«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по науке, инновациям
и цифровизации
ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный Университет»

______________ Костин Д. В.

«28» мая 2024 г.

ОТЗЫВ
ведущей организации о научно-практической ценности диссертации
Игнатьева Михаила Юрьевича
на тему «Обратные задачи рассеяния для
сингулярных дифференциальных операторов»
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности: 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации М.Ю. Игнатьева изучаются обратные задачи рассеяния, а также обратные спектральные задачи в других постановках для одномерных дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов. Автору удалось найти новые подходы к исследованию таких задач и получить результаты, вносящие существенный вклад в спектральную теорию обыкновенных дифференциальных операторов, а также интегро-дифференциальных операторов и дифференциальных систем.

Актуальность темы. Теория обратных спектральных задач является одним из важнейших разделов спектральной теории операторов. Такие задачи имеют много приложений в различных областях естествознания и техники, а также многочисленные глубокие связи с другими направлениями современной математики. Берущая начало в революционных работах В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева, теория обратных спектральных задач продолжает активно развиваться в настоящее время, здесь следует упомянуть работы В.А. Юрко, А.А. Шкаликова, А.М. Савчука, М.И. Белишева, М.М. Маламуда, Е.Л. Коротяева, П. Курасова, Н.П. Бондаренко, С.А. Бутерина, а также многочисленные работы зарубежных математиков, таких как Р.

Гринив, Я. Микитюк, С. Альбеверио, Ф. Гестези, Б. Саймон и др. Несмотря на большое количество исследований, многие вопросы теории, в силу их сложности, оставались недостаточно изученными, к таковым можно отнести рассматриваемые в диссертации вопросы теории рассеяния для матричных операторов с особенностью, теории рассеяния для операторов на некомпактных графах, вопросы восстановления нелокальных операторов.

Диссертация состоит из четырех глав, введения и заключения, объем работы составляет 273 страницы, список литературы содержит 143 наименования.

Главы 1 и 2 посвящены построению теории рассеяния на полуоси для матричного оператора с регулярной особенностью

$$\ell y = B_0(y' - (x^{-1}A + q(x))y), \quad (1)$$

причем исследование проводится в наиболее технически сложном случае, когда элементы диагональной матрицы B_0 не лежат на одной прямой. Изучение оператора (1) сталкивается с целым рядом принципиальных трудностей и в заявленной автором общности – коэффициенты $q_{kj}(\cdot)$ предполагаются лишь принадлежащими пересечению пространств $L_1(0,\infty)$ и $L_p(0,\infty)$ при некотором $p > 2$ – в данном направлении не было сколько-нибудь законченных результатов. В работе фактически предложен принципиально новый метод исследования решений уравнения $\ell y = \rho y$ в случае оператора (1). Существенные трудности преодолены также при решении обратной задачи теории рассеяния: известные методы Р. Билса и В.А. Юрко в их оригинальной формулировке здесь неприменимы. Важным и (традиционно) весьма нетривиальным является проведенное исследование необходимых и достаточных условий разрешимости. Особого упоминания здесь заслуживают выявленные автором свойства данных рассеяния, возникающие вследствие наличия в операторе слагаемого $x^{-1}A$ и не имеющие место в случае $A = 0$.

В **главе 3** изучаются обратные задачи рассеяния на некомпактных геометрических графах. Несмотря на то, что автор ограничился изучением графов со сравнительно простой геометрией, возникающие здесь трудности носят принципиальный характер, методы, предложенные для их преодоления, нетривиальны, а полученные результаты допускают глубокие обобщения. Особого внимания заслуживает исследование обратной задачи на графе с циклом в случае, когда на цикле задан оператор третьего порядка. Также представляет интерес решение обратной задачи рассеяния на графе-звезде, в вершине которой потенциалы имеют бесселеву особенность. В обоих случаях проведенное автором исследование носит новаторский характер, как по полученным результатам, так и по постановке задач.

В **главе 4** дается решение задачи восстановление некоторых интегро-дифференциальных операторов. Задачи восстановления нелокальных операторов стоят особняком в теории обратных задач, они, вообще говоря, неинтегрируемы, для их изучения не разработано сколько-нибудь общих методов. Интегро-дифференциальные операторы, изучаемые в работе, имеют специальную структуру, что позволяет существенно продвинуться в их изучении, в частности, дать конструктивную процедуру решения рассматриваемой обратной задачи. Несмотря на то, что М.Ю. Игнатьев не является первооткрывателем данного направления – ключевые наблюдения были сделаны ранее в работах В.А. Юрко и С.А. Бутерина – ему удалось обобщить полученные ранее результаты на случай операторов дробного порядка. Отметим, что такое обобщение весьма нетривиально и опирается на полученные автором ранее глубокие результаты, касающиеся вопросов линейной эквивалентности вольтерровских операторов оператору дробного интегрирования Римана – Лиувилля.

Достоверность и обоснованность результатов диссертации обеспечивается строгими математическими доказательствами. Все результаты диссертации являются **новыми** и получены автором самостоятельно. Все основные результаты своевременно **опубликованы** в 13 работах автора, 12 из которых – статьи в журналах, рекомендуемых ВАК и индексируемых WoS, Scopus, RSCI. **Автореферат** диссертации верно и полно отражает ее содержание.

Работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертационной работы могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, а также при решении обратных спектральных задач, возникающих в различных областях квантовой механики, оптики, теории упругости. Стоит отметить, что все методы решения обратных задач, разработанные автором, конструктивны. На их основе могут быть построены численные алгоритмы, применимые в приложениях.

Оценивая диссертационную работу М.Ю. Игнатьева, можно сказать, что она представляет собой оригинальное законченное исследование, вносящее существенный вклад в теорию обратных спектральных задач и в спектральную теорию операторов в целом.

Замечания.

1. Общепринятое обозначение производной k -го порядка $q^{(k)}(x)$ имеет в главах 1, 2 совершенно иной смысл, что не облегчает прочтение и без того непростого текста.

2. Ограничения, налагаемые на объект исследования в §3 главы 3, формулируются в терминах свойств решений типа Вейля. Более прозрачными и легко проверяемыми были бы условия, сформулированные в терминах характеристических функций, которые, предположительно, можно было бы ввести, используя технику главы 1.

3. В §1 главы 3 для восстановления потенциала предлагается формула $q_k(x) = f_k''(x,\rho) \big/ f_k(x,\rho) + \rho^2 - \nu_{0k} x^{-2}$. В то же время в теории обратных задач хорошо известны формулы восстановления иного типа, не предполагающие деления и двукратного дифференцирования решений основного уравнения, использование таких формул на практике предпочтительнее. Одна из таких формул получена автором в главе 2. Возможно ли получить аналогичные формулы для задач, решаемых в главе 3?

Важно отметить, что приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации и не ставят под сомнение результаты работы, в двух последних случаях речь идет скорее о возможных направлениях дальнейших исследований.

Заключение. Таким образом, диссертация Игнатьева Михаила Юрьевича является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, что соответствует требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв рассматривался и обсуждался на расширенном заседании кафедры математического и прикладного анализа 15.04.2024 г. протокол № 9.

Заведующий кафедрой математического
и прикладного анализа
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,
доктор физико-математических наук,
профессор

телефон 8(473) 220 8348
shashkin@amm.vsu.ru (А.И. Шашкин)

Профессор кафедры уравнений в частных производных
и теории вероятностей
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,
доктор физико-математических наук,
профессор,

телефон 8 950 758 15 14
wwprov@mail.ru (В.В. Провоторов)