ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Рыхлова Виктора Сергеевича на тему «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций»
по специальности 1.1.1 –Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Рыхлов Виктор Сергеевич в 1976 году с отличием закончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского по специальности «Прикладная математика» с присвоением квалификации «Математика». Еще будучи студентом, Рыхлов В.С. проявил склонность к научным исследованиям в области спектральной теории несамосопряжённых дифференциальных и интегральных операторов и продолжил эти исследования в аспирантуре на механико-математическом факультете Саратовского государственного университета. Им были получены глубокие результаты по асимптотике системы решений дифференциального уравнения с параметром, по базисности Рисса собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) линейного дифференциального оператора, по равносходимости спектральных разложений с тригонометрическим рядом Фурье для таких операторов, а также равносходимость с рядом Уолша-Фурье разложений по с.п.ф. одного класса интегральных операторов. Закончив аспирантуру в 1979 году, Рыхлов В.С. начал работать научным сотрудником Вычислительного центра Саратовского государственного университета. В 1981 году успешно защитил диссертацию «Разложения по собственным и присоединённым функциям квазидифференциальных и интегральных операторов» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Математический анализ.

С 1982 года Рыхлов В.С. совмещает научную деятельность с педагогической, работая сначала доцентом кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, а затем кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики Саратовского государственного университета. Он преподает, в частности, разработанные им курсы «Введение в теорию линейных дифференциальных операторов», «Спектральная теория операторных пучков», «Асимптотические методы решения линейных дифференциальных уравнений с параметром», в которых нашли отражения результаты его научных исследований. Более того, он выступал в качестве научного руководителя по диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, которая была успешно защищена.

В этот период Рыхлов В.С. продолжает активные научные исследования в области спектральной теории дифференциальных операторов и оператор-функций. Рыхлову В.С. удалось получить в указанном направлении глубокие нетривиальные результаты, ряд из которых составил представленную им докторскую диссертацию.

Тема диссертация Рыхлова В.С. на соискание учёной степени доктора физико-математических наук относится к спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. Вопросы спектральной теории, изучаемые в работе, затрагивают асимптотику по параметру системы решений дифференциального уравнения n-го порядка общего вида и фундаментальной матрицы решений общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, равномерную равносходимость внутри основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями, а также с ненулевым коэффициентом при n-1-й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье, оценку разности частичных сумм этих разложений в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при n-1-й производной, кратную полноту в пространстве суммируемых с квадратом функций системы с.п.ф. некоторых классов обыкновенных дифференциальных полиномиальных оператор-функций с постоянными коэффициентами в сильно нерегулярных случаях.

Диссертация Рыхлова В.С. состоит из трёх глав.

В первой главе решается задача построения асимптотических формул экспоненциального типа для решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида и общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка с параметром λ при $|\lambda| \to \infty$. Такие асимптотические формулы существенно используются при исследовании спектральных свойств дифференцильных операторов и оператор-функций. При наличии недостаточно гладких главных коэффициентов, то есть коэффициентов при n-й и n-1-й производных в уравнении или соответствующих им коэффициентов в системе дифференциальных уравнений, классические методы получения асимптотических формул сталкиваются с большими трудностями. Рыхлову В.С. удалось преодолеть эти трудности путём соответствующей замены искомой функции. Ввиду отсутствия достаточной гладкости главных коэффициентов, эта замена совершенно нелогична, и поэтому нетривиальна. Более того, она приводит обычное дифференциальное уравнение к более сложному, квазидифференциальному уравнению. Но у этого уравнения сумма главных коэффициентов оказывается равной нулю, что и позволяет преодолеть все трудности классического подхода в случае недостаточно гладких главных коэффициентов и получить оценку остаточного члена при наименьших требованиях на главные коэффициенты, учитывающую свойства этих коэффициентов. Полученные результаты дополняют и углубляют классические результаты Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, И.М. Рапопорта, М.Л. Расулова и др.

