3$ ,  $r_1 = 40$ ,  $r_2 = 35$  — параметры системы. В случае однонаправленной связи  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ , а в случае взаимной —

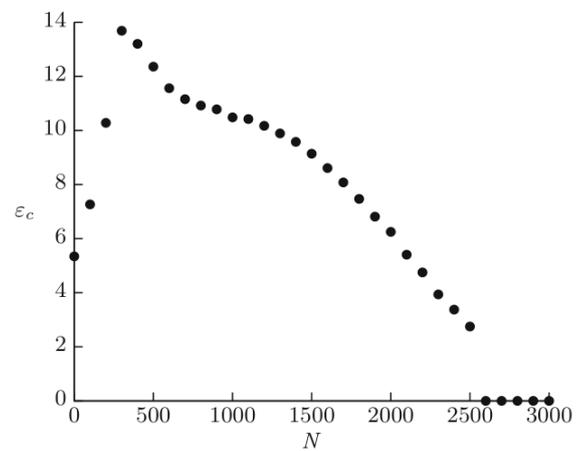
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ .  $N_{1,2}\psi$  – параметры шума, где  $\psi$  – случайное число, соответствующее нормальному распределению с нулевым средним и единичным стандартным отклонением. Шум был добавлен только к системе с индексом 2, т.е.  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = N$ . Интенсивность шума зависит от действительного числа  $N$ .

Стоит отметить, что поскольку система уравнений (2.3) решалась численно при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка, шумовое воздействие было добавлено уже после каждого интеграционного шага  $h$  к первому уравнению второй связанной системы Лоренца как  $N\psi h$ ,  $h = 0.003$ .

Прежде, чем перейти к рассмотрению результатов исследования указанного вопроса, следует проанализировать зависимость критического значения параметра связи  $\varepsilon_c$  от величины амплитуды шумового воздействия  $N$  (см. рисунок 2.15). Граница возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации определялась с помощью спектра показателей Ляпунова.



(а) Однонаправленная связь



(б) Взаимная связь

Рисунок 2.15 — Зависимость критического значения параметра связи  $\varepsilon_c$  от величины интенсивности шума  $N$  в случае однонаправленной (а) и взаимной (б) связи

Отметим, что средний размер аттрактора Лоренца вдоль первой компоненты  $x$  составляет около 50. Из рисунка 2.15 видно, что сначала при увеличении интенсивности шума  $N$  вплоть до определенного значения ( $N \approx 900$  и  $N \approx 350$  в случае однонаправленной и взаимной связи, соответственно) величина критического значения параметра связи  $\varepsilon_c$  тоже увеличивается. Такое поведение связано с тем, что шумовое воздействие вносит дополнительное случайное возмущение во всех направлениях фазового пространства рассматриваемой системы связанных систем Лоренца, что и приводит к сдвигу порога синхронизации в сторону увеличения значения параметра связи. Однако, стоит отметить, что при относительно небольших значениях интенсивности шума, сопоставимых по величине с собственными колебаниями систем, граница возникновения обобщенной синхронизации практически остается неизменной, а в случае однонаправленной связи – даже почти постоянной (см. также [102, 103]).

Затем, с дальнейшим увеличением интенсивности шума критическая величина параметра связи уменьшается до нулевого значения (рисунок 2.15), указывая на возникновение обобщенной синхронизации практически без участия хаотического сигнала со стороны первой (ведущей) системы. Причина такого поведения заключается в том, что при достаточно большой интенсивности шумовое воздействие скрывает детерминированный сигнал, относящийся к первой системе, сначала частично, а затем полностью [104]. В последнем случае наблюдается режим синхронизации индуцированной шумом [105].

Сопоставление результатов, полученных для обоих типов связи, позволяет сделать вывод, что при величине интенсивности шума в диапазоне  $N \in [0, 200]$  обобщенная синхронизация возникает при меньшем значении параметра связи  $\varepsilon$  в случае взаимной связи по сравнению со случаем однонаправленной связи, что хорошо согласуется с результа-

тами других известных работ. По этой причине дальнейшее изучение влияния интенсивности шума проводилось с использованием значений параметра  $N$  в указанном диапазоне.

Далее был произведен расчет распределений длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи  $\varepsilon$  для обоих типов связи (см. рисунок 2.16). Распределения  $p(\tau)$  были нормированы на количество ламинарных фаз при соответствующем значении параметра связи и их интервал накопления  $\Delta\tau$  (1000 для  $a, б, в$  и 200 для  $г$ ) и сопоставлены с теоретическими экспоненциальными кривыми, характерными для перемежаемости перескоков. Полученные результаты указывают на то, что с увеличением интенсивности шума  $N$  отклонение между данными, полученными в ходе численного моделирования, и теоретическими кривыми также увеличивается. Данный эффект сильнее проявляется в случае взаимной связи, поскольку критическое значение параметра связи  $\varepsilon_c$  (см. рисунок 2.15) изменяется сильнее с увеличением  $N$  по сравнению со случаем однонаправленной связи. В то же самое время, отклонение рассчитанных характеристик от теоретических экспоненциальных функций во всех случаях оказывается небольшим.

Таким образом, при увеличении интенсивности шума  $N$  критические значения параметра связи, соответствующие установлению режима обобщенной синхронизации, немного увеличиваются по сравнению с критическим значением  $\varepsilon_c$  в отсутствие шума. При этом, средняя длительность ламинарных фаз становится меньше с увеличением  $N$  при фиксированном значении параметра связи. Данное утверждение было подтверждено при расчете зависимостей средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  (см. рисунок 2.17).

На рисунке 2.17 четко видно, что при всех рассмотренных значениях интенсивности шума  $N$  средняя длительность ламинарных фаз уменьшается быстрее в случае взаимной связи по сравнению со случаем

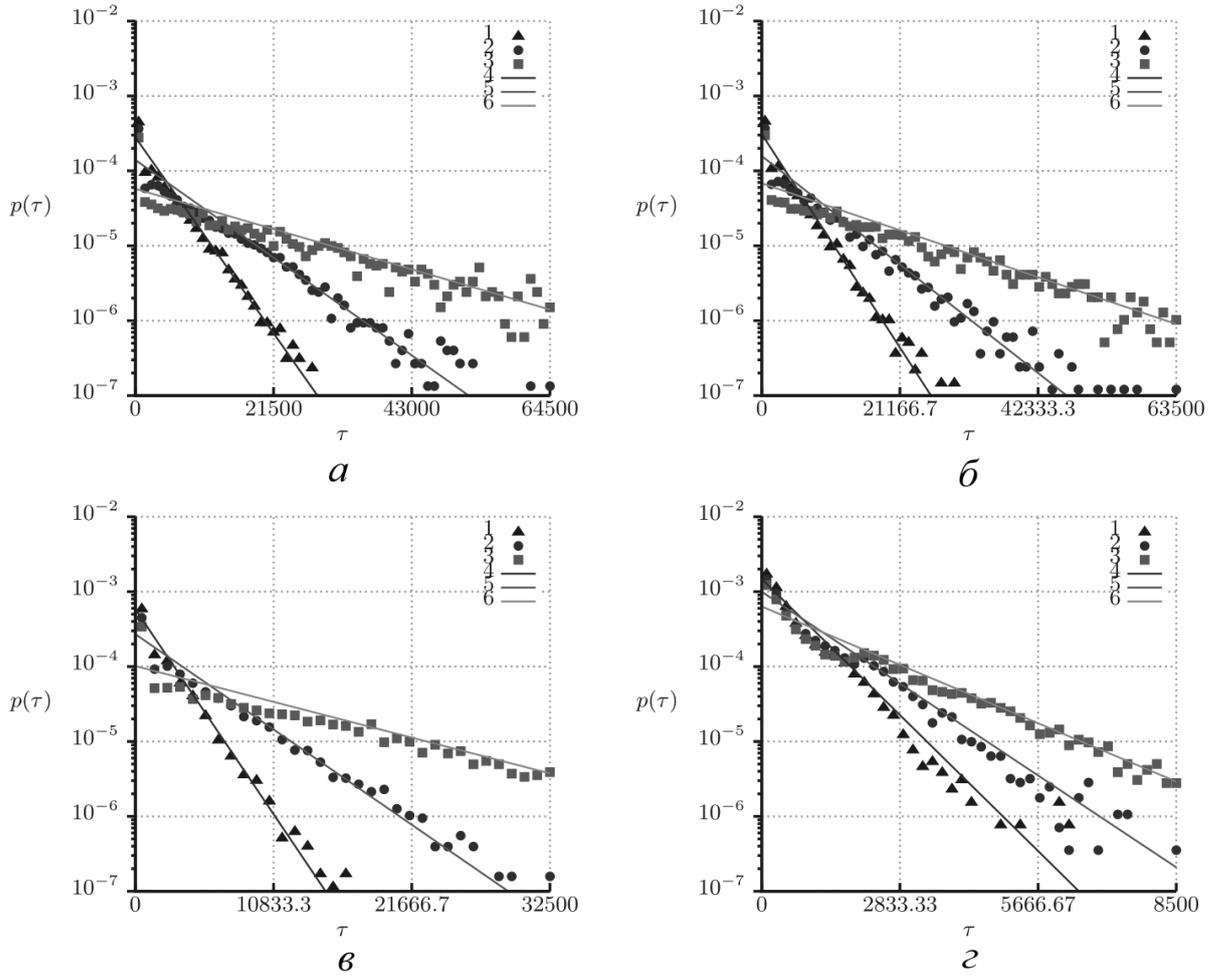
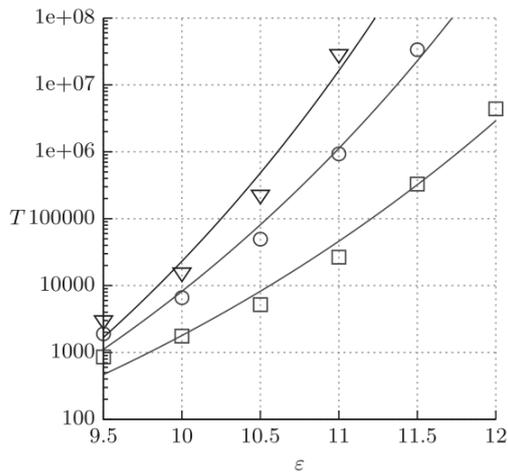
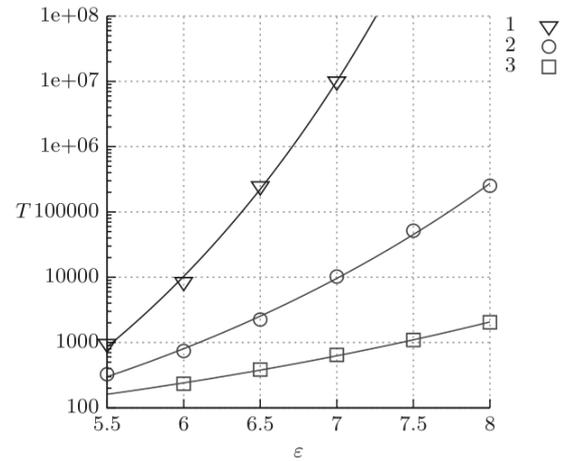


Рисунок 2.16 — Нормированные распределения  $p(\tau)$  длительностей ламинарных фаз  $\tau$  при фиксированных значениях параметра связи  $\varepsilon$  в случае однонаправленной ( $a, б$ ) и взаимной ( $в, г$ ) связи, соответственно. Величина параметра интенсивности шума  $N = 25$  ( $a, в$ ) и  $N = 50$  ( $б, г$ ). Фигуры, отмеченные номерами 1-3, соответствуют результатам, полученным при параметре связи  $\varepsilon = \{9.5, 9.75, 10.0\}$  ( $a, б$ ) и ( $\varepsilon = \{5.7, 5.9, 6.1\}$ ) ( $в, г$ ). Линии 4-6 соответствуют аппроксимирующим функциям вида (1.9), где средняя длительность ламинарных фаз  $T \approx \{2973, 5967, 14479\}$  ( $a$ ),  $T \approx \{2687, 5287, 12225\}$  ( $б$ ),  $T \approx \{1433, 3082, 8208\}$  ( $в$ ),  $T \approx \{565, 836, 1316\}$  ( $г$ ), соответственно



(а) Однонаправленная связь



(б) Взаимная связь

Рисунок 2.17 — Зависимости средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра связи  $\varepsilon$  при различных значениях параметра интенсивности шума  $N$  в случае однонаправленной (а) и взаимной (б) связи. Фигуры, отмеченные номерами 1-3, соответствуют результатам, полученным при значении интенсивности шума  $N = \{0, 100, 200\}$  (а) и  $N = \{20, 60, 120\}$  (б). Сплошные линии соответствуют аппроксимациям теоретической функцией вида (1.11)

однонаправленной связи. При этом, при обоих типах связи зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи хорошо аппроксимируются экспоненциальными законами вида (1.11). Следовательно, полученные зависимости полностью соответствуют теории, разработанной в статье [45]. Результаты аппроксимации полученных данных экспоненциальной функцией представлены в таблице 2.5.

Таким образом, метод на основе расчета локальных показателей Ляпунова позволяет определить основные статистические характеристики перемежающейся обобщенной синхронизации с достаточно высокой точностью в достаточно широком диапазоне значений параметра связи при различных величинах интенсивности внешнего шума в случае однона-

Таблица 2.5 — Коэффициенты аппроксимации экспоненциальной функцией вида (1.11) для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи в случае связанных систем Лоренца, находящихся под шумовым воздействием интенсивности  $N$ .

	Однонаправленная связь			Взаимная связь		
$N$	0	100	200	20	60	120
$a$	-9.07	-6.55	-4.16	-3.70	-0.11	1.66
$b$	0.295	0.2745	0.2455	0.42	0.31	0.22
$d$	-1274.48	-3918.35	-3849.67	-217.52	-6.28	7205.24

правленной и взаимной связи. Несмотря на присутствие шума, полученные характеристики не претерпевают качественных изменений, а лишь количественных, т.е. для всех рассмотренных значений интенсивности шума наблюдается режим перемежаемости типа перескоков. Стоит отметить, что указанные выводы справедливы только для тех величин интенсивности шума  $N$ , при которых критическое значение параметра связи в случае взаимной связи меньше, чем в случае однонаправленной связи.

Стоит также отметить, что сопоставление результатов, описанных в разделе 1.4, с результатами подхода, предложенного в настоящей главе диссертационной работы, было бы не корректным. В данном случае, аддитивный шум был добавлен непосредственно к уравнениям, в то время как в разделе 1.4 шум был добавлен к временной зависимости модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем. Следовательно, ответ на вопрос о том, какой же из приведенных двух подходов обладает большей устойчивостью к шуму, добавленному к исходным уравнениям, выходит за рамки настоящей диссертационной работы и требует дополнительных исследований.

## 2.5 Выводы по главе 2

Таким образом, в настоящей главе диссертационной работы разработан универсальный метод выделения ламинарных и турбулентных фаз на основе расчета локальных показателей Ляпунова для анализа поведения взаимодействующих систем на границе обобщенной синхронизации. Показано, что данный подход может быть использован в системах как с относительно простой, так и относительно сложной топологией аттрактора (например, системах Ресслера и Лоренца, соответственно), и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи.

Результаты работоспособности разработанного подхода в случае однонаправленной связи сопоставлены с результатами выделения ламинарных фаз с помощью метода вспомогательной системы. Показано, что несмотря на то, что точность нового метода немного уступает классическому подходу, он позволяет корректно определить статистические характеристики перемежаемости, такие как распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности (связи), и определить тип перемежаемости, реализуемой в системе. При помощи нового метода впервые показано, что на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттрактора имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной топологией реализуется перемежаемость перескоков. Вышесказанное свидетельствует о том, что тип перемежаемости на границе обобщенной синхронизации не зависит от типа связи между системами, а определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем (в случае, когда аттракторы обеих систем одинаковые).

