На правах рукописи

Игнатьев Михаил Юрьевич

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1.1.1. — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Саратов — 2024

Работа выполнена на кафедре математической физики и вычислительной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный консультант:
Юрко Вячеслав Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Официальные оппоненты:
Делицын Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (специальность 01.01.03)
Солдатов Александр Павлович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН (специальность 01.01.02)
Султанаев Яудат Талгатович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и статистики ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы» (специальность 01.01.02)
Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет»

Защита состоится 24 июня 2024 года в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.392.08 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, 10-й учебный корпус, ауд. 511.

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке СГУ и на сайте СГУ https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-08

Автореферат разослан 15 марта 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.392.08
доктор технических наук

И. В. Вешнева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тема диссертации относится к теории обратных задач спектрального анализа дифференциальных операторов, основное внимание уделено обратным задачам теории рассеяния.

Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто встречаются в различных областях естествознания и техники. Их исследование имеет богатую историю, насчитывающую более 70 лет. Первой значительной работой в данном направлении традиционно считается работа Г. Борга [1], в которой исследовалась задача восстановления потенциала $q(\cdot)$ оператора Штурма–Лиувилля

$$\ell y = -y'' + q(x)y \qquad (1)$$

по заданным спектрам краевых задач, порожденных уравнением $\ell y = \lambda y$ и краевыми условиями $y(0) = y^{(\nu-1)}(\pi) = 0$, $\nu = 1, 2$. Теории обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля посвящено большое число работ, в ходе ее дальнейшего развития был получен ряд глубоких нетривиальных результатов. Не претендуя на полноту обзора данного направления, упомянем работы В.А. Марченко, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна, Л.Д. Фаддеева, В.А. Садовничего, среди которых особое место занимает революционная работа И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [2], где было показано, что решение обратной задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля на полуоси по заданной спектральной функции может быть сведено к решению некоторого линейного интегрального уравнения, получившего название «уравнения Гельфанда–Левитана». В дальнейшем оказалось, что обратные задачи Штурма–Лиувилля в других постановках также сводятся к решению некоторых линейных уравнений [3, 4, 5, 6]. Указанное наблюдение весьма нетривиально в силу нелинейности самих обратных задач. Возможность сведения обратных спектральных задач к решению линейных уравнений играет решающую роль в контексте появившегося в 1967 году [7] *метода обратной зада-*

[1] Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. — 1946. — Vol. 78 — Pp. 1–96.

[2] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР, сер. матем. — 1951. — Т. 15 — С. 309–360.

[3] Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // ДАН СССР. — 1951. — Т. 76. — №1 — С. 21–24.

[4] Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной задачи // ДАН СССР. — 1954. — Т. 94. — №6 — С. 987–990.

[5] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14. — №4 — С. 57–119.

[6] Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова Думка, 1977.

[7] Gardner G., Green J., Kruscal M., Miura R. A method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Letters — 1967. — Vol. 19 — Pp. 1095–1098.

чи рассеяния интегрирования некоторых нелинейных уравнений математической физики.

К обратным задачам Штурма–Лиувилля близки обратные задачи для одномерного оператора Дирака

$$\ell y = By' + Q(x)y,\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ -q(x) & p(x) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

и систем дифференциальных уравнений вида:

$$y' = (\rho B + Q(x))y,\ B = diag(i, -i), \tag{2}$$

известных как система Захарова–Шабата [8], [9], [10].

Существенно более сложными для изучения оказались обратные спектральные задачи для операторов высших $(n > 2)$ порядков

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} \tag{3}$$

и систем вида

$$y' = (\rho B + Q(x))y,\ B = diag(b_1, \ldots, b_n), \tag{4}$$

в случае, когда $\{b_k\}$ – комплексные числа, не лежащие на одной прямой. Решение таких задач потребовало привлечения принципиально новых идей и методов. В частности, здесь оказывается неэффективным использование так называемых операторов преобразования, играющих центральную роль в методе Гельфанда–Левитана–Марченко. Более эффективным оказался разработанный в 1980-е годы В.А. Юрко *метод спектральных отображений* [11], представляющий собой развитие идей контурного интегрирования Коши–Пуанкаре в комплексной плоскости спектрального параметра. Базовая идея указанного подхода, активно применявшегося в теории *прямых задач* спектрального анализа, восходит к классическим работам начала 20 века [12], однако применение соответствующих идей в теории обратных задач весьма нетривиально в силу их нелинейности. Идеи метода контурного интеграла также использовались в работах Р. Билса, Р. Койфмана, П. Дейфта, К. Томея, С.