Во второй главе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением n-го порядка с негладким коэффициентом при $n-1$-й производной и регулярными по Биркгофу краевым условиями. Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по с.п.ф. этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также о равномерной оценке разности соответствующих частичных сумм.

Задача о разложении заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удается доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена. Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление математики, начало которому было положено в классических работах В.А. Стеклова, У.Э. Гобсона, А. Хаара, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна и продолжено В.А. Ильиным, В.А. Садовничим, П. Джаковым, Б.С. Митягиным, А.М. Минкиным, И.С. Ломовым и др.

Рыхлов В.С. получил новые оценки разности частичных сумм спектральных разложений в терминах общих (интегральных) модулей непрерывности. Эти оценки позволили получить достаточные условия равносходимости в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности, логарифмическими функциями, что является большим достижением. Автором впервые установлена тесная связь между множеством функций, для которых имеет место равносходимость, и свойствами коэффициента при $n-1$-й производной. Это весьма глубокий и нетривиальный результат. Существенную роль при получении оценок разности частичных сумм спектральных разложений и теорем равносходимости сыграли асимптотические формулы для решений дифференциальных уравнений с параметром, полученные Рыхловым В.С. в первой граве, а также доказанные автором аналоги классической теоремы Штейнгауза для обычных тригонометрических рядов также в терминах общих модулей непрерывности и их оценок сверху медленно меняющимися функциями. Результаты, полученные Рыхловым В.С. во второй главе диссертации, в совокупности с результатами первой главы, по моему мнению, сами по себе могли бы составить по объему и глубине результатов содержание докторской диссертации.

В третьей главе диссертации исследуется кратная полнота в пространстве суммируемых с квадратом функций системы с.п.ф. некоторых классов нерегулярных полиномиальных дифференциальных оператор-функций. Вопрос об n-кратной полноте к.ф. возникает при решении методом Фурье начально-граничных задач для соответствующих уравнений в частных производных. Основополающие результаты в этом направлении были получены М.В. Келдышем в известной статье 1951 года. Исследованиями кратной полноты системы с.п.ф. различных классов дифференциальных оператор-функций занимались многие математики. Отметим результаты А.А. Шкаликова, В. Эберхарда, Г. Фрайлинга, С.А. Тихомирова, М.Г. Гасымова, А.М. Магеррамова, А.И. Вагабова и др.

Но есть классы полиномиальных дифференциальных оператор-функций с постоянными коэффициентами (даже в случае распадающихся краевых условий при определенном расположении характеристик), для которых стандартные методы рассуждений не позволяют установить кратную полноту системы с.п.ф. Рыхловым В.С. предложен новый подход к исследованию кратной полноты, а именно, метод обобщённых порождающих функций, с помощью которого удалось продвинуться в этом направлении и получить ряд глубоких и нетривиальных результатов. Рыхловым В.С. была исследована m-кратная полнота при $1 \leq m \leq n$ системы с.п.ф. дифференциальных сильно нерегулярных полиномиальных оператор-функций n-го порядка в случае однородного дифференциального выражения с постоянными коэффициентами и произвольными краевыми условиями, то есть в тех случаях, для которых стандартные методы доказательства не проходят.

Таким образом, в диссертации получены новые принципиальные результаты, которые, по моему мнению, вносят значительный вклад в спектральную теорию дифференциальных оператор-функций. Результаты диссертации прошли существенную апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Подводя итоги, хочу отметить, что Рыхлов В.С. является зрелым самостоятельным учёным, а его диссертация представляет собой законченное и целостное научное исследование, совокупность результатов которого можно оценить как научное достижение.

Считаю, что диссертация Рыхлова В.С. удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по указанной специальности.

Научный консультант:
Доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01 – Математический анализ)
профессор Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский
университет имени Н.Г. Чернышевского»
410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83
khromovap@info.sgu.ru +7(8452)515535

Хромов Август Петрович 17.02.2025

Подпись Хромова А.П. удостоверяю
Ученый секретарь
Ученого совета СГУ В.Г. Семенова
«20» февраля 2025 г.