Исследовано влияние аддитивного белого шума на оценку характеристик перемежаемости в связанных системах Лоренца. Установлено, что при увеличении интенсивности шума средняя длительность ламинарных фаз уменьшается, причем это проявляется сильнее в случае взаимной связи. Также установлено, что при относительно небольшой интенсивности шума оцененные основные характеристики перемежаемости хорошо аппроксимируются теоретическими экспоненциальными функциями, соответствующими перемежаемости типа перескоков.

Полученные результаты могут быть использованы как при исследовании взаимодействия систем в присутствии шума, так и при построении схем для скрытой передачи информации, где повышенная устойчивость к шумовому воздействию является критичной.

## Глава 3

### **Мультистабильность вблизи границы обобщенной синхронизации**

**[52, 58–61, 64, 70–73, 75, 76]**

В данной главе приводятся предпосылки и результаты исследования возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в потоковых системах с различной топологией аттрактора и дискретных отображениях. Для исследования применяются подходы, основанные на модификации метода вспомогательной системы [50] и метода расчета локальных показателей Ляпунова, предложенного в главе 2, проводится сопоставление результатов обоих методов. Вводится в рассмотрение определение меры мультистабильности, выполняется ее оценка для однонаправленно связанных систем с дискретным временем (логистических отображений), а также потоковых динамических систем (систем Ресслера [46] и Лоренца [106]) в случае однонаправленной и взаимной связи. На примере систем Ресслера и логистических отображений демонстрируется новый подход для более точной оценки распределений длительностей ламинарных фаз для классификации типа перемежаемости.

### **3.1 Понятия мультистабильности и меры мультистабильности**

Мультистабильность является универсальным явлением, характерным для систем различной природы [107]. Под мультистабильностью традиционно понимается сосуществование в фазовом пространстве динамической системы нескольких аттракторов, выбор которых зависит от начальных условий этой системы. Впервые термин “мультистабильность” был введен в рассмотрение в работе [108], посвященной зрительному восприятию. Позднее мультистабильность была обнаружена почти во всех областях науки и техники, включая электронику, оптику, механику и биологию.

В настоящее время явление мультистабильности хорошо изучено применительно к автономной и неавтономной динамике исследуемых систем (см., например, [109–113] и др.). Однако, анализ синхронной динамики взаимодействующих систем и явлений вблизи границ различных типов синхронизации с позиций мультистабильности до настоящего времени детально не проводился, хотя и существуют работы, направленные на изучение мультистабильности при разрушении синхронных режимов с точки зрения бифуркационного анализа в дискретных отображениях, генетических элементах, лазерных системах и ансамблях связанных систем (см., например, [114–118]).

Рассмотрим проявление мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах. Как отмечалось в предыдущих главах, вблизи границы синхронного режима имеет место перемежающееся поведение, характеризующееся чередованием синхронных (ламинарных) и асинхронных (турбулентных) фаз динамики. Под мультистабильностью в данном контексте будем понимать такое явление, при котором при фиксированных начальных усло-

виях одной из взаимодействующих систем (в случае однонаправленной связи — ведущей) и различных начальных условиях другой системы (в случае однонаправленной связи — ведомой) в один и тот же момент времени могут наблюдаться как одинаковые, так и различные (синхронные или асинхронные) фазы поведения. Иными словами, наблюдается чувствительность наблюдаемой в данный момент фазы поведения к выбору начальных условий одной из взаимодействующих систем.

Для иллюстрации наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации следует построить бассейны притяжения синхронных и асинхронных фаз для связанных систем на плоскости начальных условий системы, для которой они изменяются. Как и в случае бассейнов притяжения автономных систем, каждая точка, соответствующая определенным начальным условиям, должна окрашиваться в определенный цвет в зависимости от наблюдаемого режима (например, светлый цвет соответствует асинхронному режиму, темный — синхронному). Отличие от классического случая заключается в том, что бассейны притяжения строятся в определенные фиксированные моменты времени после завершения переходного процесса. Такой, качественный, подход позволяет более информативно и более точно установить существование мультистабильности в исследуемых системах в соответствии с определением данного режима.

Другим, количественным, подходом к анализу мультистабильности на предмет ее существования является переход от рассмотрения нескольких взаимодействующих систем к ансамблю (имитирующему системы, стартующие с различных начальных условий) и введение в рассмотрение количественной характеристики мультистабильности — меры мультистабильности. Под мерой мультистабильности будем понимать вероятность  $P_a$  детектирования асинхронных участков временной динамики при фиксированном значении параметра связи  $\varepsilon$  между взаимодейству-

ющими системами после завершения переходного процесса. Для оценки указанной меры  $P_a$  были модифицированы и успешно опробованы такие хорошо известные подходы как метод вспомогательной системы и метод локальных показателей Ляпунова, хотя имеется возможность использования и других методов диагностики. Последний подход позволяет провести исследование вне зависимости от типа связи и относительной сложности топологии аттрактора.

Мера мультистабильности задается по следующей формуле:

$$P_a(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^N \frac{n(g_i(t))}{N(N-1)}, \quad (3.1)$$

где  $N \gg 1$  — число систем-осцилляторов, участвующих в рассмотрении,  $n(g_i(t))$  — количество систем, находящихся в синхронизме с  $i$ -й системой. Исследуемая величина  $g_i(t)$ , используемая для проверки синхронизма, определяется используемым методом диагностики обобщенной синхронизации.

Мера мультистабильности позволяет определить степень асинхронной динамики, наблюдаемой при определенном значении безразмерного времени. Если при любых начальных условиях, принадлежащих бассейнам притяжения аттракторов, обобщенная синхронизация не возникает (например, при значении параметра связи  $\varepsilon = 0$ ), то  $P_a = 1$ . С увеличением параметра связи наблюдается иная ситуация, когда только часть начальных условий демонстрирует синхронную динамику, т.е. выполняется условие  $0 < P_a < 1$ . В этом случае и будет наблюдаться мультистабильность, что позволяет использовать данную характеристику в качестве оценки ее меры. При дальнейшем увеличении параметра связи мультистабильность снова исчезает, т.к. при любых начальных условиях возникает режим обобщенной синхронизации, т.е.  $P_a = 0$ .

Описанный выше подход можно использовать для более точной (по сравнению с обычными методами) оценки критического значения пара-

метра связи, соответствующего возникновению обобщенной синхронизации. Во-первых, полученная величина не зависит от начальных условий. Хотя, этот фактор можно исключить и для обычных методов, если выполнить вычисление при различных начальных условиях, а затем усреднить результат. Во-вторых, мера мультистабильности по определению уже нормирована, а значит позволяет избавиться от необходимости в поиске коэффициента нормировки. Наконец, указанная мера позволяет с легкостью выделить интервал установления перемежающейся обобщенной синхронизации, включая его верхний предел, соответствующий критическому значению параметра связи. В это же время, при использовании обычных подходов выделить пределы указанного интервала достаточно проблематично, и оцениваемое с их помощью пороговое значение оказывается немного заниженным, особенно при использовании метода локальных показателей Ляпунова.

Проиллюстрируем наличие мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации на конкретных примерах. В качестве объектов исследования были выбраны однонаправленно и взаимно связанные потоковые системы с различной топологией аттрактора и дискретные отображения. Для каждой системы использован следующий алгоритм действий. Во-первых, нужно выбрать метод диагностики обобщенной синхронизации. Как отмечалось выше, для однонаправленной связи целесообразно использовать метод вспомогательной системы или метод расчета условных показателей Ляпунова, для взаимной связи — метод расчета спектра показателей Ляпунова. При рассмотрении эффектов вблизи границы обобщенной синхронизации нужно перейти от рассмотрения полного спектра показателей Ляпунова к локальным ляпуновским показателям. Во-вторых, при фиксированных значениях управляющих параметров и параметра связи необходимо зафиксировать начальные условия одной системы и изменять начальные условия другой системы.

В случае однонаправленной связи нужно зафиксировать начальные условия ведущей системы. В-третьих, нужно проанализировать временную зависимость характеристики, позволяющей детектировать установление режима обобщенной синхронизации, при различных начальных условиях. Если в один и тот же момент времени в зависимости от начальных условий режим обобщенной синхронизации либо наблюдается, либо отсутствует, то это и будет означать существование мультистабильности.

## **3.2 Мультистабильность в случае однонаправленной связи: метод вспомогательной системы**

Начнем рассмотрение со случая однонаправленной связи между взаимодействующими системами. В качестве объектов исследования были выбраны потоковые системы с относительно простой (системы Ресслера) и относительно сложной (системы Лоренца) топологией аттрактора и системы с дискретным временем (логистические отображения).

### **3.2.1 Однонаправленно связанные системы Ресслера**

Однонаправленно связанные системы Ресслера описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3) с теми же значениями управляющих параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\omega_r$ , что и в главе 1, и  $\omega_d = 0.93$  [12, 13]. Для диагностики режима обобщенной синхронизации в системе (1.3) был применен метод вспомогательной системы, для чего была введена в рассмотрение вспомогательная система Ресслера (1.6), идентичный по управляющим параметрам ведомой системе из (1.3), но с отличающимися начальными условиями. Во избежание влияния переходного процесса [119] на полученные результаты здесь и далее при численном моделировании начальный момент времени  $t_0 = 0$  был установлен после завершения переходного процесса, в то время как

начальная часть временного ряда, соответствующего этому переходному процессу, была исключена из рассмотрения. При выбранных значениях управляющих параметров режим обобщенной синхронизации, диагностируемый при помощи метода вспомогательной системы и смены знака старшего условного показателя Ляпунова, наступает при  $\varepsilon_c = 0.178$  [13].

Ниже границы обобщенной синхронизации, как отмечалось выше, наблюдается перемежающееся поведение. В данном случае разность  $\xi(t) = |x_r(t) - x_a(t)|$  между состояниями ведомой и вспомогательной систем представляет собой чередование участков с синхронной (ламинарные фазы) и асинхронной (турбулентные фазы) динамикой. На рисунке 3.1 представлены временные зависимости таких разностей  $\xi(t)$  для двух различных начальных условий ведомой системы (при фиксированных начальных условиях ведущей и вспомогательной систем) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.17$ . Из рисунка 3.1 видно, что обе зависимости качественно аналогичны друг другу: для обоих случаев наблюдается прерывание ламинарных участков (где разность между состояниями ведомой и вспомогательной систем близка к нулю) кратковременными турбулентными всплесками высокой амплитуды, при этом есть как участки, где характерные фазы поведения совпадают, так и участки, где они различаются. Из этого следует, что в зависимости от начальных условий в один и тот же момент безразмерного времени две связанные системы Ресслера могут как находиться в режиме обобщенной синхронизации, так и демонстрировать асинхронную динамику. Другими словами, в данном случае на границе обобщенной синхронизации наблюдается режим мультистабильности.

Понятно, что может возникнуть такая ситуация, при которой для некоторых начальных условий путем простого сравнения зависимостей  $\xi(t)$  мультистабильность обнаружить не удастся, то есть на этих зависимостях интервалы времени, соответствующие ламинарным и турбу-

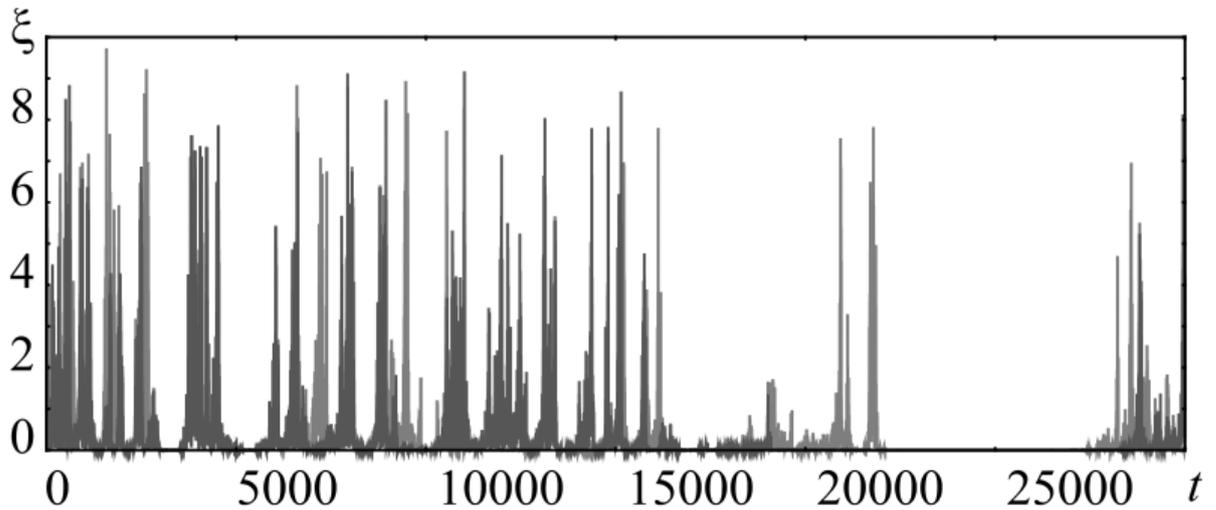


Рисунок 3.1 — Зависимости разностей  $\xi(t) = |x_r(t) - x_a(t)|$  между состояниями ведомой и вспомогательной систем от безразмерного времени  $t$ , полученные для двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3),(1.6), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, при двух различных наборах начальных условий ведомой системы, значение параметра связи  $\varepsilon = 0.17$ . Переходной процесс длительностью  $T_{tr} = 10^6$  был пропущен

лентным фазам, будут примерно совпадать друг с другом, в то время как для других начальных условий мультистабильность может присутствовать. Чтобы однозначно ответить на вопрос о наличии/отсутствии мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации, для полноты картины следует рассматривать множество начальных условий, с которых стартует ведомая система, при фиксированных начальных условиях ведущей и вспомогательной систем. По мере увеличения числа рассматриваемых систем графики временных рядов перестают быть удобными в использовании для изучения мультистабильности. С целью решения данной проблемы для определения существования мультистабильности в контексте перемежающейся обобщенной синхронизации были построены бассейны притяжения синхронных и асинхронных со-

стояний для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3),(1.6) в фиксированные моменты времени после завершения переходного процесса. Начальные условия ведущей  $(x_d, y_d, z_d) = (0, 0, 0)$  и вспомогательной  $(x_a, y_a, z_a) = (1, 1, 1)$  систем оставались неизменными. В то же время, начальные условия ведомой системы были равномерно заданы в области  $x_r^i \in [-80; 100]$ ,  $y_r^i \in [-80; 80]$ ,  $z_r^i = 1.1$ . Стоит отметить, что наблюдаемая на бассейнах притяжения картина слабо зависит от выбора фиксированного начального значения переменной  $z_r^i$  до тех пор, пока образ траектории не прекращает попадать на аттрактор. Рассчитанные для однонаправленно связанных систем Ресслера бассейны притяжения при том же значении параметра связи  $\varepsilon = 0.17$  в различные моменты безразмерного времени  $t$  можно видеть на рисунке 3.2.

Из рисунка 3.2 четко видно, что в один и тот же момент безразмерного времени среди различных начальных условий ведомой системы Ресслера есть как такие точки, старт с которых приводит к установлению режима обобщенной синхронизации (темные точки), так и такие значения, при которых происходят асинхронные колебания (светлые точки). Стоит отметить, что в определенные моменты времени почти для всех начальных условий наблюдается асинхронное состояние (см. рисунок 3.2а), что соответствует высокой вероятности обнаружения турбулентных фаз. Аналогично, существуют и такие моменты времени, при которых бассейн притяжения синхронных состояний покрывает практически весь набор начальных условий (см. рисунок 3.2в). В таком случае наблюдается высокая вероятность обнаружения ламинарной фазы. Наконец, в определенный моменты времени бассейны синхронных и асинхронных состояний оказываются между собой сопоставимыми по размерам (см. рисунок 3.2б). Следовательно, в данном случае вероятности обнаружения ламинарной и турбулентной фазы оказываются примерно одинаковыми.

