ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу М.Ю. Игнатьева «Обратные задачи рассеяния для сингулярных дифференциальных операторов», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Тема диссертации относится к теории обратных задач спектрального анализа дифференциальных операторов, основное внимание уделено обратным задачам теории рассеяния. Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто встречаются в различных областях естествознания и техники. Их исследование имеет богатую историю, насчитывающую более 70 лет. Наиболее законченные результаты в теории обратных задач спектрального анализа получены для оператора Штурма – Лиувилля, основополагающую роль здесь сыграли работы В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева и других математиков.

Существенно более сложными для изучения оказались обратные спектральные задачи для операторов высших ($n > 2$) порядков

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} \tag{1}$$

и систем вида

$$y' = (\rho B + Q(x))y, \ B = diag(b_1, \dots, b_n), \tag{2}$$

в случае, когда $\{b_k\}$ – комплексные числа, не лежащие на одной прямой. Решение таких задач потребовало привлечения принципиально новых идей и методов. Здесь эффективным оказался разработанный в 1980-е годы В.А. Юрко метод спектральных отображений, представляющий собой развитие идей контурного интегрирования Коши – Пуанкаре в комплексной плоскости спектрального параметра.

Однако, несмотря на значительные достижения, в теории обратных спектральных задач остается ряд важных нерешенных вопросов, требующих развития новых подходов. Диссертация М.Ю. Игнатьева посвящена исследованию обратных задач для матричных операторов с сингулярными коэффициентами, а также для операторов на геометрических графах и операторов дробного порядка. Указанные задачи привлекают в последнее время внимание ведущих специалистов в области спектральной теории операторов, данное обстоятельство говорит об актуальности тематики диссертационной работы.

Одним из основных объектов исследования М.Ю. Игнатьева является матричный дифференциальный оператор первого порядка:

$$\ell y = B_0 \left(y' - (x^{-1} A + q(x)) y \right), \ B_0 = diag(b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}). \tag{3}$$

Матрицы A, B_0 в (3) постоянны, $q(x)$ - суммируемая на полуоси $x \in (0, \infty)$ матрица-функция («потенциал»). В работе рассматривается наиболее сложный случай $n > 2$, причем комплексные числа $b_1, \dots, b_n$ не лежат на одной прямой. Заметим, что уравнение $\ell y = \rho y$ со спектральным параметром ρ эквивалентно системе дифференциальных уравнений вида:

$$y' = (\rho B + x^{-1} A + q(x))y. \tag{4}$$

где $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$. Систему (4) можно формально рассматривать как вариант системы вида (2), где

$$Q(x) = x^{-1}A + q(x).$$

однако наличие слагаемого $x^{-1}A$, не суммируемого на $(0, \infty)$ не позволяет применить методы, использовавшиеся ранее при исследовании таких систем. Операторы вида (3) и тесно связанные с ними скалярные операторы

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(q_k(x) + \frac{\nu_k}{x^{n-k}} \right) y^{(k)} \tag{5}$$

с регулярной особенностью естественным образом возникают при разделении переменных в уравнениях электродинамики, оптики, квантовой механики, теории упругости и других разделов естествознания и техники при наличии в них вращательной симметрии. Обратные задачи для операторов с регулярной особенностью были и остаются предметом активного изучения, начиная с классических работ В.В. Сташевской, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева и других. Однако большинство результатов здесь получено методами, существенно опирающимися на специфику случая $n = 2$. Распространение этих методов на случай операторов (5) высокого порядка и систем (4) с $n > 2$ сталкивается с рядом трудностей принципиального характера.

Исследованию задачи рассеяния для матричных операторов (3) посвящены Главы 1, 2 диссертационной работы. Прямые и обратные спектральные задачи для близких по свойствам скалярных операторов (5) при $n > 2$ изучались ранее в работах В.А. Юрко и его учеников. Однако, несмотря на ряд достижений, использовавшийся в этих работах подход имеет существенные ограничения, выражающиеся в дополнительных требованиях специального поведения коэффициентов оператора в окрестности особой точки $x = 0$. Так, для исследования операторов (3) указанный подход применим лишь при выполнении условия

$$\int_0^1 x^{-\alpha} \|q(x)\| \, dx + \int_1^\infty \|q(x)\| \, dx < \infty, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$ зависит от «простейшего» оператора, а именно, от матрицы A. В зависимости от матрицы A, это число может оказаться сколь угодно большим. Таким образом, условие (6) представляется весьма ограничительным. Подход, предложенный в работе М.Ю. Игнатьева, позволяет избавиться от упомянутых ограничений и исследовать операторы (3) в общем случае потенциалов $q(\cdot)$, принадлежащих пересечению пространств $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_p(\mathbb{R}^+)$. Отметим, что исследование матричных операторов с потенциалами из такого класса нетривиально даже в случае $A = 0$.