[8] Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Обратная задача для системы Дирака // ДАН СССР. — 1966. — Т.167. — С. 967 — 970.

[9] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функц.анализ и его прил. — 1974. — Т.8, №3. — С. 43 — 53.

[10] Делицын А. Л. Быстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений Захарова-Шабата и их приложения // Матем. заметки. — 2022. — Т.112, №2. — С. 198 — 217.

[11] Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.

[12] Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — Vol. 9 — No.4 — Pp. 373–395.

Чжоу [13, 14, 15, 16, 17], посвященных теории рассеяния. Отметим, что в теории обратных задач для операторов высших порядков (3) и систем (4) остается целый ряд открытых вопросов как технического, так и принципиального характера. Данное направление спектральной теории операторов в настоящее время продолжает активно развиваться [18, 19, 20, 21].

Среди важнейших направлений развития спектральной теории можно также упомянуть исследование операторов (1) и (3) и систем вида (4) в сингулярном случае. Так, например, активно развивается в последние десятилетия теория операторов (1) и (3) с коэффициентами-распределениями. Отметим, что если теория операторов (1) с потенциалами-распределениями из пространств $W_2^{-1}[0,\pi]$ разработана на данный момент достаточно полно [22, 23, 24], то для операторов высших порядков (3) соответствующая теория делает лишь первые шаги [25, 26]. Отметим, что возникающие здесь вопросы тесно связаны с исследованием систем вида (4) в общем случае, когда требования на матрицу-функцию $Q(\cdot)$ налагаются в терминах принадлежности некоторым классам суммируемости и не предполагают, вообще говоря, ни гладкости, ни даже непрерывности. По ряду причин изучение систем вида (4)

[13] Beals R. and Coifman R. R. Scattering and inverse scattering for first order systems // Comm. Pure Appl. Math. — 1984. — Vol. 38 — Pp. 39–90.

[14] Beals R. The inverse problem for ordinary differential operators // Amer. J. Math. — 1985. — Vol. 107 — Pp. 281–366.

[15] Beals R., Deift P. and Tomei C. Direct and inverse scattering on the line, Math. Surveys and Monographs. 28 — Amer. Math. Soc. Providence: RI, 1988.

[16] Zhou X. Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities // Comm. Pure Appl. Math. — 1989. — Vol. 42 — No.7 — Pp. 895–938.

[17] Deift P., Zhou X. Direct and inverse scattering on the line with arbitrary spectral singularities // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — Vol. 44 — No.5 — Pp. 485–533.

[18] Юрко В.А. Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке // СМФН. — 2017. — Т. 63, №2. — С. 362–372.

[19] Юрко В.А. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для дифференциальных операторов произвольных порядков с неинтегрируемыми регулярными особенностями // СМФН. — 2021. — Т. 67, №2. — С. 408–421.

[20] Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients // Mathematics — 2021 — Vol.9 — 2989.

[21] Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Единственность восстановления дифференциального оператора n-го порядка с нераспадающимися краевыми условиями по нескольким спектрам // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2020. — Т. 490. — С. 55—58.

[22] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки — 1999. — Т. 66 — №6 — С. 897–912.

[23] Hryniv R.O., Mykytyuk Ya. V. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems — 2003. — Vol. 19 — Pp. 665 – 684.

[24] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44 — №4 — С. 34–53.

[25] Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки — 2016. — Т. 99 — №5 — С. 788–793.

[26] Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients // Mathematics — 2021 — Vol.9 — 2989.

в указанном общем случае оказывается существенно более сложной задачей и требует пересмотра и нетривиальных модификаций используемых методов исследования.

К одним из наиболее активно развивающихся направлений спектральной теории можно отнести также теорию дифференциальных операторов, прежде всего, операторов Штурма–Лиувилля, на метрических графах (граф, на ребрах которого задано уравнение Штурма–Лиувилля, в современной литературе часто называют *квантовым графом*). Интерес к указанному направлению и, в частности, к соответствующим обратным задачам, обусловлен большим количеством разнообразных приложений [27], [28]. Не претендуя на полноту обзора, упомянем работы [29], [30], [31], где было дано решение обратных задач Штурма–Лиувилля на графе в случае, когда граф представляет собой дерево (т.е., граф без циклов), а также работы [32], [33], где изучались обратные задачи на графах более сложной структуры, и, наконец, важную работу [34], где дается решение обратной задачи на произвольном компактном графе.