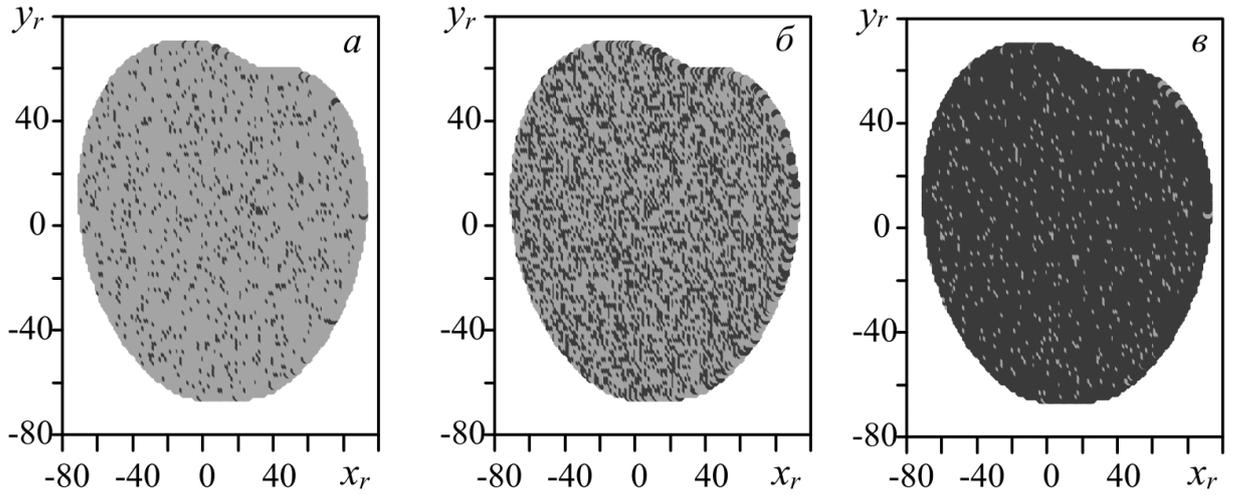


Рисунок 3.2 — Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний для двух одинаково связанных систем Ресслера (1.3),(1.6), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации ( $\varepsilon = 0.17$ ), на плоскости начальных состояний  $(x_r^i, y_r^i)$  ведомой системы ( $z_r = 1.1$ ) в различные моменты безразмерного времени: (а)  $t = 25000$ , (б)  $t = 50000$  и (в)  $t = 75000$  (переходной процесс длительностью  $T_{tr} = 10^6$  был пропущен). Темным цветом отмечены начальные условия, при которых наблюдается режим обобщенной синхронизации; светлым — асинхронный режим; белым — вылет траектории на бесконечность

Чтобы охарактеризовать мультистабильность, наблюдаемую в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации количественно, как отмечалось в разделе 3.1, предлагается подход, основанный на рассмотрении  $(N + 1)$  одинаково связанных систем Ресслера, описываемых следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\
 \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\
 \dot{z}_d &= b + z_d(x_d - c), \\
 \dot{x}_r^i &= -(\omega_r + \delta) y_r^i - z_r^i + \varepsilon(x_d - x_r^i), \\
 \dot{y}_r^i &= (\omega_r + \delta) x_r^i + a y_r^i, \\
 \dot{z}_r^i &= b + z_r^i(x_r^i - c),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — индекс ведомой системы,  $\delta$  — расстройка между этими системами, значения остальных управляющих параметров совпадают с указанными выше для системы (1.3). Параметр  $\delta$  добавлен во избежание ловушки численного счета. Его значение соответствует случайной величине с равномерной плотностью распределения вероятности в диапазоне  $-10^{-8} < \delta < 10^{-8}$ .

На практике число систем  $N$  следует выбирать достаточно большим  $N \in [100; 10000]$ , а начальные условия задавать равномерно распределенными по аттрактору. В противном случае, точность не будет высокой, и оценка может получиться неполной. Однако, одновременно с этим следует учитывать, что численное моделирование большого числа систем занимает много вычислительных ресурсов. Таким образом, число рассматриваемых пар систем было установлено  $N = 1000$  как наиболее оптимальное.

Важно отметить, что из-за практически полной идентичности управляющих параметров ведомых систем рассмотрение системы уравнений (3.2) эквивалентно исследованию  $N$  временных рядов двух однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3), при этом для каждого  $j$ -того ( $j = 1, \dots, N$ ) временного ряда начальные условия ведущей системы  $\mathbf{x}_d$  должны оставаться неизменными, а для ведомой системы  $\mathbf{x}_r$  меняться в соответствии с идеологией, изложенной выше. Тогда для двух любых произвольно выбранных систем  $\mathbf{x}_r^j$  и  $\mathbf{x}_r^k$  из  $N$  ведомых систем (3.2) можно использовать метод вспомогательной системы. Если выбранные системы демонстрируют идентичное поведение, то есть  $\mathbf{x}_r^j \equiv \mathbf{x}_r^k$ , то можно говорить об установлении обобщенной синхронизации между ведущей системой  $\mathbf{x}_d$  и любой из выбранных ведомых систем, например,  $\mathbf{x}_r^j$ . В данном случае, с точки зрения метода вспомогательной системы осциллятор  $\mathbf{x}_r^j$  играет роль ведомой системы, а осциллятор  $\mathbf{x}_r^k$  является вспомогательной системой. Понятно, что если системы  $j$  и  $k$  демонстри-

руют различное поведение, ведущая  $\mathbf{x}_d$  и ведомая  $\mathbf{x}_r^j$  системы находятся в асинхронном режиме (с точки зрения обобщенной синхронизации).

В рамках данного подхода (будем называть его модифицированным методом вспомогательной системы) можно рассчитать вероятность наблюдения асинхронного режима (турбулентной фазы) в соответствии с формулой (3.1), где для проверки установления синхронизма используется модуль разности между состояниями двух ведомых систем  $g_i(t) = d_{jk}(t) = \sqrt{(x_r^j - x_r^k)^2 + (y_r^j - y_r^k)^2 + (z_r^j - z_r^k)^2}$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, N$  — индексы ведомых систем,  $N$  — число ведомых систем. Системы можно считать синхронизированными, если выполняется условие  $d_{jk} < \Delta = \text{Const}$ , где  $\Delta$  — некоторая неотрицательная константа. В идеальном случае обобщенная синхронизация выполняется при  $\Delta = 0$ , что означает эквивалентность состояний двух идентичных ведомых систем, стартовавших с различных начальных условий. Однако, при численном решении следует использовать определенное положительное значение  $\Delta$ , зависящее от рассматриваемых систем и используемого метода диагностики. В данном случае было задано значение  $\Delta = 0.01$ .

Стоит отметить, что при изменении величины  $\Delta$  изменяется чувствительность метода диагностики синхронизации, что в конечном итоге может сказаться на оценке критического значения параметра связи, расчете статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации и, следовательно, на определении существования мультистабильности и расчете ее меры. Обычно, наименьшей чувствительности можно добиться при идеальном значении  $\Delta = 0$ . Это значит, что будет детектироваться наименьшее число ламинарных фаз поведения и их средняя длительность будет также наименьшей. С увеличением величины  $\Delta$  до некоторого предела число детектируемых ламинарных фаз будет увеличиваться вместе с их средней длительностью. В то же время, число детектируемых турбулентных фаз будет, напротив, уменьшаться,

как и их средняя длительность. Наконец, когда величина  $\Delta$  превысит максимум исследуемой величины, турбулентные фазы будет невозможно обнаружить, т.к. в любой момент времени будет детектироваться только ламинарная фаза, что сделает невозможным определение характеристик перемежаемости. С увеличением числа детектируемых ламинарных фаз порог возникновения обобщенной синхронизации тоже будет немного отодвигаться в сторону увеличения значения параметра связи  $\varepsilon$ . Тем не менее, при малом значении  $\Delta$  в диапазоне  $0.0001 \leq \Delta \leq 0.01$  описанные выше изменения проявляются слабо, что позволяет использовать любое значение в указанном диапазоне.

На рисунке 3.3а представлена зависимость усредненной по времени вероятности наблюдения асинхронных колебаний

$$P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_a(t) dt \quad (3.3)$$

от параметра связи  $\varepsilon$  для  $N$  пар однонаправленно связанных систем Ресслера. Кроме того, на рисунке 3.3б приведены зависимости четырех старших показателей Ляпунова, рассчитанных для одной пары однонаправленно связанных систем Ресслера, от того же параметра связи. Момент установления режима обобщенной синхронизации отмечен стрелкой.

Из рисунка 3.3 четко видно, что характер рассчитанной величины  $P_{av}$  полностью соответствует данному выше определению меры мультистабильности. Стоит отметить, что расчет  $P_{av}$  позволяет с достаточной простотой определить границу возникновения режима обобщенной синхронизации, поскольку в данном случае величина  $P_{av}$  оказывается близкой к нулю. В то же время, при значении параметра связи  $\varepsilon$  немного меньше критического значения наблюдается малая положительная величина  $P_{av} > 0$ , что указывает на установление режима перемежающейся обобщенной синхронизации и наличие мультистабильности в данном случае.

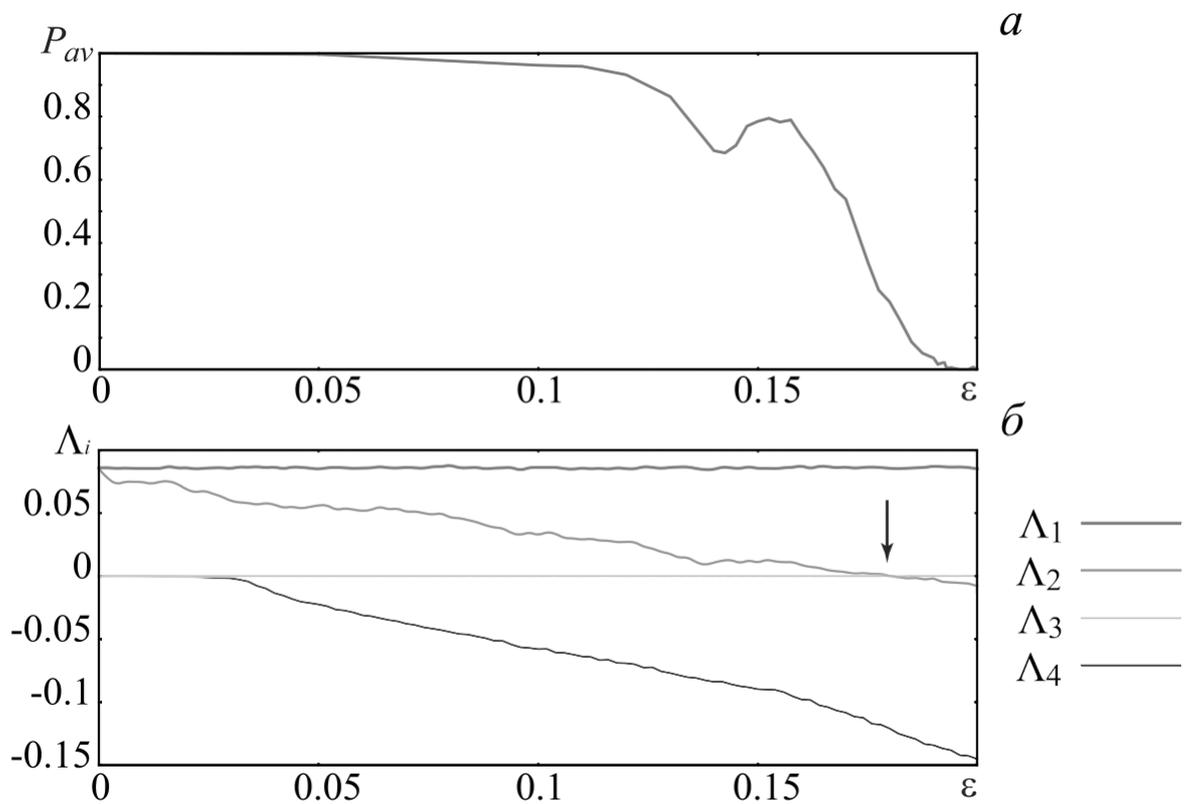


Рисунок 3.3 — Зависимости усредненной по безразмерному времени вероятности наблюдения асинхронного режима  $P_{av}$  (а) и четырех старших показателей Ляпунова  $\Lambda_i$  (б) от параметра связи  $\varepsilon$ , рассчитанные для однонаправленно связанных систем Ресслера (1.3),(1.6). Стрелкой отмечен момент установления режима обобщенной синхронизации

Примечательно, что несмотря на то, что величина  $P_{av}$  была введена с целью количественного описания мультистабильности в контексте перемежающейся обобщенной синхронизации, данная характеристика может быть чувствительна и к другим типам синхронизации, в частности к фазовой синхронизации. Например, на рисунке 3.3а видно, что около значения параметра связи  $\varepsilon \approx 0.14$  наблюдается “небольшое углубление”, которое, скорее всего, связано с установлением режима фазовой синхронизации, предшествующей установлению обобщенной синхронизации.

### 3.2.2 Однонаправленно связанные логистические отображения

Для систем с дискретным временем получены результаты, аналогичные результатам для потоковых систем. В качестве примера была рассмотрена система однонаправленно связанных логистических отображений, описываемая следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x), \\ y_{n+1}^i &= f(y_n^i, \lambda_y) + \varepsilon(f(x_n^i, \lambda_x) - f(y_n^i, \lambda_y)),\end{aligned}\tag{3.4}$$

где  $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$ ,  $\lambda_x = 3.75$  и  $\lambda_y = 3.79$  — управляющие параметры ведущей и ведомой системы, соответственно, индекс  $i = 1, 2, \dots, N$  соответствует номеру ведомой системы,  $\varepsilon$  — параметр связи.

При  $N = 2$  система (3.4) эквивалентна двум однонаправленно связанным логистическим отображениям ( $x_n$  соответствует ведущей системе,  $y_n^1$  — ведомой), рассматриваемым вместе с вспомогательной системой ( $y_n^2$ ). Порог обобщенной синхронизации, диагностируемой для системы (3.4) таким способом, равен  $\varepsilon_c = 0.31$ . Также, как и в случае потоковых систем, существование мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе может быть установлено при помощи построения бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний (см. рисунок 3.4). Из рисунка 3.4 следует, что при различных начальных условиях ведомой системы  $y_n^1$  обобщенная синхронизация может как наблюдаться, так и отсутствовать, что говорит о существовании мультистабильности.

По аналогии с потоковыми системами для расчета усредненной по времени меры мультистабильности при различных значениях параметра связи были рассмотрены  $N = 1000$  идентичных ведомых логистических отображений. На рисунке 3.5 представлена зависимость указанной меры и зависимость старшего условного показателя Ляпунова от параметра связи.

