Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу М.Ю. Игнатьева
Обратные задачи рассеяния для сингулярных дифференциальных операторов,
представленную на соискание ученой степени доктора физико –
математических наук по специальности
1.1.1. – "Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Актуальность темы диссертации

Диссертационная работа М.Ю. Игнатьева посвящена обратным задачам спектрального анализа. Центральное место в ней занимают обратные задачи рассеяния для обыкновенных дифференциальных операторов с особенностью, а также на некомпактных геометрических графах. Кроме того, изучаются задачи восстановления интегро- дифференциальных операторов дробного порядка по спектру.

Теория обратных спектральных задач имеет богатую историю, берущую начало в ставших уже классическими работах Г.Борга, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, В.А. Марченко, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева. Дальнейшее развитие указанной теории связано с результатами Р. Билса, Р. Койфмана, П. Дейфта, К. Томея, С. Чжоу, В.А. Юрко. В настоящий момент теория обратных спектральных задач продолжает активно развиваться, здесь следует упомянуть работы А.А. Шкаликова, А.М. Савчука, Р. Гринива, Я. Микитюка, С. Альбеверио, М.И. Белишева, Н.П. Бондаренко и ряда других математиков. Обратные спектральные задачи имеют много приложений в различных областях естествознания и техники. В то же время, хорошо известны глубокие связи теории таких задач с теорией интегрируемых систем. Указанные обстоятельства обуславливают актуальность тематики работы.

Научная новизна диссертационного исследования

В первых двух главах работы изучается задача рассеяния на полуоси $x \in (0, \infty)$ для оператора

$$\ell y = B_0 \left(y' - (x^{-1}A + q(x))y\right), \tag{1}$$

где A, B_0 – постоянные матрицы $n \times n$, а матрица-функция q принадлежит $L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $p > 2$. Оператор вида (1) можно рассматривать как далеко идущее обобщение радиального оператора Дирака, в работе он изучается в наиболее сложном случае, когда $n > 2$ и элементы диагональной матрицы B_0 не лежат на одной прямой. Последнее обстоятельство, как известно, приводит к появлению трудностей принципиального характера, наиболее существенно усложняющих изучение именно обратных спектральных задач.

Глава 1 посвящена построению и исследованию так называемых решений типа Вейля, играющих ключевую роль в дальнейшем при исследовании и решении обратной задачи рассеяния. Здесь впервые, насколько нам известно, к операторам вида (1) применена техника фундаментальных тензоров Р. Билса. Предложенное автором развитие указанного подхода позволило преодолеть ограничения методов, применявшихся ранее в работах В.А. Юрко и его учеников, в частности, отказаться от традиционно возникающих при исследовании операторов с особенностью при $n > 2$ требований быстрого убывания $q(x)$ при $x \to 0$. Разработанный автором метод построения решений типа Вейля позволил также отказаться от требований наличия производной у потенциала q. Важно отметить, что возникающие здесь трудности нетривиальны даже в случае $A = 0$. В ходе построения решений типа Вейля автором также введены и исследованы интегральные преобразования, ядра которых строятся по решениям невозмущенной системы $\ell_0 y = \rho y$ со спектральным параметром ρ, отвечающей оператору (1) при $q = 0$. Интегральные преобразования этого типа можно рассматривать как обобщение интегральных преобразований Фурье – Ханкеля, их изучение играет важную роль в исследовании решений типа Вейля и представляет самостоятельный интерес.

В главе 2 дается решение обратной задачи восстановления потенциала $q(\cdot)$ оператора (1) (матрицы B_0, A считаются известными) по заданным данным рассеяния, в роли которых выступает матрица сопряжения для матриц, составленных из решений типа Вейля, на границах некоторых специальным образом вводимых секторов; дискретный спектр предполагается пустым. Полученные результаты включают в себя теорему единственности, конструктивную процедуру решения и характеризацию данных рассеяния, т.е. описание таких матриц-функций, заданных на соответствующем объединении лучей, которые являются данными рассеяния для некоторого оператора вида (1) с потенциалом $q \in L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$ и пустым дискретным спектром.

В основе метода решения обратной задачи лежат идеи метода контурного интеграла, использующего аналитические свойства решений типа Вейля как функций спектрального параметра. Применение соответствующих идей к обратным задачам — весьма нетривиальное в силу нелинейности последних — привело к появлению в 80-х годах метода спектральных отображений В.А. Юрко; другой вариант метода контурного интеграла, применительно к задачам рассеяния на оси, был предложен в работах Р. Билса и его соавторов.

