Отзыв

официального оппонета о диссертации
Игнатьева Михаила Юрьевича
"Обратные задачи рассеяния для
сингулярных дифференциальных операторов",
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация М.Ю. Игнатьева посвящена обратным задачам теории дифференциальных операторов. Целью работы является исследование задачи восстановления оператора по спектральным характеристикам, в том числе данным рассеяния. Определение потенциала дифференциального оператора по спектральным данным является классической задачей, берущей свое начало в работе Г.Борга, в которой была установлена единственность определения потенциала оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам. Дальнейшее развитие теории обратных задач связано с работами В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева и многих других исследователей. В работах В.А. Марченко для изучения вопроса разрешимости обратной спектральной задачи были применены операторы преобразования. В работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана обратная спектральная задача была сведена к линейному интегральному уравнению, а В.А. Марченко получил интегральное уравнение, позволяющее определить потенциал непосредственно по данным рассеяния. Обратные задачи являются предметом интенсивных исследований и в настоящее время. Это связано во многом с их исключительно важными приложениями в квантовой механике, геофизике, электродинамике и других областях. Другим важным применением теории обратных задач является ее использование в теории солитонов, позволяющее свести задачи нелинейной теории волн к прямой и обратной задачам рассеяния.

Актуальной проблемой является расширение классов обратных задач, доступных исследованию. Теорию необходимо распространить на задачи, связанные с дифференциальными уравнениями либо системами высокого порядка. Другое направление исследований связано с расширением класса потенциалов систем уравнений, в том числе рассмотрением уравнений с потенциалами, имеющими особенности.

В первой и второй главах диссертации рассматривается обратная задача на полуоси $(0,\infty)$ для оператора первого порядка с особенностью в пространстве вектор - функций; уравнение $\ell y = \rho y$ для такого оператора эквивалентно системе дифференциальных уравнений вида

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y, B = diag(b_1, \dots, b_n),$$

где A, B - постоянные матрицы, причем комплексные числа $b_1, \dots, b_n$ не лежат на одной прямой. Подобная система является обобщением системы уравнений Дирака и Захарова-Шабата. В то же время рассматриваемая задача существенно сложнее, поскольку для указанных систем числа $b_1, \dots, b_n$ лежат на прямой в комплексной плоскости. Классические результаты В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, относящиеся к оператору Штурма-Лиувилля либо Дирака, основаны на использовании операторов преобразования. Их непосредственное применение для операторов указанного вида малоэффективно. Автор применяет метод спектральных отображений, разработанный В.А. Юрко в 1980-х годах. Подобный подход использовался также в работах Р. Билса, Р. Койфмана, П. Дейфта и других в теории рассеяния. В силу неинтегрируемости слагаемого $x^{-1}A$ необходимо внести его в главную часть, что приводит к невозмущенной системе $y' = (\rho B + x^{-1}A)y$. Наличие сингулярного члена и произвольный порядок системы уравнений существенно усложняет вид фундаментальных решений и, как следствие, решений типа Вейля, играющих ключевую роль в вопросах, относящихся к теории обратной задачи рассеяния.

В первой главе автором разработан метод исследования решений Вейля, для построения которых используются вспомогательные тензорно - значные функции ("фундаментальные тензоры"), являющиеся решениями некоторых уравнений типа Вольтерра. Подобное представление фундаментальных тензоров позволяет доказать существование решений изучаемой системы с требуемой асимптотикой. Основной результат сформулирован в теоремах 1.8 и 1.11, в которых устанавливается существование решений Вейля, имеющих заданное поведение в нуле и в ∞. Результаты получены при весьма общих требованиях на матричную функцию $q(x)$, которые сформулированы в терминах суммируемости, причем от функции не требуется даже непрерывности.

Во второй главе автор устанавливает разрешимость обратной задачи рассеяния для указанной системы при условии отсутствия у дифференциального оператора дискретного спектра. Обратная задача формулируется как задача определения потенциала q по матричной функции $v(\rho)$, определяющей условия сопряжения для решений типа Вейля $\Psi_+(x,\rho) = \Psi_-(x,\rho)v(\rho)$, где ρ - спектральный параметр. Условия сопряжения ставятся на лучах, ограничивающих секторы комплексной плоскости, в которых определяются решения типа Вейля. Данная постановка задачи эквивалентна в случае системы Дирака обратной задаче рассеяния восстановления потенциала по коэффициенту отражения падающей плоской волны. Для решения обратной задачи в работе построены интегральные уравнения, позволяющие определить исходный потенциал. Значительную сложность представляет исследование вопроса об условиях, которым должна удовлетворять матричная функция $v(\rho)$ для разрешимости обратной задачи. Основной результат сформулирован в теореме 2.7, в которой сформулированы требования, при которых $v(\rho)$ определяет данные рассеяния для потенциала из указанного класса. В теореме 2.8 и ее следствии 2.2 даны достаточные условия разрешимости обратной задачи. Решение носит конструктивный характер. Задача поиска потенциала сведена к линейному интегральному уравнению.