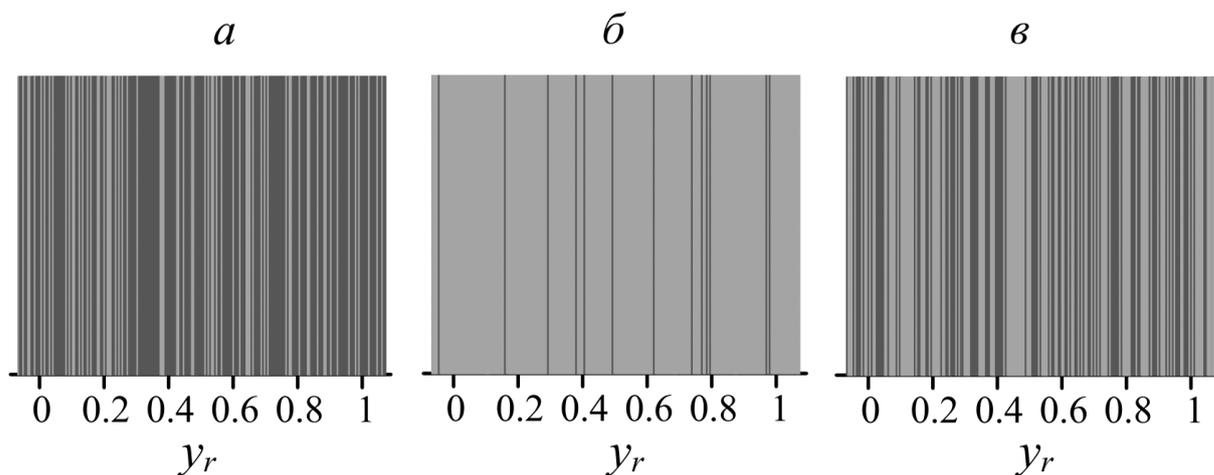


Рисунок 3.4 — Линейные бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний для двух однонаправленно связанных логистических отображений (3.4), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации ( $\varepsilon = 0.28$ ), на линии начальных состояний ведомых систем  $y_r$  в различные моменты дискретного времени: (а)  $n = 50000$ , (б)  $n = 95000$  и (в)  $n = 500000$  (переходной процесс  $n_{tr} = 10^6$  был пропущен). Начальные состояния ведущей и вспомогательной системы были зафиксированы как  $x_0 = 0.9$  и  $y_0 = 0.4$ , соответственно. Темный цвет отвечает установлению режима обобщенной синхронизации в определенный момент дискретного времени  $n$ , светлый — асинхронной динамике

Из рисунка 3.5 четко видно, что старший условный показатель Ляпунова отрицателен в двух областях:  $\varepsilon \in [0.11; 0.17]$  и  $\varepsilon > 0.31$ , т.е. в указанных областях реализуется обобщенная синхронизация. Во втором случае диагностируемый режим близок к полной синхронизации, в то время как в первой области наблюдается так называемая “слабая” синхронизация. Стоит отметить, что зависимости усредненной вероятности наблюдения асинхронной фазы поведения и старшего условного показателя Ляпунова от параметра связи имеют заметное сходство. Мера мультистабильности также дважды становится близкой к нулю, что говорит об установлении и разрушении режима обобщенной синхронизации

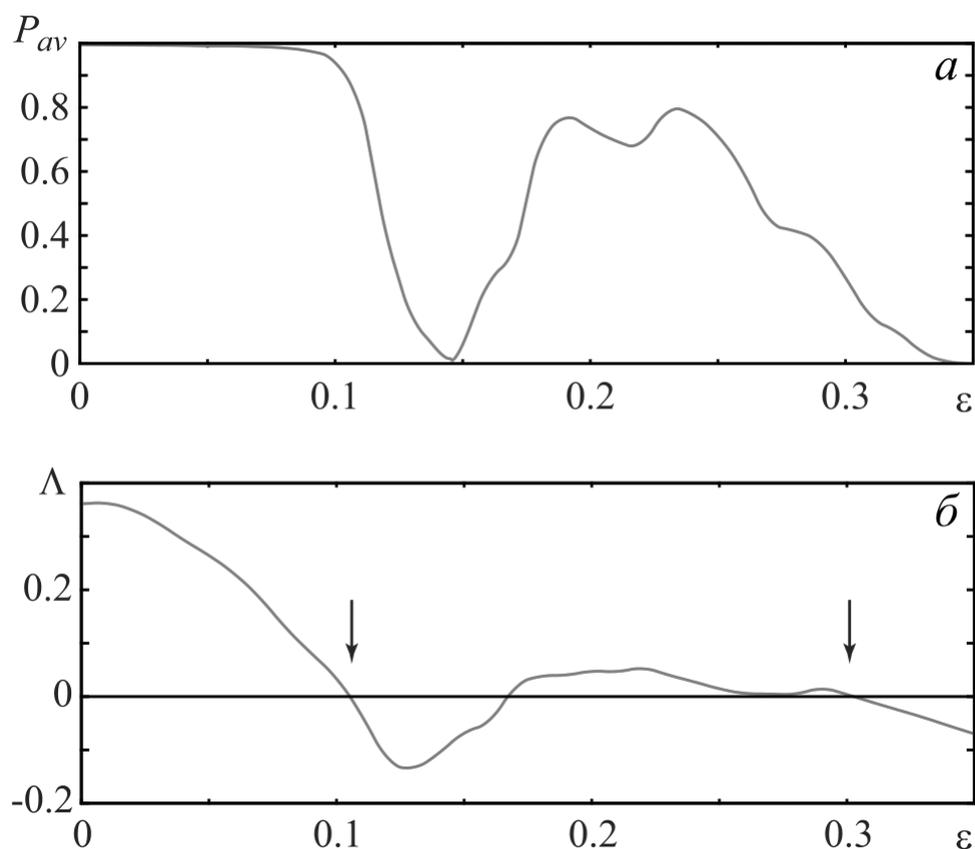


Рисунок 3.5 — Зависимости усредненной вероятности наблюдения асинхронных фаз поведения  $P_{av}$  (а) и старшего условного показателя Ляпунова (б) от параметра связи  $\varepsilon$ , рассчитанные для однонаправленно связанных логистических отображений (3.4). Стрелки указывают на границы установления режима обобщенной синхронизации

при изменении величины параметра связи. Во всех случаях вблизи границы синхронизации  $P_{av}$  отличается от 0, что подтверждает существование мультистабильности на границе обобщенной синхронизации точно так же, как и для потоковых систем.

### 3.2.3 Однонаправленно связанные системы Лоренца

Далее, будет рассмотрен вопрос о существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с относительно сложной топологией аттрактора (двулистной структурой аттрак-

тора или аттрактором типа “бабочка”). Поскольку, как отмечалось в предыдущих главах, на границе обобщенной синхронизации в таких системах тоже была обнаружена перемежаемость, это позволяет предположить, что мультистабильность может наблюдаться и в этом случае по аналогии с системами Ресслера с относительно простой топологией аттрактора (ленточного типа). Однако, в таких системах имеет место перемежаемость совершенно иного типа, перемежаемость “перескоков” [45, 51], что может привести к совершенно иным закономерностям в наблюдаемой мультистабильности.

В качестве исследуемой модели было выбрано множество пар однонаправленно связанных систем Лоренца, описываемое следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^i &= \sigma(y_2^i - x_2^i) + \varepsilon(x_1 - x_2^i), \\ \dot{y}_2^i &= (r_2 + \delta_i)x_2^i - y_2^i - x_2^i z_2^i, \\ \dot{z}_2^i &= -b z_2^i + x_2^i y_2^i, \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — индекс ведомой системы,  $N$  — число элементов в ансамбле,  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\mathbf{x}_2^i = (x_2^i, y_2^i, z_2^i)$  — векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, соответственно,  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$  и  $r_2 = 35$  — управляющие параметры,  $\varepsilon$  — параметр связи,  $\delta_i \in [0, 10^{-10}]$  — случайные числа, распределенные равномерно в указанном отрезке, характеризующие малую расстройку, введенную во избежание ловушки численного счета.

При  $N = 2$  система (3.5) представляет собой систему двух однонаправленно связанных систем Лоренца  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\mathbf{x}_2^1 = (x_2^1, y_2^1, z_2^1)$ , рассматриваемую в совокупности с вспомогательной системой  $\mathbf{x}_2^1 =$

$(x_2^2, y_2^2, z_2^2)$ , что позволяет провести диагностики обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы [50]. Как показали проведенные расчеты, режим обобщенной синхронизации в системе (3.5) возникает при  $\varepsilon = 10.2$ , а ниже границы этого режима, как отмечалось выше, наблюдается перемежающееся поведение. Для перемежающегося поведения и в данном случае характерна мультистабильность, для иллюстрации которой на рисунке 3.6 приведены бассейны притяжения ведомой системы Лоренца, полученные в различные моменты времени при значении параметра связи  $\varepsilon = 8.8$ , соответствующем режиму перемежающейся обобщенной синхронизации. Начальные условия для ведущей и вспомогательной систем Лоренца всегда выбирались фиксированными, а для ведомой системы координата  $y_2$  фиксировалась, а координаты  $x_2, z_2$  варьировались, как указано на рисунке. На рисунке 3.6 темный цвет соответствует фазам синхронного поведения (в смысле обобщенной синхронизации), светлый — асинхронным. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. Из рисунков видно, что во все рассмотренные моменты времени вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе имеет место мультистабильность.

Для количественной характеристики степени мультистабильности и диагностики обобщенной синхронизации с учетом этой особенности необходимо перейти от рассмотрения двух ведомых систем к ансамблю из  $N = 4000$  однонаправленно связанных систем Лоренца (3.5) с теми же значениями управляющих параметров и отличающимися значениями начальных условий ведомых систем, равномерно распределенными по аттракторам этих систем, и произвести расчет меры мультистабильности, аналогично тому, как это делалось для систем Ресслера и логистических отображений. На рисунке 3.7 представлена зависимость усредненной по времени вероятности наблюдения асинхронного режима для ансамбля

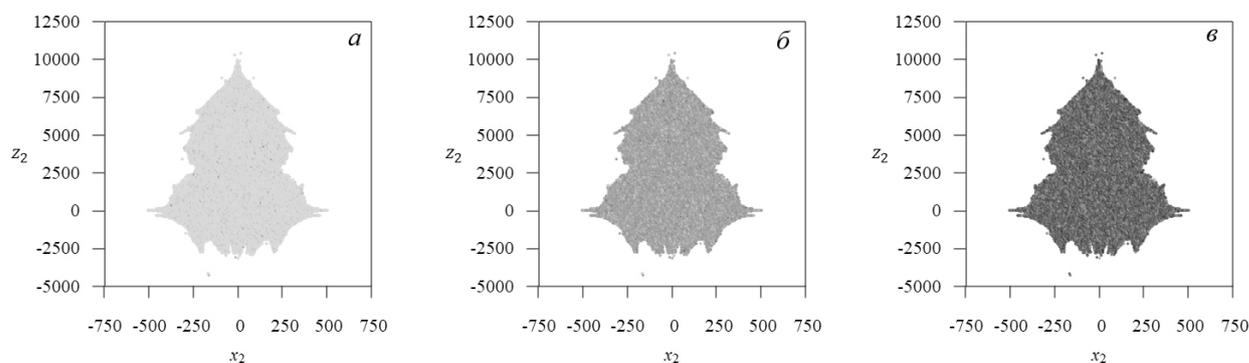


Рисунок 3.6 — Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний ведомой системы Лоренца (3.5), находящейся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации с ведущей системой, при значении параметра связи  $\varepsilon = 8.8$  на плоскости начальных условий  $(x_2, z_2)$  ( $y_2 = 1.1$ ), полученные в различные моменты времени: (а)  $t = 20000$ , (б)  $t = 40000$ , (в)  $t = 70000$ . Темный цвет соответствует реализации в фиксированный момент времени режима обобщенной синхронизации в системе (3.5), светлый цвет относится к асинхронному режиму. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность

однонаправленно связанных систем Лоренца от параметра связи  $\varepsilon$ . Видно, что по мере увеличения параметра связи мера мультистабильности монотонно уменьшается от 1 до 0, отражая переход от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации, а вблизи границы возникновения синхронного режима эта мера отлична от нуля, что является дополнительным подтверждением наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора.

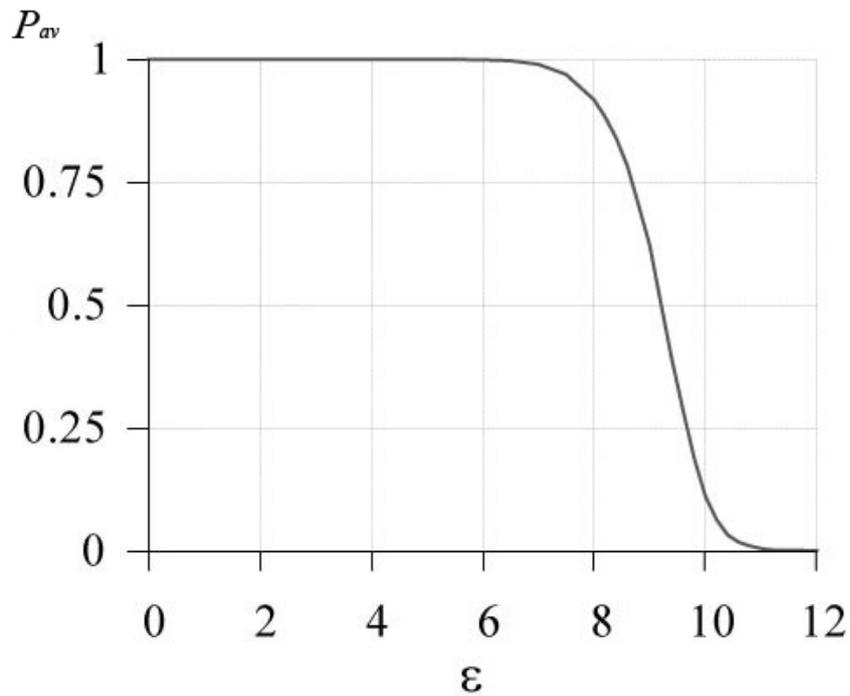


Рисунок 3.7 — Зависимость меры мультистабильности  $P_{av}$  от параметра связи  $\epsilon$ , полученной для ансамбля однонаправленно связанных систем Лоренца (3.5)

### 3.3 Определение статистических характеристик перемежаемости с учетом мультистабильности

Как уже было отмечено в главах 1–2, основным подходом к изучению режима перемежаемости является рассмотрение его статистических характеристик, таких как распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. На данный момент большинство работ по изучению данного режима основывается на выделении ламинарных и турбулентных фаз поведения систем при помощи метода вспомогательной системы. При этом, наличие мультистабильности вовсе не принимается в расчет, а при анализе характеристик перемежаемости исследователи делают выводы только по результатам рассмотрения единственной (даже очень длительной) временной реализации,

полученной только при одном наборе начальных условий. Закономерно возникает вопрос о целесообразности применения указанного подхода, о достоверности получаемых результатов, поскольку при различных начальных условиях в силу хаотической природы временные реализации могут значительно отличаться. Соответственно, ламинарные и турбулентные фазы, а также их длительности, также будут различными. К счастью, проведенные исследования показали, что за счет свойства эргодичности получаемые таким образом статистические характеристики являются корректными и согласуются с аналогичными характеристиками, полученными при выделении характерных фаз поведения систем с учетом явления мультистабильности.