Важно отметить, что при решении обратной задачи рассеяния для операторов с особенностью (1) ни метод В.А. Юрко, ни метод Р. Билса в их оригинальной формулировке неприменимы. Предложенный М.Ю. Игнатьевым подход являет собой фактически синтез основных идей каждого из них. При доказательстве достаточности в основной теореме главы 2 автором преодолен ряд существенных трудностей. Разработанные им для этих целей методы исследования позволили также впервые получить легко проверяемые достаточные условия разрешимости обратной задачи при $n > 2$ для операторов с особенностью.

В третьей главе автором получен ряд результатов о решении обратных задач рассеяния на некомпактных геометрических графах. В частности, дано конструктивное решение обратной задачи рассеяния для оператора Штурма – Лиувилля с бесселевой особенностью на графе-звезде, причем в отличие от других исследований аналогичных объектов, особенность локализована во внутренней вершине графа. Данное исследование тесно связано с результатами первых двух глав. Принципиально новым здесь является решение задачи в предположении наличия простого невещественного дискретного спектра. Кроме того, в третьей главе дано конструктивное решение обратной задачи рассеяния на графе с циклом. Также доказана терема единственности для случая простейшего графа с циклом, на луче которого задан оператор высокого порядка, а порядок оператора на цикле равен трем.

В четвертой главе диссертационной работы дано конструктивнное решение обратной задачи восстановления некоторых интегро-дифференциальных операторов по спектру некоторой краевой задачи. Известно, что решение обратных задач для нелокальных операторов сталкивается с целым рядом трудностей принципиального характера и методы, разработанные для дифференциальных операторов здесь, как правило, не работают.

Предложенный в главе 4 метод решения обратной задачи для использует специфику рассматриваемого специального класса операторов и состоит к сведению задачи к некоторому нелинейному интегральному уравнению; для получаемого уравнения доказана его разрешимость. Полученные здесь результаты являются обобщением на случай операторов дробного порядка результатов, полученных ранее В.А. Юрко, С.А. Бутериным, Н.П. Бондаренко для вольтерровских возмущений операторов Штурма – Лиувилля и Дирака и сверточных возмущений степени оператора дифференцирования. Указанное обобщение нетривиально и существенно опирается на предложенные автором формулы умножения для функций типа Миттаг - Леффлера.

Отметим несколько замечаний к диссертационной работе М.Ю. Игнатьева.

1. Текст сложен для восприятия и насыщен специфическими обозначениями, часть из которых помещены во введении ко всей работы, другие же определяются внутри параграфов. Возможно, имело бы смысл определять их в начале соответствующей главы.

2. Важным дополнением к полученной автором характеризации данных рассеяния операторов с особенностью могли бы стать более тонкие результаты, касающиеся связи свойств потенциала с данными рассеяния. Например, было бы интересно описать классы потенциала, обеспечивающих гельдеровость данных рассеяния, а также выявить свойства данных рассеяния, приводящих к дифференцируемости потенциала.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку результатов диссертации и не снижают общей ценности диссертационной работы. Первое из них носит редакционный характер, а второе фактически предлагает направление дальнейших исследований.

Общая оценка диссертационной работы

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертационной работы могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, а также при решении обратных спектральных задач, возникающих в различных областях квантовой механики, оптики, теории упругости. Эти результаты являются достоверными и математически строго доказаны. Они опубликованы в центральных российских и международных журналах, и апробированы на многочисленных российских и международных конференциях.

В целом, представленная М.Ю. Игнатьевым диссертация является законченной научно - квалификационной работой, выполненной на высоком научном уровне и полностью соответствующей требованиям новизны, научно - практической значимости и достоверности, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико - математических наук соответствующим пунктам действующего «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, диссертационная работа Игнатьева М.Ю. "Обратные задачи рассеяния для сингулярных дифференциальных операторов" , является законченной научно- квалификационной работой, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в теории обратных спектральных задач, а ее автор – Игнатьев Михаил Юрьевич, без сомнения, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ" .

Ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.02,
профессор А.П. Солдатов

Подпись А.П. Солдатова удостоверяю:
ученый секретарь ФИЦ ИУ РАН,
д.т.н. В.Н. Захаров

27 мая 2024 г.

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы:
119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40,
ФИЦ ИУ РАН.
Тел.: 8 (499) 135 04 40; e-mail: wcan@ccas.ru
Контактные данные: А.Солдатов,
тел. +7(910) 223 86 54, e-mail: soldatov48@gmail.com