Глава 1 посвящена построению и исследованию решений типа Вейля: так автор, следуя терминологии, сложившейся в работах В.А. Юрко и его учеников, называет некоторые специальные решения уравнения $\ell y = \rho y$, удовлетворяющие определенным граничным условиям при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Решения типа Вейля играют ключевую роль в теории рассеяния, в частности, в постановке и решении обратной задачи. Отметим, также, что решения такого типа естественным образом возникают в конструкции функции Грина краевых задач для изучаемого оператора. Таким образом, значение результатов, полученных в Главе 1, на наш взгляд, выходит за рамки теории обратных задач. Для решения поставленных в главе задач автор применяет метод так называемых фундаментальных тензоров. Основные идеи указанного подхода восходят еще к работам Р. Билса 1980-х годов, однако для исследования операторов с особенностью (5), (3) данный подход ранее не применялся. Отметим, что предложенное автором распространение метода на операторы с особенностью весьма нетривиально, возникающие здесь трудности носят принципиальный характер.

Глава 2 содержит решение обратной задачи рассеяния для операторов (3) с пустым дискретным спектром, включающее теорему единственности, конструктивную процедуру решения, основанную на сведении задачи к линейному уравнению, а также характеризацию данных рассеяния. Последний пункт следует отметить особо: соответствующее исследование в теории обратных задач традиционно оказывается технически наиболее сложным и часто требует привлечения принципиально новых идей. Полученные автором необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи дополнены легко проверяемыми достаточными условиями, что указывает на глубину проработки рассматриваемых вопросов. Заслуживают упоминания найденные в Главе 2 свойства данных рассеяния операторов (3), связанные с их поведением при малых значениях спектрального параметра. Поскольку операторы (3) при $A = 0$ указанными свойствами не обладают, эти свойства можно считать характеристическими свойствами операторов с особенностью. Выявление таких свойств нетривиально, здесь существенно используется развитая в Главе 1 авторская версия метода фундаментальных тензоров.

Глава 3 посвящена исследованию обратных задач рассеяния на некомпактных метрических графах. Автор рассматривает ряд различных постановок задачи рассеяния, каждая из которых является новой и допускает далеко идущие обобщения. При этом, предложенные автором идеи и методы позволяют, на наш взгляд, существенно продвинуться в каждом из намеченных направлений. Здесь прежде всего следует упомянуть задачу рассеяния на графе-звезде для оператора Штурма – Лиувилля, коэффициенты которого имеют в вершине особенность бесселевого типа. Такой объект рассматривается впервые, основным результатом исследования является разработанная автором конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния, допускающая наличие простого дискретного спектра.

Глава 4 посвящена решению обратных задач для интегро-дифференциальных операторов специального вида. Известно, что решение обратных спектральных задач для нелокальных операторов сталкивается с целым рядом трудностей принципиального характера и методы, разработанные для дифференциальных операторов, здесь, как правило, не работают. Важной особенностью класса интегро-дифференциальных операторов, изучаемых в работе, является замеченная ранее С.А. Бутериным имеющая место в данном классе глобальная разрешимость основного нелинейного уравнения обратной задачи. Результаты Главы 4 представляют собой обобщение результатов С.А. Бутерина на случай операторов дробного порядка. Отметим, что, поскольку техника исследования существенно опирается на структуру оператора преобразования, такое обобщение оказывается весьма нетривиальным. Важную роль здесь играют полученные автором формулы умножения для функций типа Миттаг-Леффлера.

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертационной работы могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, а также при решении обратных спектральных задач, возникающих в различных областях квантовой механики, оптики, теории упругости.

Все результаты диссертационной работы являются достоверными и получены с помощью строгих математических доказательств. Все основные результаты диссертации своевременно опубликованы в 13 работах, 12 из которых — в изданиях, включенных в список ВАК РФ и индексируемых WoS, Scopus, RSCI.

Замечания. 1. Традиционное обозначение производных $q^{(k)}(x)$ автор использует для некоторых операторов в $\wedge^k \mathbb{C}^n$. Такая система обозначений, восходит, вероятно, к более ранним работам Р.Билса. Однако, ее использование затрудняет восприятие текста, в отдельных случаях обозначения могут приводить к неоднозначности восприятия. Впрочем, прямых противоречий в системе обозначений нами не замечено, в частности, в Главах 1,2 нигде не возникает производных порядка выше первого.
2. При доказательстве формулы восстановления (Теорема 2.6) автор опирается на ту же формулу, доказанную ранее для некоторого частного случая (Лемма 2.2). Здесь не вполне очевидна возможность приближения произвольного потенциала потенциалами, к которым применима Лемма 2.2. Из текста можно предположить, что последний содержит, в частности, множество всех гладких финитных функций. Это действительно так, однако, автор нигде не формулирует такое утверждение в явном виде. По нашему мнению, явная формулировка подобного утверждения – например, в виде следствия к лемме 2.2 – могла бы помочь читателю в понимании содержания работы.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Представленная М.Ю. Игнатьевым диссертация является законченной научно - квалификационной работой, выполненной на высоком уровне и полностью соответствующей требованиям новизны, научно - практической значимости и достоверности, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико - математических наук в соответствии с пунктами 9 – 11, 13, 14 действующего «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 г. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Считаю, что автор диссертационной работы, Игнатьев Михаил Юрьевич, несомненно, заслуживает присвоения ученой степени доктора физико - математических наук по специальности 1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
математики и статистики ФГБОУ ВО
«Башкирский государственный
педагогический университет им. М.
Акмуллы»

Султанаев Яудат Талгатович

Подпись Я.Т. Султанаев
Заверяю: Начальник отдела документационного обеспечения
ФГБОУ ВО «БГПУ им. М.Акмуллы»