Далее, рассмотрим результаты применения предложенного в разделе 3.2 подхода для классификации типа перемежаемости, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации. С этой целью, были рассчитаны распределения длительностей ламинарных фаз при помощи временной зависимости меры мультистабильности  $P_a(t)$ . На рисунке 3.8а приведена зависимость  $P_a(t)$ , полученная для ансамбля однонаправленно связанных систем Ресслера (3.2) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.17$ . На рисунке 3.8б представлена разность между состояниями двух ведомых (одна из которой выполняет роль вспомогательной) системами Ресслера  $\xi(t) = |x_r^1 - x_r^2|$  при том же значении параметра связи. Из рисунка 3.8а видно, что имеется возможность также легко выделить характерные фазы поведения при использовании временной зависимости  $P_a(t)$ , как и в случае классического метода вспомогательной системы. Действительно, ламинарные фазы наблюдаются в том случае, когда  $P_a(t)$  близко к нулю, а в остальных случаях реализуется турбулентное поведение. Чередование синхронных и асинхронных временных участков поведения сопровождается резким скачкообразным изменением  $P_a$ , что позволит избежать сложностей с ошибочным выделением ультрако-

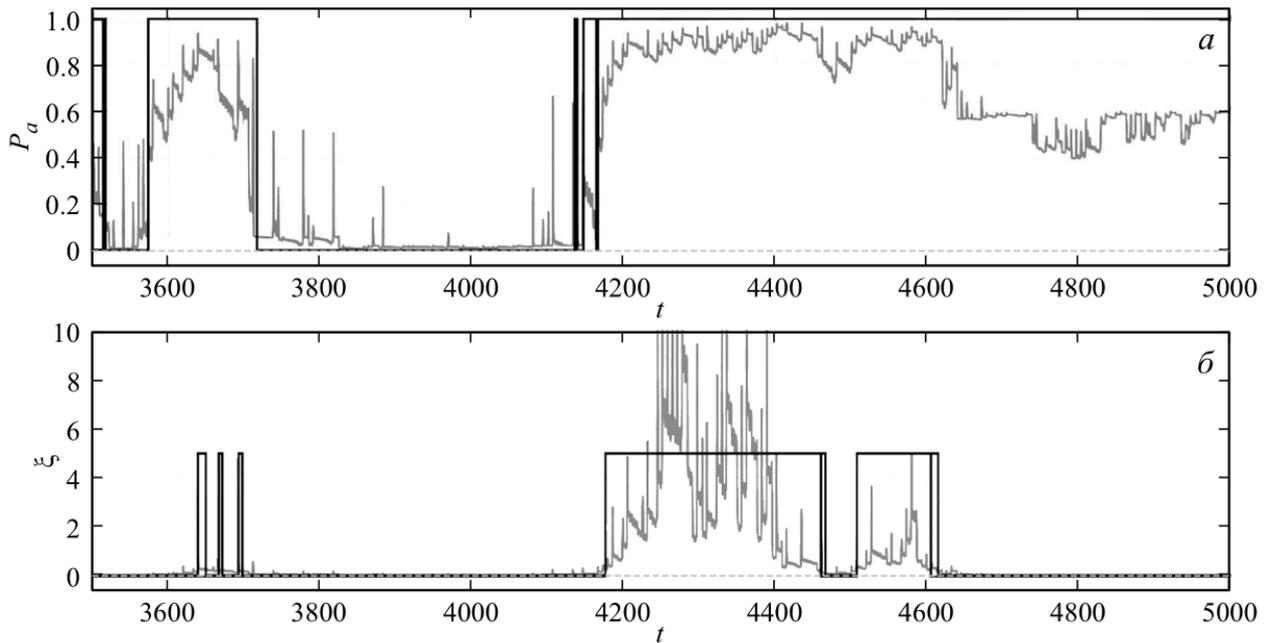


Рисунок 3.8 — Временная зависимость вероятности наблюдения асинхронных фаз поведения  $P_\alpha(t)$  для ансамбля однонаправленно связанных систем Ресслера (3.2) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.17$  (а) и аналогичная зависимость модуля разности между состояниями двух ведомых (ведомой и вспомогательной) систем  $\xi(t) = |x_r^1 - x_r^2|$  при том же значении параметра связи (б). Переходной процесс длительностью  $T_{tr} = 10^5$  был пропущен

ротких ламинарных фаз, что обычно характерно для метода вспомогательной системы. Следовательно, описанный подход может быть использован для более точного выделения ламинарных фаз поведения, характеристики которых и представляют наибольший интерес при изучении режима перемежаемости.

На рисунке 3.9 представлены распределения длительностей ламинарных фаз для однонаправленно связанных систем Ресслера ( $\varepsilon = 0.17$ ), полученные при помощи предложенного подхода и метода вспомогательной системы. Из рисунка 3.9 видно, что обе закономерности хорошо аппроксимируются степенной функцией вида (1.4), что соответствует перемежаемости on-off типа. Среднеквадратичные отклонения данных

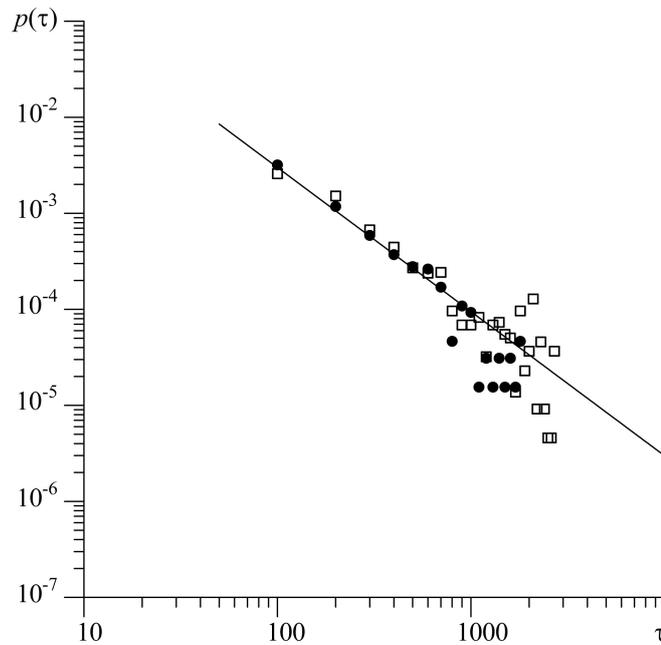


Рисунок 3.9 — Распределения длительностей ламинарных фаз поведения для однонаправленно связанных систем Ресслера (3.2), находящихся на границе обобщенной синхронизации, при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.17$ , полученные при помощи метода расчета меры мультистабильности (кружки) и метода вспомогательной системы (квадраты). Сплошная линия соответствует аппроксимирующей степенной функции вида (1.4) для рассчитанных значений

численного моделирования от теоретической закономерности составляют  $\sigma_1 = 4.9 \cdot 10^{-9}$  и  $\sigma_2 = 1.6 \cdot 10^{-9}$  для метода вспомогательной системы и для предложенного подхода, соответственно. Совпадение распределений, в свою очередь, означает, что зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра связи также должны совпадать.

Аналогичные результаты были получены при расчете распределений длительностей ламинарных фаз для однонаправленно связанных логистических отображений (3.4) при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.28$  (см. рисунок 3.10). Полученные распределения также хорошо аппроксимируются степенной функцией (1.4), что указывает на наличие перемежаемости “on-off” типа.

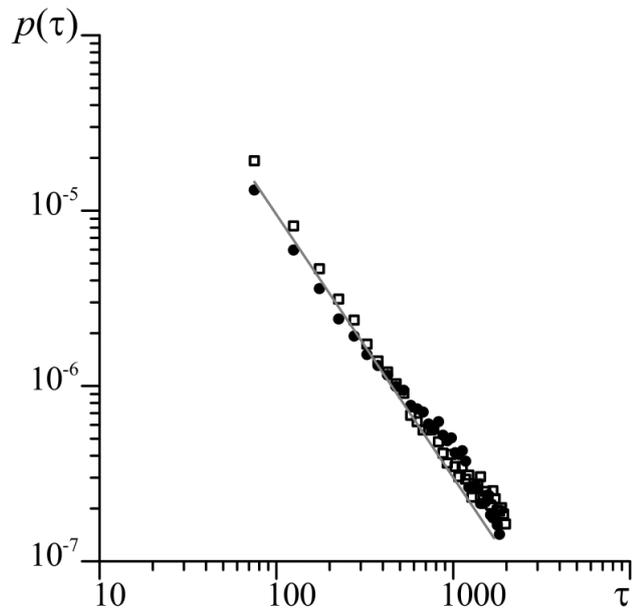


Рисунок 3.10 — Распределения длительностей ламинарных фаз поведения для однонаправленно связанных логистических отображений (3.4), находящихся на границе обобщенной синхронизации при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.28$ , полученные при помощи метода расчета меры мультистабильности (кружки) и метода вспомогательной системы (квадраты). Сплошная линия соответствует аппроксимирующей степенной функции вида (1.4) для рассчитанных значений

Таким образом, предложенный подход, основанный на расчете вероятности наблюдения асинхронной фазы поведения, позволяет не только дать количественную оценку мультистабильности при различных значениях параметра связи, но и может быть использован для изучения статистических характеристик перемежаемости, например, для ее классификации.

### **3.4 Мультистабильность в случае взаимной связи: метод расчета локальных показателей Ляпунова**

Перейдем к рассмотрению вопроса о возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации для

взаимно связанных систем, поскольку, как было установлено в рамках главы 2, перемежаемость на границе этого режима была обнаружена и в этом случае. Поскольку метод вспомогательной системы неприменим в случае взаимной связи между системами, по аналогии с главой 2 для выявления наличия мультистабильности будет использоваться метод локальных показателей Ляпунова. Для подтверждения корректности полученных результатов параллельно с взаимно связанными системами будут рассмотрены те же системы с однонаправленным типом связи, для которых возможно произвести сопоставление полученных результатов с результатами модифицированного метода вспомогательной системы. В качестве объектов исследования по-прежнему выбраны системы с различной топологией аттрактора: системы Ресслера и Лоренца с однонаправленным и взаимным типами связи.

### 3.4.1 Системы с относительно простой топологией аттрактора

В качестве примера систем с относительно простой топологией аттрактора было выбрано  $N$  пар однонаправленно и взаимно связанных систем Ресслера, описываемых следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2}^i &= -(\omega_{1,2} + \delta_{1,2})y_{1,2}^i - z_{1,2}^i + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1}^i - x_{1,2}^i), \\ \dot{y}_{1,2}^i &= (\omega_{1,2} + \delta_{1,2})x_{1,2}^i + ay_{1,2}^i, \\ \dot{z}_{1,2}^i &= b + z_{1,2}^i(x_{1,2}^i - c), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — индекс пары систем,  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10.0$ ,  $\omega_1 = 0.93$ ,  $\omega_2 = 0.95$  — управляющие параметры. Нижние индексы соответствуют номеру системы относительно отдельно взятой пары. Параметры связи  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  в случае однонаправленной связи и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  в случае взаимной связи. Управляющие параметры были выбраны такими же, как и в случае использования модифицированного метода вспомогательной системы при однонаправленной связи. Для первой системы

параметр  $\delta_1 = 0$ , для второй —  $\delta_2 \in [-10^{-8}; 10^{-8}]$ . Параметр  $\delta_2$  был добавлен во избежание ловушки численного счета, его значение соответствует случайной величине с равномерной плотностью распределения вероятности в указанном диапазоне.

Для анализа мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системе (3.6), как отмечалось выше, использовался метод расчета локальных показателей Ляпунова, успешно примененный для исследования характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации в двух однонаправленно и взаимно связанных системах в рамках главы 2 настоящей диссертационной работы. В качестве меры мультистабильности, как и ранее, рассматривалась вероятность детектирования асинхронного (в смысле режима обобщенной синхронизации) участка временной динамики по формуле (3.1), но для проверки синхронизма выполнялся расчет второго (в случае однонаправленной связи — старшего условного) показателя Ляпунова  $g_i(t) = \Lambda_2^i(t)$  и проверялось выполнение условия  $\Lambda_2^i < \Delta$ , где  $\Delta = 0.005$  — наперед заданная положительная константа. Важно отметить, что величина  $\Delta$  может быть задана произвольно, однако она должна быть достаточно малой, чтобы выполнялось условие синхронизма, но не слишком малой, чтобы исключить влияние флуктуаций второго локального показателя Ляпунова.

На рисунке 3.11 приведены зависимости спектров показателей Ляпунова, рассчитанных для одной пары однонаправленно и взаимно связанных систем Ресслера (3.6), от параметра связи. Из рисунка видно, что в обоих случаях при определенном критическом значении параметра связи второй по старшинству показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что соответствует установлению режима обобщенной синхронизации. При этом, в случае взаимной связи наблюдается множество окон периодичности (например, при  $\varepsilon \in [0, 03; 0, 036]$ ,  $\varepsilon \in [0, 044; 0, 048]$  и т.д.), характеризующихся нулевым значением стар-

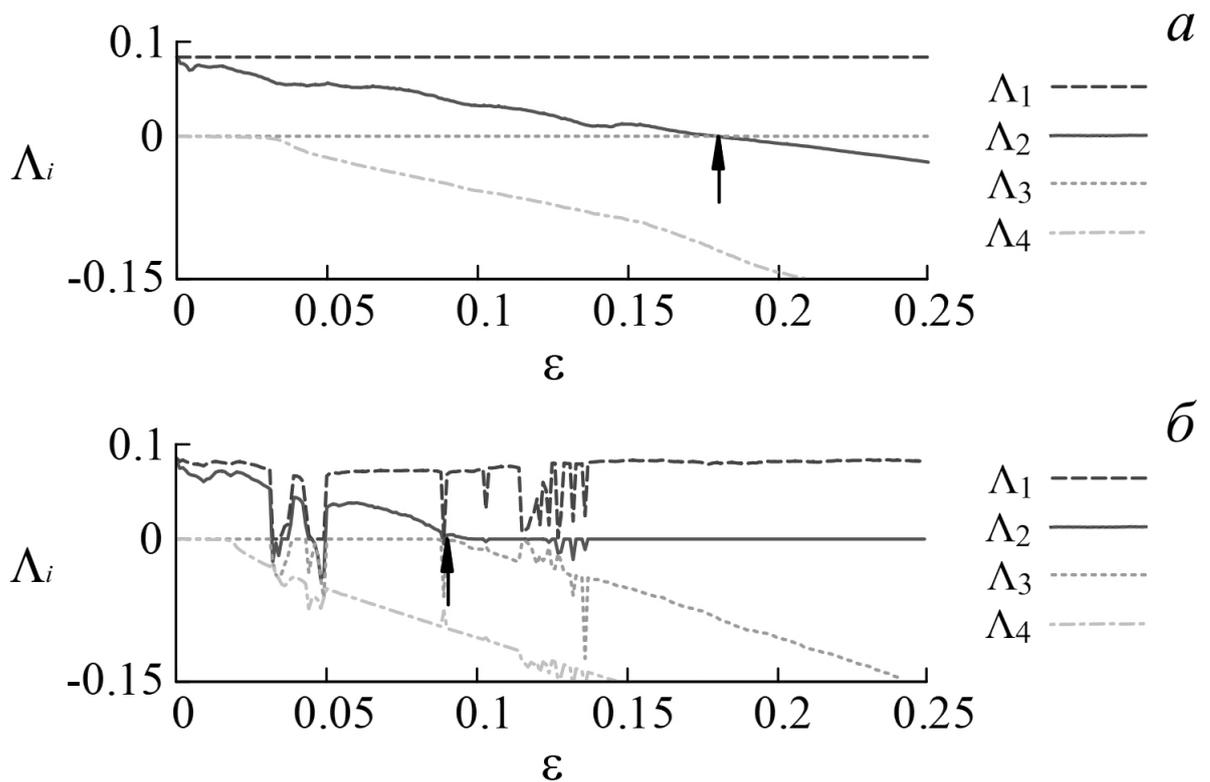


Рисунок 3.11 — Зависимости четырех старших показателей Ляпунова  $\Lambda_i$ , полученные для одной пары однонаправленно (а) и взаимно (б) связанных систем Ресслера (3.6), от параметра связи  $\varepsilon$ . Стрелки на рисунках указывают на критические значения параметра связи, соответствующие установлению режима обобщенной синхронизации:  $\varepsilon_c \approx 0.178$  в случае однонаправленной связи,  $\varepsilon_c \approx 0.09$  в случае взаимной связи

шего показателя Ляпунова. Важно отметить, что оценка порога возникновения обобщенной синхронизации при помощи спектра показателей Ляпунова оказывается немного заниженной. На практике, перемежающаяся динамика наблюдается при значениях параметра связи немного больше критического ( $\varepsilon < 0.19$  при однонаправленной связи и  $\varepsilon < 0.1$  в случае взаимной связи). Причиной этого является то, что спектр отражает динамику, усредненную по времени, и не учитывает кратковременные асинхронные колебания.