В третьей главе автор рассматривает обратную задачу на графах. Граф состоит из набора лучей, на каждом из которых рассматривается дифференциальное уравнение вида
$$-y'' + (\frac{\nu_{k0}}{x^2} + q_k(x))y = \rho^2 y,$$
причем функции $q_k(x)$ удовлетворяют определенным условиям роста в нуле и не бесконечности. В вершине графа используются условия склейки, связывающее компоненты y на лучах графа. Формулируются условия на решения типа Вейля, для которых определены коэффициенты отражения на лучах графа. Основные результаты связаны с доказательством теоремы единственности обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов второго порядка с Бесселевой особенностью потенциала и построением линейного интегрального уравнения, определяющего потенциалы исходной задачи. Помимо рассмотренного типа графов исследована задача для графа, состояще-

го из замкнутой кривой и луча, исходящего из некоторой точки этой кривой. Подобная постановка задачи представляется достаточно новой, что делает значимыми полученные для подобной постановки условия, обеспечивающие единственность определения потенциала на цикле и результаты по его непосредственному определению.

В четвертой главе автор рассматривает обратную спектральную задачу для интегро-дифференциальных операторов специального вида. Подобного вида задачи представляют значительные сложности и допускают исследование в случае, когда восстановлению подлежит оператор типа свертки. В работе исследованы подобные задачи для операторов дробного дифференцирования, что является дальнейшим развитием теории обратных задач для интегро-дифференциальных операторов. Задача сведена к исследованию нелинейного интегрального уравнения, решение которого определяет исходный оператор. Установлены условия разрешимости интегрального уравнения.

Оценивая работу в целом, необходимо отметить, что автором получены законченные результаты в области теории обратных задач рассеяния для дифференциальных уравнений либо систем высокого порядка, содержащих сингулярные члены. Подобная задача представляет серьезные трудности, и ее решение значительно расширяет область применения методов теории обратных задач. Автором исследованы решения типа Вейля и построены интегральные уравнения, позволяющие найти потенциалы искомых операторов. Все основные результаты работы являются новыми, существенно расширяют ранее известные исследования в данной области.

Текст диссертации хорошо структурирован, работа написана последовательно, изложение ясное. Приведены строгие доказательства всех основных утверждений.

В качестве замечаний отметим , во-первых, ограничение, заключающееся в отсутствии дискретного спектра, присутствующее при решении обратной задачи рассеяния гл. 2.

Отметим, впрочем, что решение обратной задачи и при наличии указанного ограничения остается весьма нетривиальным, особенно в части характеризации данных рассеяния. В качестве второго замечания заметим, что несмотря на большое количество приложений изучаемых в работе дифференциальных операторов, автор не упоминает о каких - либо конкретных приложениях полученных им результатов к задачам, имеющим практическое значение.

Высказанные замечания не умаляют общей высокой оценки работы. Диссертация вносит существенный вклад в развитие теории обратных задач рассеяния. Работа представляет собой значительное законченное исследование, содержит новые, важные и интересные результаты.

Результаты работы опубликованы в 13 статьях в ведущих отечественных и зарубежных журналах, 12 из которых индексируется в Scopus и WoS. Все работы написаны без соавторов. Результаты доложены на ведущих семинарах по данной тематике и представлены на отечественных и международных представительных конференциях.

Представленная М.Ю. Игнатьевым диссертация является законченной научно - квалификационной работой, выполненной на высоком уровне и полностью соответствующей требованиям новизны, научно - практической значимости и достоверности, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико - математических наук в соответствии с пунктами 9 – 11, 13, 14 действующего «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 г. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Считаю, что автор диссертационной работы, Игнатьев Михаил Юрьевич, несомненно, заслуживает присвоения ученой степени доктора физико - математических наук по специальности 1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
Делицын Андрей Леонидович,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.03 - математическая физика)
ведущий научный сотрудник лаб. N 1
Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
127051 г. Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1.
delitsyn@mail.ru
телефон: 8-9168124885

/Делицын А.Л.

Подпись
Делицына А.Л.
УДОСТОВЕРЯЮ
Зав. канцелярией
Никонова Н.В.