Далее для иллюстрации существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи метода локальных по-

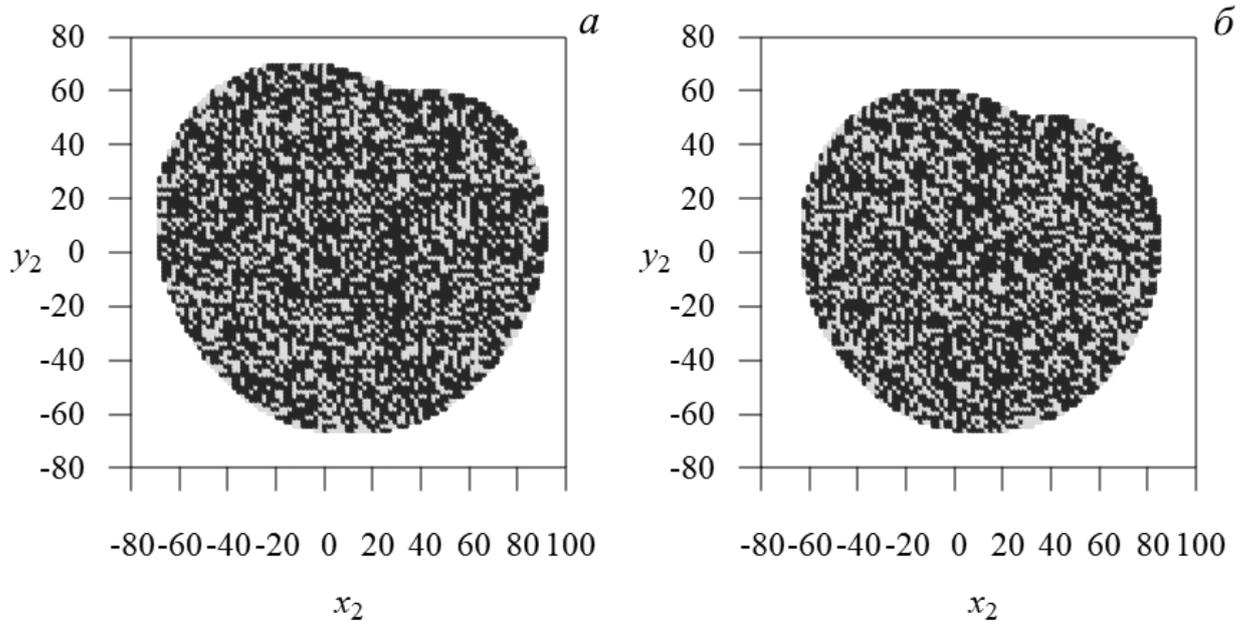


Рисунок 3.12 — Бассейны притяжения аттрактора второй системы Ресслера (3.6),  $N = 4000$  в случае однонаправленной (а) и взаимной (б) связи при значениях параметра связи  $\varepsilon = 0.17$  и  $\varepsilon = 0.095$ , соответственно, при безразмерном времени  $t = 115000$  и  $t = 55000$  соответственно. Темным цветом отмечены начальные условия, при которых наблюдается режим обобщенной синхронизации; светлым — асинхронный режим, белым — вылет траектории на бесконечность. Переходной процесс длительностью  $T_{tr} = 10^6$  был пропущен

казателей Ляпунова были построены бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний одной пары взаимодействующих систем (3.6) при фиксированных значениях параметра связи ( $\varepsilon = 0.17$  при однонаправленной связи,  $\varepsilon = 0.095$  при взаимной связи), соответствующих реализации режима перемежающейся обобщенной синхронизации, в фиксированные моменты времени. Начальные условия первой системы оставались всегда неизменными, в то время как начальные условия второй системы были равномерно заданы в области  $x_2^i \in [-80; 100]$ ,  $y_2^i \in [-80; 80]$ ,  $z_2^i = 1$ . Результат можно видеть на рисунке 3.12.

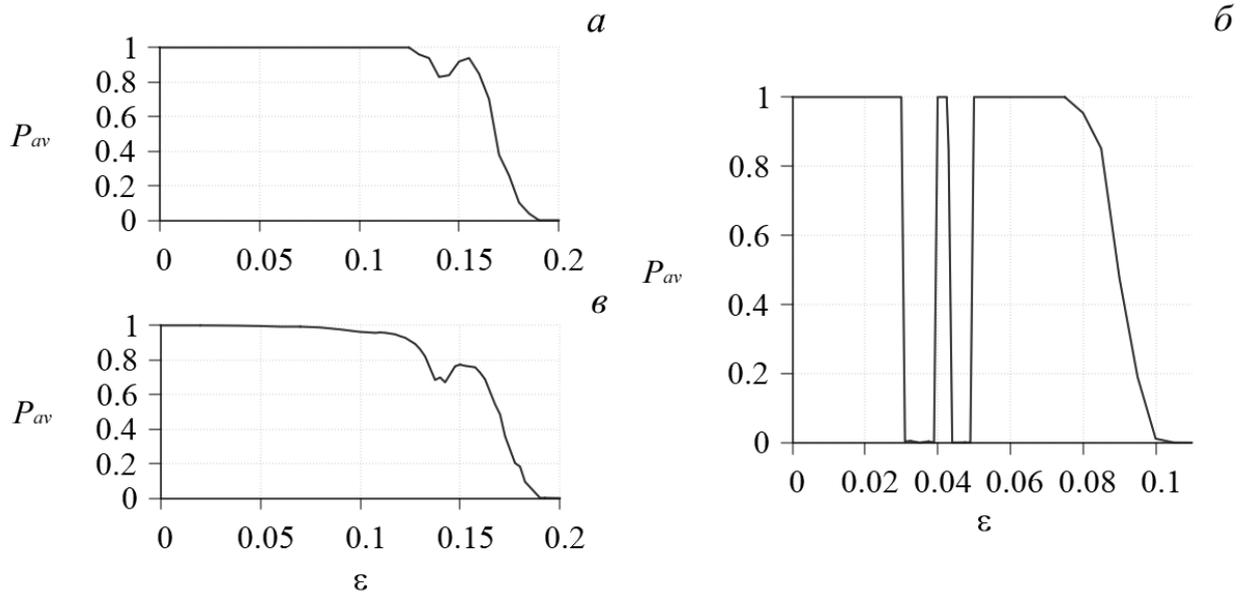


Рисунок 3.13 — Зависимость усредненной по безразмерному времени вероятности наблюдения асинхронного режима  $P_{av}$  от параметра связи  $\epsilon$  в случае однонаправленной (а, в) и взаимной (б) связи, полученная при помощи расчета локальных показателей Ляпунова (а, б) и метода вспомогательной системы (в)

Из рисунка 3.12 следует, что вблизи границы обобщенной синхронизации действительно наблюдается мультистабильность как при однонаправленной связи, так и при взаимной. Это подтверждает существование мультистабильности в контексте обобщенной синхронизации для связанных систем с простой топологией аттрактора, а также указывает на универсальность данного явления относительно типа связи.

Далее при помощи метода расчета локальных показателей Ляпунова была получена зависимость усредненной по времени меры мультистабильности  $P_{av}$  от параметра связи  $\epsilon$  как для однонаправленно (рисунок 3.13а), так и взаимно связанных систем Ресслера (рисунок 3.13б). Число рассматриваемых пар систем для обоих типов связи было установлено равным  $N = 1000$ .

Из рисунка 3.13 четко видно, что мера мультистабильности обращается в ноль при значениях параметра связи  $\epsilon_c = 0.19$  и  $\epsilon_c = 0.1$  в случае

однонаправленной и взаимной связи, соответственно. Такие оценки критических значений параметра связи полностью соответствует оценкам, приведенным ранее и полученным при помощи классических методов и подходов, что подтверждает корректность полученных результатов и возможность использования данной меры для диагностики обобщенной синхронизации. Стоит отметить, что в случае взаимной связи на зависимости меры мультистабильности имеются области периодичности в тех же диапазонах, что и на зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра связи.

### **3.4.2 Зависимость оценки меры мультистабильности от выбора метода диагностики обобщенной синхронизации**

Для подтверждения корректности результатов, полученных при помощи расчета локальных показателей Ляпунова, было проведено сравнение результатов, полученных при помощи этого метода и модифицированного метода вспомогательной системы (см. подраздел 3.2.1). Иными словами, рассмотрен вопрос о том, как изменяется мера мультистабильности в зависимости от используемого метода диагностики обобщенной синхронизации.

Для удобства сравнения на рисунке 3.13а,в представлены зависимости усредненной меры мультистабильности  $P_{av}$  от параметра связи  $\varepsilon$ , полученные для однонаправленно связанных систем Ресслера при помощи расчета локальных показателей Ляпунова (а) и метода вспомогательной системы (в). Из сопоставления результатов, полученных обоими методами, видно, что критические значения параметра связи  $\varepsilon = 0.19$ , соответствующие установлению обобщенной синхронизации, совпадают для обоих методов. Однако, одновременно с этим наблюдаются небольшие численные расхождения. Причиной их появления может служить то, что распределения  $N(P_a)$ , полученные по вероятности наблюдения

асинхронной временной динамики, различается в зависимости от используемого метода (см. рисунки 3.14). Распределения рассчитывались для временных зависимостей  $P_a(t)$  в течение всего времени наблюдения.

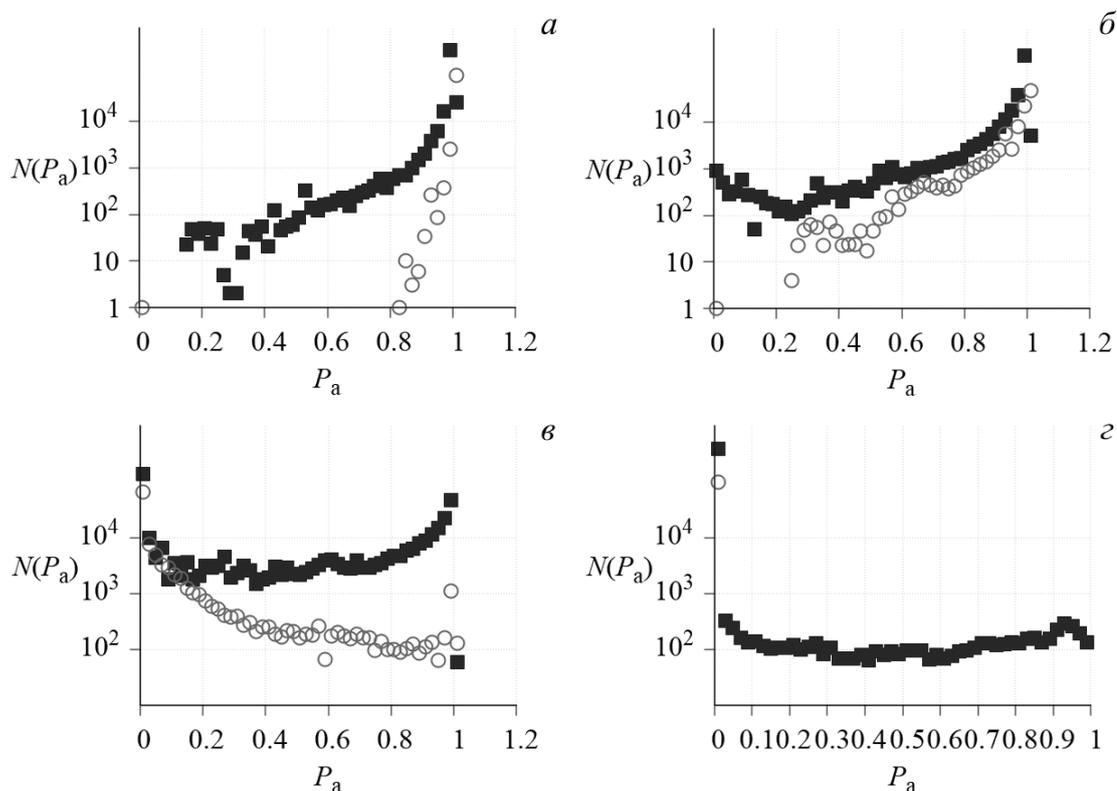


Рисунок 3.14 — Распределения вероятности наблюдения асинхронной динамики  $P_a$ , полученные для однонаправленно связанных систем Ресслера (3.2) при различных значениях параметра связи: (*a*)  $\varepsilon = 0.13$ , (*б*)  $\varepsilon = 0.15$ , (*в*)  $\varepsilon = 0.18$ , (*г*)  $\varepsilon = 0.2$ . Результаты, полученные с использованием модифицированного метода вспомогательной системы, отмечены темными квадратами; светлые круги соответствуют результату метода локальных показателей Ляпунова

При использовании обоих методов указанные распределения при малых значениях параметра связи представляют собой практически степенные функции, а при увеличении параметра связи сглаживаются в области  $P_a > 0$  с одновременным увеличением  $N(0)$ . Отклонение между результатами обоих методов можно объяснить рядом факторов, например, недостаточно оптимальным набором параметров метода локальных

показателей Ляпунова, таких как время накопления и порог возникновения синхронизации.

Тем не менее, зависимости усредненной по времени меры мультистабильности от параметра связи, полученные обоими методами, отличаются лишь количественно, но не качественно. В частности, при  $\varepsilon \approx 0.14$  наблюдается небольшое углубление, которое также присутствует и на спектре показателей Ляпунова. После установления обобщенной синхронизации ( $\varepsilon > 0.19$ ) распределения для обоих методов представляют собой только значение  $N(0)$ , т.к. асинхронные участки временной динамики отсутствуют при любых начальных условиях.

Таким образом, для исследования мультистабильности с достаточной точностью можно использовать оба подхода, как модифицированный метод вспомогательной системы, так и метод расчета локальных показателей Ляпунова.

### 3.4.3 Системы со сложной топологией аттрактора

Теперь рассмотрим вопрос о существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с относительно сложной топологией аттрактора при помощи расчета локальных показателей Ляпунова. В качестве исследуемой модели было выбрано множество пар систем Лоренца, связанных как однонаправленно, так и взаимно, описываемое следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2}^i &= -\sigma(y_{1,2}^i - x_{1,2}^i) + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1}^i - x_{1,2}^i), \\ \dot{y}_{1,2}^i &= (r_{1,2} + \delta_{1,2})x_{1,2}^i - y_{1,2}^i - x_{1,2}^i z_{1,2}^i, \\ \dot{z}_{1,2}^i &= -bz_{1,2}^i + x_{1,2}^i y_{1,2}^i, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где по-прежнему  $i = 1, 2, \dots, N$  — индекс пары систем ( $N = 4000$ ),  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$ ,  $r_2 = 35$  — управляющие параметры,  $\delta_1^i = 0$ ,  $\delta_2^i \in [0, 10^{-10}]$  — случайные числа, распределенные равномерно на указанном отрезке,

характеризующие малую расстройку введенную между вторыми системами каждой пары. Расстройка  $\delta_2^i$  введена для того, чтобы избежать ловушку численного счета. Параметры связи  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  в случае однонаправленной связи, и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  при взаимной связи. Значения управляющий параметров были выбраны такими же, как и в случае использования модифицированного метода вспомогательной системы. Начальные условия для первой системы всегда выбирались одинаковыми, а для вторых — всегда разными, но равномерно распределенными по аттракторам второй системы.

По аналогии с системами Ресслера для подтверждения наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации были рассчитаны бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний для одной пары взаимодействующих систем. Такие бассейны притяжения на плоскости начальных условий второй системы представлены на рисунке 3.15. Из рисунка видно, что при различных начальных условиях обобщенная синхронизация может как устанавливаться, так и отсутствовать, из чего следует существование мультистабильности. Причем, данное утверждение справедливо как для случая однонаправленной связи, так и для взаимной.

В то же самое время, имеются и различия в поведении бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний в зависимости от типа связи между системами. При однонаправленной связи при небольшом отклонении параметра связи от критического значения с изменением безразмерного времени можно наблюдать чередование бассейнов, демонстрирующих преимущественно синхронную динамику, и бассейнов, характеризующихся в большей мере асинхронной динамикой. Однако, при взаимной связи этого не наблюдается: при увеличении безразмерного времени соотношение начальных условий, приводящих к асинхронной и синхронной динамике, остается практически неизменным. Из этого

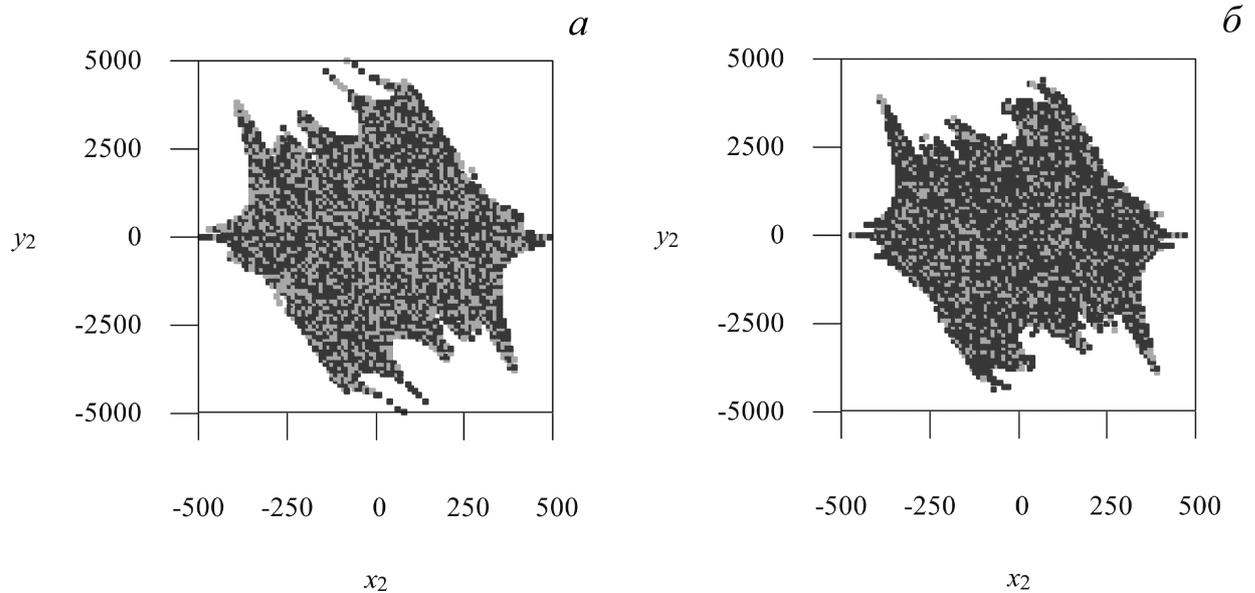


Рисунок 3.15 — Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний на плоскости начальных условий второй системы, рассчитанные в фиксированные моменты времени для одной пары систем Лоренца (3.7) при однонаправленной связи (а),  $\varepsilon = 9.94$  и при взаимной связи (б),  $\varepsilon = 5.8$ . Белый цвет соответствует вылету фазовой траектории на бесконечность, темный — установлению обобщенной синхронизации, светлый — асинхронной динамике

следует то, что получить при таком типе связи бассейны притяжения, меняющие в целом свою динамику в контексте обобщенной синхронизации, не представляется возможным для данной модели.

Наконец, при помощи метода локальных показателей Ляпунова были рассчитаны зависимости меры мультистабильности, усредненной по времени, от параметра связи. Указанные зависимости приведены на рисунке 3.16 для случаев и однонаправленной, и взаимной связи. Из рисунка 3.16 видно, что при определенных значениях параметра связи (например,  $\varepsilon > 10.2$  и  $\varepsilon > 6$  в случае однонаправленной и взаимной связи, соответственно) меры мультистабильности  $P_{av} \approx 0$ , что соответствует режиму, когда практически при любых начальных условиях после переходного процесса устанавливается режим обобщенной синхронизации

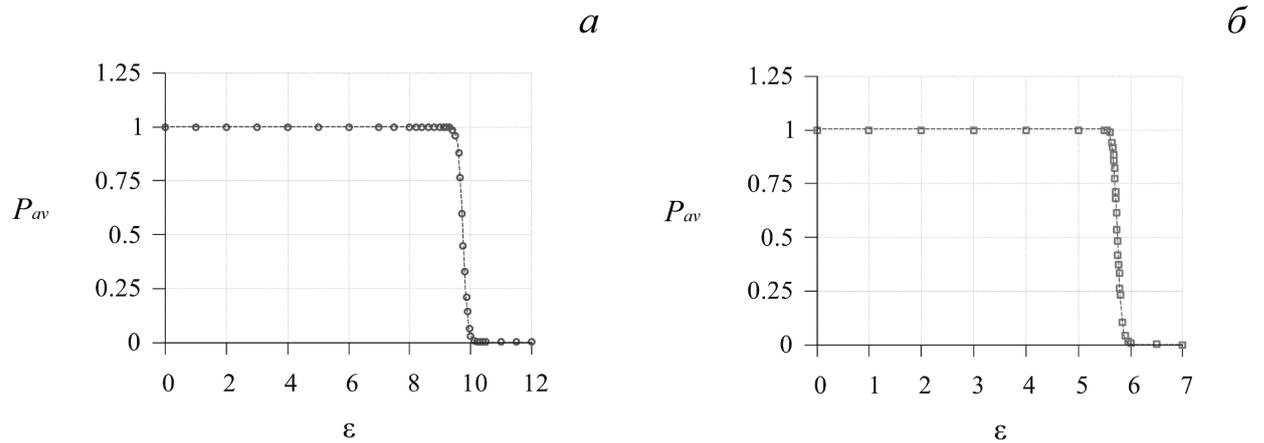


Рисунок 3.16 — Зависимости усредненной по безразмерному времени меры мультистабильности  $P_{av}$  от параметра связи  $\varepsilon$ , рассчитанные для ансамбля систем Лоренца (3.7) при однонаправленной (а) и взаимной (б) связи. Маркеры соответствуют рассчитанным значениям, пунктирные линии — аппроксимирующим функциями вида (3.8), где параметры  $a = 9.74$ ,  $b = 0.08$  при однонаправленной связи и  $a = 5.749$ ,  $b = 0.04$  при взаимной

и, следовательно, мультистабильность отсутствует. Кроме того, имеются интервалы значений параметра связи, при которых устанавливается мультистабильность, т.е.  $0 \leq P_{av} \leq 1$ :  $\varepsilon \in [9.3, 10.0]$  и  $\varepsilon \in [5.55, 6.00]$  при однонаправленной и взаимной связи, соответственно. Это подтверждает выводы, сделанные после расчета бассейнов притяжения.

Данная характеристика в случае обоих типов связи также хорошо аппроксимируется функцией спадающего сигмоида вида

$$P_{av} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x-a}{b}\right)}, \quad (3.8)$$

где  $a$ ,  $b$  — некоторые вещественные константы (см. пунктирные линии на рисунке 3.16). В данном случае указанные параметры имели значения  $a = 9.74$ ,  $b = 0.08$  при однонаправленной связи и  $a = 5.749$ ,  $b = 0.04$  при взаимной связи. Примечательно, что параметр  $a$  аппроксимирующей спадающей функции при обоих типах связи оказывается чуть меньше критического значения параметра связи. Также, стоит отметить значи-

тельное сходство между собой кривых при обоих типах связи. Если для характеристики, соответствующей взаимной связи, уменьшить масштаб на оси параметра связи в 1.7 раза, а затем аппроксимировать полученную зависимость, то ее коэффициенты будут  $a = 9.774$  и  $b = 0.068$ . Сравнение указанных коэффициентов аппроксимации с коэффициентами, полученными при однонаправленной связи, позволяет убедиться, что данные кривые отличаются между собой только количественно, но не качественно. Однако, стоит отметить, что указанный вывод справедлив только для данной рассматриваемой модели и указанная характеристика может сильно отличаться в зависимости от типа связи при рассмотрении других нелинейных систем, что было видно для взаимодействующих систем Ресслера. Достоверность полученных аппроксимирующих функций подтверждается тем, что ошибки не превысили 0.0015, а остаточная сумма квадратов оказалась не больше 0.011, что значительно меньше среднего значения исходной кривой.

### **3.5 Выводы по главе 3**

Таким образом, в рамках третьей главы диссертационной работы впервые установлено, что перемежающаяся обобщенная синхронизация в однонаправленно и взаимно связанных системах сопровождается мультистабильностью, то есть в зависимости от выбора начальных условий одной из взаимодействующих систем (в случае однонаправленной связи — ведомой) в один и тот же момент времени взаимодействующие системы могут демонстрировать как синхронное, так и асинхронное поведение. Для выявления и анализа мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации построены бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний одной из взаимодействующих систем (в случае однонаправленной связи — ведомой), а также разработан метод, основанный на расчете меры мультистабильности как вероятности

наблюдения асинхронного режима, и проверена его эффективность на системах с однонаправленным и взаимным типами связи. В качестве критериев синхронизма выступали характеристики, полученные как при помощи метода вспомогательной системы (так называемый модифицированный метод вспомогательной системы), так и расчета локальных показателей Ляпунова. Установлено, что модифицированный метод вспомогательной системы работает эффективно и в потоковых системах с различной (относительно простой и относительно сложной) топологией аттрактора, и в дискретных отображениях с однонаправленным типом связи.

Показано, что введенное определение меры мультистабильности может быть использовано также для более точного (по сравнению с традиционными методами и подходами) определения критического значения параметра связи, соответствующего возникновению режима обобщенной синхронизации, причем данное утверждение справедливо для систем и с непрерывным, и дискретным временем и для однонаправленной, и для взаимной связи. Полученные для однонаправленно связанных систем при помощи метода расчета локальных показателей Ляпунова и метода вспомогательной системы оценки меры мультистабильности хорошо согласуются друг с другом и с результатами работ предшественников, что подтверждает их корректность.

Кроме того, установлено, что предложенный подход позволяет не только дать количественную оценку мультистабильности при различных значениях параметра связи, но и может быть использован для получения статистических характеристик перемежаемости и определения ее типа. В частности, для однонаправленно связанных логистических отображений и однонаправленно связанных систем Ресслера были получены более точные распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра над-

критичности по сравнению с результатом использования классического метода вспомогательной системы, и подтверждено, что данный тип перемежаемости может быть классифицирован как перемежаемость типа on-off.

Наличие мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в различных классах динамических систем с различной топологией аттрактора, связанных как однонаправленно, так и взаимно, хорошее соответствие результатов, полученных при различных типах связи, и возможность использования обнаруженного явления для определения типа перемежаемости говорит об универсальности как явления мультистабильности в контексте обобщенной синхронизации в целом, так и методов и подходов к анализу данного типа поведения с учетом мультистабильности. Последнее может быть полезно, например, при проектировании скрытых систем связи, т.к. можно будет разработать систему, устойчивую к изменению начальных условий, что обычно характерно для физических моделей.

## Заключение

Таким образом, в рамках настоящей диссертационной работы решена научная задача, имеющая существенное значение для радиофизики, связанная с разработкой универсальных методов исследования перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с различной топологией аттрактора, а также выявлением особенностей и характеристик данного режима при помощи разработанных методов. В качестве объектов исследования были выбраны однонаправленно и взаимно связанные системы Ресслера, системы Лоренца и логистические отображения. Были получены следующие основные научные результаты:

1. Разработан универсальный метод диагностики и анализа перемежаемости на границе обобщенной хаотической синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова. Показано, что данный подход может быть использован для расчета статистических характеристик перемежаемости и классификации ее типа в системах как с относительно простой, так и относительно сложной топологией аттрактора и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи между ними.
2. При помощи метода вспомогательной системы и разработанного метода оценки локальных показателей Ляпунова исследован режим перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в случае

однонаправленной связи. Установлено, что оба метода обладают высокой точностью и скоростью, что позволяет их успешно использовать при диагностировании пережающейся обобщенной синхронизации в данном случае. Оцененные характеристики перемежаемости, полученные при помощи обоих методов, совпадают с теоретическими, что подтверждает корректность применяемых подходов.

3. При помощи разработанного метода установлено, что, как и в системах с однонаправленным типом связи, на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттрактора имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной топологией реализуется перемежаемость перескоков, что свидетельствует о независимости типа перемежаемости на границе обобщенной синхронизации от типа связи между системами.
4. Проведено исследование влияния аддитивного шума на оценку характеристик перемежаемости в однонаправленно и взаимно связанных системах. При помощи расчета локальных показателей Ляпунова установлено, что при относительно небольшой интенсивности шума он не оказывает существенного влияния на характеристики перемежаемости в случае обоих типов связи, сохраняя ее тип. При этом, применение непрерывного вейвлетного преобразования к исходному временному ряду, полученному с помощью метода вспомогательной системы, позволяет существенно увеличить точность оценки статистических характеристик перемежаемости, если амплитуда шума не превышает половину средней амплитуды исходного сигнала.
5. Обнаружена мультистабильность в режиме пережающейся обобщенной синхронизации в системах с различной топологией ат-

трактора. При помощи метода локальных ляпуновских показателей установлено, что данное явление может возникать как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между системами. При этом, для однонаправленной связи наблюдается хорошее соответствие результатов метода, основанного на использовании локальных показателей Ляпунова, и результатов, полученных методом вспомогательной системы. Разработаны подходы, позволяющие оценить меру мультистабильности и более точно выделить характерные фазы поведения в различных системах вне зависимости от начальных условий.

В завершение работы хочу выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук Москаленко Ольге Игоревне за многолетнюю продуктивную совместную работу, поддержку на протяжении всего процесса обучения, а также за всестороннюю и неоценимую помощь при подготовке настоящей диссертации. Отдельную благодарность также выражаю профессору, доктору физико-математических наук Короновскому Алексею Александровичу, за поддержку при совместной научной работе и во время учебного процесса, а также рецензентам диссертации за полезные замечания и обсуждения, позволившие повысить ее качество.

## Список литературы

- [1] А. С. Пиковский, М. Г. Розенблюм, Ю. Куртс, Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление, М.: Техносфера, 2003.
- [2] S. Boccaletti, J. Kurths, G. V. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou, The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports* 366 (2002) 1–101.
- [3] V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development.*, 2nd Edition, Springer, 2007.
- [4] A. G. Balanov, N. B. Janson, D. E. Postnov, O. V. Sosnovtseva, *Synchronization: from simple to complex*, Springer, 2009.
- [5] S. Boccaletti, A. N. Pisarchik, C. I. del Genio, A. Amann, *Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks*. 1st Edition, Cambridge University Press, 2018.
- [6] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel, Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* 51 (2) (1995) 980–994.
- [7] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization, *Phys. Rev. E* 84 (3) (2011) 037201.

- [8] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. Boccaletti, Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 036216.
- [9] E. A. Rogers, R. Kalra, R. D. Schroll, A. Uchida, D. P. Lathrop, R. Roy, Generalized synchronization of spatiotemporal chaos in a liquid crystal spatial light modulator, *Phys.Rev.Lett.* 93 (2004) 084101.
- [10] B. S. Dmitriev, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. V. Starodubov, D. I. Trubetskov, Y. D. Zharkov, First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators, *Physical Review Letters* 102 (7) (2009) 074101.
- [11] K. Pyragas, Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* 54 (5) (1996) R4508–R4511.
- [12] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Generalized synchronization: a modified system approach, *Phys. Rev. E* 71 (6) (2005) 067201.
- [13] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, Generalized synchronization onset, *Europhysics Letters* 72 (6) (2005) 901–907.
- [14] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации, *ЖТФ* 76 (2) (2006) 1–9.
- [15] А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга-Ландау, *ЖЭТФ* 130 (4(10)) (2006) 748–764.
- [16] R. A. Filatov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems, *Phys. Lett. A* 358 (2006) 301–308.

- [17] S. Guan, X. Gong, K. Li, Z. Liu, C. H. Lai, Characterizing generalized synchronization in complex networks, *New Journal of Physics* 12 (2010) 073045.
- [18] G. Keller, H. H. Jafri, R. Ramaswamy, Nature of weak generalized synchronization in chaotically driven maps, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 87 (4) (2013) 042913.
- [19] R. Gutierrez, R. Sevilla-Escoboza, P. Piedrahita, C. Finke, U. Feudel, J. Buldu, G. Huerta-Cuellar, R. Jaimes-Reategui, Y. Moreno, S. Boccaletti, Generalized synchronization in relay systems with instantaneous coupling, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 88 (5) (2013) 052908.
- [20] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, S. A. Shurygina, A. E. Hramov, Generalized synchronization in discrete maps. new point of view on weak and strong synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* 46 (2013) 12–18.
- [21] T. Stankovski, P. V. E. McClintock, A. Stefanovska, Dynamical inference: Where phase synchronization and generalized synchronization meet, *Phys. Rev. E* 89 (2014) 062909.
- [22] Н. С. Фролов, А. А. Короновский, А. Е. Руннова, А. Е. Храмов, Обобщенная синхронизация связанных генераторов на виртуальном катоде, *Изв. РАН. Сер. физическая* 78 (12) (2014) 1608–1611.
- [23] A. Ouannas, Z. Odibat, Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time, *Nonlinear Dynamics* 81 (1-2) (2015) 765 – 771.
- [24] T. A. Giresse, K. T. Crepin, T. Martin, Generalized synchronization of the extended hindmarsh–rose neuronal model with fractional order derivative, *Chaos, Solitons and Fractals* 118 (2019) 311 – 319.

- [25] S. Rakshit, D. Ghosh, Generalized synchronization on the onset of auxiliary system approach, *Chaos* 30 (11) (2020) 111102.
- [26] Z. Lu, D. S. Bassett, Invertible generalized synchronization: A putative mechanism for implicit learning in neural systems, *Chaos* 30 (6) (2020) 063133.
- [27] A. G. Tene, M. Tchoffo, B. C. Tabi, T. C. Kofane, Generalized synchronization of regulate seizures dynamics in partial epilepsy with fractional-order derivatives, *Chaos, Solitons and Fractals* 132 (2020) 109553.
- [28] C. Letellier, I. Sendina-Nadal, I. Leyva, J.-P. Barbot, Generalized synchronization mediated by a flat coupling between structurally nonequivalent chaotic systems, *Chaos* 33 (9) (2023) 093117.
- [29] D. Bagchi, R. Arumugam, V. Chandrasekar, D. Senthilkumar, Generalized synchronization in a tritrophic food web metacommunity, *Journal of Theoretical Biology* 582 (2024) 111759.
- [30] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising, *Phys. Rev. E* 72 (3) (2005) 037201.
- [31] H. Kato, M. C. Soriano, E. Pereda, I. Fischer, C. R. Mirasso, Limits to detection of generalized synchronization in delay-coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 88 (2013) 062924.
- [32] T. Lymburn, D. M. Walker, M. Small, T. Jungling, The reservoir’s perspective on generalized synchronization, *Chaos* 29 (9) (2019) 093133.
- [33] N. Frolov, V. Maksimenko, A. Lutjohann, A. Koronovskii, A. Hramov, Feed-forward artificial neural network provides

- data-driven inference of functional connectivity, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 29 (9) (2019) 091101.
- [34] S. A. Pawar, M. P. Raghunath, R. K. Valappil, A. Krishnan, K. Manoj, R. Sujith, Spatiotemporal patterns corresponding to phase synchronization and generalized synchronization states of thermoacoustic instability, *Chaos* 34 (5) (2024) 053103.
- [35] J. Terry, G. VanWiggeren, Chaotic communication using generalized synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* 12 (2001) 145–152.
- [36] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации, *Успехи физических наук* 179 (12) (2009) 1281–1310.
- [37] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise, *Physics Letters A* 374 (29) (2010) 2925–2931.
- [38] V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. S. Karavaev, D. D. Kulminskiy, An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system, *Nonlinear Dynamics* 74 (2013) 1013–1020.
- [39] S. Chishti, R. Ramaswamy, Design strategies for generalized synchronization, *Phys. Rev. E* 98 (2018) 032217.
- [40] O. Martinez-Fuentes, J. J. Montesinos-Garcia, J. F. Gomez-Aguilar, Generalized synchronization of commensurate fractional-order chaotic systems: Applications in secure information transmission, *Digital Signal Processing: A Review Journal* 126 (2022) 103494.
- [41] M. Marwan, M. Han, R. Khan, Generalized external synchronization of networks based on clustered pandemic systems-the approach of covid-19 towards influenza, *PLoS ONE* 18 (10) (2023) e0288796.

- [42] N. Kulagin, A. Andreev, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. P. Sergeev, A. Badarin, A. E. Hramov, Intermittency in predicting the behavior of stochastic systems using reservoir computing, *Phys. Rev. E* 111 (2025) 024209.
- [43] A. E. Hramov, N. Kulagin, A. N. Pisarchik, A. V. Andreev, Strong and weak prediction of stochastic dynamics using reservoir computing, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 35 (3) (2025) 033140.
- [44] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, В. А. Ханадеев, Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора, *Журнал технической физики* 89 (3) (2019) 338–341.
- [45] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Pivovarov, V. A. Khanadeev, A. E. Hramov, A. N. Pisarchik, Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization, *Physical Review E* 102 (1) (2020) 012205.
- [46] O. E. RöSSLer, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A* 57 (5) (1976) 397–398.
- [47] С. П. Кузнецов, *Динамический хаос, серия “Современная теория колебаний и волн”*, М.: Физматлит, 2001.
- [48] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators, *Europhysics Lett.* 70 (2) (2005) 169–175.
- [49] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, *Известия Российской академии наук. Серия физическая* 85 (2) (2021) 265–269.

- [50] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach, *Physical Review E* 53 (5) (1996) 4528–4535.
- [51] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, В. А. Ханадеев, Метод выделения характерных фаз поведения в системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика* 28 (3) (2020) 274–281.
- [52] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. O. Selskii, E. V. Evstifeev, On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 31 (8) (2021) 083106.
- [53] О. И. Москаленко, Е. В. Евстифеев, А. А. Короновский, Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации на основе расчета локальных показателей Ляпунова, *Письма в журнал технической физики* 46 (16) (2020) 12–15.
- [54] A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Pivovarov, E. V. Evstifeev, Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 30 (8) (2020) 083133.
- [55] E. V. Evstifeev, O. I. Moskalenko, Noise influence on the estimation of characteristics of intermittent generalized synchronization using local Lyapunov exponents, *Communications in Computer and Information Science* 1413 (2021) 161 – 168.
- [56] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Применение метода расчета локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик

- перемежающейся обобщенной синхронизации, Проблемы информатики 2 (55) (2022) 5–16.
- [57] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Применение непрерывного вейвлет-преобразования для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, Известия Российской академии наук. Серия физическая 84 (2) (2020) 300–304.
- [58] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. О. Сельский, Е. В. Евстифеев, Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима, Письма в журнал технической физики 48 (2) (2022) 3–6.
- [59] О. И. Москаленко, Е. В. Евстифеев, О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика 30 (6) (2022) 676–684.
- [60] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи расчета локальных показателей Ляпунова, Известия Российской академии наук. Серия физическая 86 (2) (2022) 282–286.
- [61] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Известия Российской академии наук. Серия физическая 87 (1) (2023) 115–119.

- [62] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Программа для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи метода непрерывного вейвлетного преобразования. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020664348, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 12.11.2020 (2020).
- [63] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации методом расчета локальных показателей Ляпунова. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661280, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 21.09.2020 (2020).
- [64] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для построения бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний ведомой системы, находящейся вблизи границы обобщенной синхронизации с ведущей системой. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023680961, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 08.10.2023 (2023).
- [65] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Метод выделения характерных фаз поведения в связанных системах, находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, in: Нелинейные волны – 2018. XVIII научная школа. Тезисы докладов молодых ученых, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2018, сс. 46–47.
- [66] Е. В. Евстифеев, Перемежающаяся обобщенная синхронизация в двух связанных хаотических системах, in: Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Сборник трудов XIII Все-

русской конференции молодых ученых. 2018. Издательство: Техно-Декор, Саратов, 2018, сс. 60–61.

- [67] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Применение непрерывного вейвлет-преобразования для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, in: Труды школы-семинара “Волны-2019”. Нелинейная динамика, Москва, 2019, сс. 10–13.
- [68] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Определение характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи непрерывного вейвлет-преобразования, in: Материалы XII Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), Саратов, 2019, сс. 71–72.
- [69] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Применение локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, in: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции. Под ред. проф. В.П. Гергеля, Нижний Новгород, 2020, Нижний Новгород, 2020, сс. 156–157.
- [70] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи расчета локальных показателей Ляпунова, in: Труды школы-семинара “Волны-2021”. Нелинейная динамика и информационные системы, Москва, 2021, сс. 2–4.
- [71] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Применение локальных показателей Ляпунова для исследования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации, in: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXI Междуна-

- родной конференции. Сер. “Суперкомпьютерные дни в России”, Нижний Новгород, 2021, Нижний Новгород, 2021, сс. 108–111.
- [72] Е. В. Евстифеев, Studying the presence of multistability using the local Lyapunov exponents, in: Представляем научные достижения миру. Естественные науки – Presenting academic achievements to the world. Natural science. Материалы XIII научной конференции молодых ученых. Выпуск 12, Саратов, 2022, Саратов, 2022, сс. 68–73.
- [73] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, in: Труды школы-семинара “Волны-2022”. Нелинейная динамика и информационные системы, Москва, 2022, сс. 13–14.
- [74] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Е. В. Евстифеев, В. А. Ханадеев, Особенности обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, in: Динамические системы. Теория и приложения. Тезисы докладов международной конференции, Нижний Новгород, 2022, сс. 66–67.
- [75] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Оценка меры мультистабильности в однонаправленно связанных хаотических системах с различной топологией аттрактора, in: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXII Международной конференции. Сер. “Суперкомпьютерные дни в России”, Нижний Новгород, 2022, Нижний Новгород, 2022, сс. 32–34.
- [76] Е. В. Евстифеев, О. И. Москаленко, Оценка меры мультистабильности в однонаправленно связанных хаотических системах с различной топологией аттрактора, in: Нелинейные дни в Саратове для

молодых – 2023. Материалы XXX Всероссийской научной конференции. Выпуск 17, Саратов, 2023, сс. 25–26.

- [77] O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, V. A. Khanadeev, E. V. Evstifeev, Intermittent behavior near the boundary of generalized synchronization in systems with different topologies of attractors, in: Proceedings of the VIII Scientific School “Dynamics of Complex Networks and their Applications” (DCNA’2024), Калининград, 2024, pp. 177–178.
- [78] O. E. Rossler, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A* 71 (2-3) (1979) 155–157.
- [79] N. F. Rulkov, Images of synchronized chaos: experiments with circuits, *Chaos* 6 (1996) 262–279.
- [80] O. Moskalenko, A. Koronovskii, A. Hramov, Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 064901.
- [81] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev, Experimental observation of phase synchronization, *Phys. Rev. E* 54 (2) (1996) 2115–2117.
- [82] О. И. Москаленко, О. А. Кириллов, Возможность количественного определения границы обобщенной синхронизации при помощи методов ближайших соседей и фазовых трубок, *Письма в ЖТФ* 49 (17) (2023) 39–42.
- [83] О. И. Москаленко, В. А. Ханадеев, А. А. Короновский, Метод диагностики обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией хаотического аттрактора, *Письма в ЖТФ* 44 (19) (2018) 87–95.

- [84] K. Pyragas, Conditional Lyapunov exponents from time series, *Phys. Rev. E* 56 (5) (1997) 5183–5188.
- [85] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application, *Meccanica* 15 (1980) 9–30.
- [86] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16 (3) (1985) 285–317.
- [87] F. Grond, H. Diebner, S. Sahle, A. Mathias, S. Fischer, O. Rossler, A robust, locally interpretable algorithm for Lyapunov exponents, *Chaos Solitons & Fractals* 16 (2003) 841–852.
- [88] П. В. Попов, Перемежающаяся обобщенная синхронизация в распределенных автоколебательных средах на примере комплексных уравнений Гинзбурга-Ландау, *Письма в ЖТФ* 33 (18) (2007) 61–69.
- [89] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Об установлении режима обобщенной синхронизации в хаотических осцилляторах, *Письма в ЖТФ* 32 (3) (2006) 40–48.
- [90] J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel, Characterization of on-off intermittency, *Phys. Rev. E* 49 (2) (1994) 1140–1150.
- [91] P. W. Hammer, N. Platt, S. M. Hammel, J. F. Heagy, B. D. Lee, Experimental observation of on-off intermittency, *Phys. Rev. Lett.* 73 (8) (1994) 1095–1098.
- [92] E. Lorenz, The Predictability of Hydrodynamic Flow, *Transactions of the New York Academy of Sciences* 25 (4) (1963) 409–432.

- [93] А. А. Короновский, А. А. Тыщенко, А. Е. Храмов, Исследование распределения турбулентных фаз при разрушении синхронизации с запаздыванием, Письма в ЖТФ 31 (21) (2005) 1–8.
- [94] А. А. Короновский, И. М. Минюхин, А. А. Тыщенко, А. Е. Храмов, И. С. Мидзяновская, Е. Ю. Ситникова, Е. L. Van Luijtelaaг, С. М. Rijn, Применение непрерывного вейвлет-преобразования для анализа перемежающегося поведения, Прикладная нелинейная динамика 15 (4) (2007) 34–54.
- [95] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, Анализ фазовой хаотической синхронизации с помощью непрерывного вейвлетного анализа, Письма в ЖТФ 30 (14) (2004) 29–36.
- [96] Б. Шахтарин, Ю. Сидоркина, Х. А.В., Исследование хаотической синхронизации каскадно-связанных систем фазовой автоподстройки с применением вейвлет-анализа, Радиотехника и электроника 62 (11) (2017) 1097–1105.
- [97] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, M. Kennel, Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor, Journal of Nonlinear Science (1) (1991) 175–199.
- [98] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, М. К. Куровская, Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise, Phys. Rev. E 78 (2008) 036212.
- [99] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application, Meccanica 15 (1) (1980) 21–30.

- [100] Z. Zheng, X. Wang, M. C. Cross, Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 056211.
- [101] А. А. Короновский, О. И. Москаленко, С. А. Шурыгина, Влияние степени взаимности связи на установление типов хаотической синхронизации, *Радиотехника и электроника* 56 (12) (2011) 1490–1500.
- [102] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора, *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика* 21 (3) (2021) 233–241.
- [103] В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, О влиянии характеристик шумового сигнала на установление обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, *Известия Российской академии наук. Серия физическая* 86 (2) (2022) 283–287.
- [104] О. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, A. A. Ovchinnikov, Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment, *Europhysics Journal B* 82 (1) (2011) 69–82.
- [105] R. Toral, C. R. Mirasso, E. Hernández-Garsia, O. Piro, Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems, *Chaos* 11 (3) (2001) 665–673.
- [106] E. N. Lorentz, Deterministic nonperiodical flow, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130.
- [107] A. Pisarchik, U. Feudel, Control of multistability, *Physics Reports* 540 (4) (2014) 167–218, control of multistability.
- [108] F. Atteneave, Multistability in perception, *Scientific American* 225 (6) (1971) 62–71.

- [109] Б. П. Безручко, Е. П. Селезнев, Е. В. Смирнов, Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода, Письма в ЖТФ 21 (8) (1995) 12–17.
- [110] E. Eschenazi, H. G. Solari, R. Gilmore, Basins of attraction in driven dynamical systems, Phys. Rev. A 39 (1989) 2609–2627.
- [111] R. Moreno-Bote, J. Rinzel, N. Rubin, Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability, Journal of Neurophysiology 98 (2007) 1125–1139.
- [112] U. Feudel, Complex dynamics in multistable systems, International Journal of Bifurcation and Chaos 18 (06) (2008) 1607–1626.
- [113] М. В. Поздняков, А. В. Савин, Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика 18 (5) (2010) 44–53.
- [114] D. E. Postnov, T. E. Vadivasova, O. V. Sosnovtseva, A. G. Balanov, V. S. Anishchenko, E. Mosekilde, Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 9 (1) (1999) 227–232.
- [115] R. Carvalho, B. Fernandez, R. Vilela Mendes, From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps, Physics Letters A 285 (5) (2001) 327–338.
- [116] V. Astakhov, A. Shabunin, W. Uhm, S. Kim, Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism, Phys. Rev. E 63 (2001) 056212.
- [117] A. S. Pikovsky, O. Popovych, Y. Maistrenko, Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 044102.

- [118] A. Campos-Mejía, A. N. Pisarchik, D. A. Arroyo-Almanza, Noise-induced on-off intermittency in mutually coupled semiconductor lasers, *Chaos, Solitons and Fractals* 54 (96–100).
- [119] M. S. Patel, U. Patel, A. Sen, G. C. Sethia, C. Hens, S. K. Dana, U. Feudel, K. Showalter, C. N. Ngonghala, R. E. Amritkar, Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled rössler oscillators, *Phys. Rev. E* 89 (2014) 022918.