Однако, несмотря на описанные выше значительные достижения, в теории обратных спектральных задач остается ряд нерешенных вопросов, требующих развития новых подходов. Некоторым из таких вопросов и посвящена настоящая диссертация.

В первых двух главах работы изучается дифференциальный оператор первого порядка:

$$\ell y = B_0\left(y' - (x^{-1}A + q(x))y\right),\ B_0 = diag(b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}), \tag{5}$$

действующий в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$. Матрицы A, B_0 в (5) постоянны, в рамках исследования обратной задачи они считаются известными, $q(\cdot)$ - суммируемая на полуоси $x \in (0, \infty)$ матрица-функция. В работе рассматривается (более сложный) случай $n > 2$, причем комплексные числа $b_1, \dots, b_n$ не лежат на одной прямой.

[27] Pokornyi Yu.V. and Borovskikh A.V. Differential equations on networks (geometric graphs) // J. Math. Sci. (N.Y.) — 2004 — Vol.119 — No. 6, Pp. 691 – 718.

[28] Kuchment P. Quantum graphs // Waves Random Media — 2004 — Vol.14 — Pp. S107 – S128.

[29] Belishev M.I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems — 2004 — Vol.20 — Pp. 647 – 672.

[30] Yurko V.A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs // Inverse Problems — 2005 — Vol.21 — Pp. 1075 – 1086.

[31] Zhabko A. P., Nurtazina K. B., Provotorov V. V. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2020 — Vol. 16 — No. 2. — P. 129 – 143.

[32] Kurasov P. Inverse problems for Aharonov-Bohm rings // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2010 — Vol.148 — Pp.331 – 362.

[33] Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999 — Vol. 351 — No. 10 — Pp.4069 – 4088.

[34] Yurko V.A. Inverse spectral problem for differential operators on arbitrary compact graphs // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010 — Vol. 18 — No.3 — Pp. 245 – 261.

Заметим, что уравнение $\ell y = \rho y$ со спектральным параметром ρ эквивалентно системе дифференциальных уравнений вида:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y, \tag{6}$$

где $B = diag(b_1, \dots, b_n)$. Систему (6) можно формально рассматривать как вариант системы вида (4), где

$$Q(x) = x^{-1}A + q(x),$$

однако наличие слагаемого $x^{-1}A$, не суммируемого на $(0, \infty)$ не позволяет применить методы, использовавшиеся ранее при исследовании таких систем.

Операторы вида (5) и тесно связанные с ними *скалярные* операторы

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(q_k(x) + \frac{\nu_k}{x^{n-k}} \right) y^{(k)} \tag{7}$$

с регулярной особенностью естественным образом возникают при разделении переменных в уравнениях электродинамики, оптики, квантовой механики, теории упругости и других разделов естествознания и техники при наличии в них вращательной симметрии. Так, к виду (6), $n = 2$, приводится радиальная система Дирака, хорошо известна связь операторов Штурма–Лиувилля с бесселевой особенностью

$$\ell y = -y'' + \left(q(x) + \frac{\nu_0}{x^2} \right) y \tag{8}$$

с классическими задачами квантовой теории рассеяния [35], [36]. К уравнениям вида (7) высших порядков сводятся многие задачи теории упругости. Так, например, к уравнению вида (7) 4-го порядка сводится после разделения переменных в цилиндрических координатах уравнение, описывающее свободные колебания шарнирно-опертой осесимметричной круглой пластины [37].

Операторы вида (7) также естественным образом возникают при исследовании уравнений с точкой поворота. Так, например, к уравнениям с регулярной особенностью преобразованием Лиувилля сводятся уравнения вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} = \lambda r(x) y \tag{9}$$

[35] де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. — М.: Мир, 1966.

[36] Агранович З.С., Марченко В.А. Обратная задача теории рассеяния. — Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1960.

[37] Васильев Г.П., Смирнов А.Л. Частоты свободных колебаний круглой тонкой пластины с переменными параметрами // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия — 2020 — Т. 7 — Вып.3 — С.518 – 526.

в случае, когда гладкая весовая функция $r(x)$ при $x \to 0$ стремится к нулю по степенному закону: $r(x) \sim \alpha x^\gamma$, $\gamma > 0$. Аналогичные закономерности имеют место и для более общих уравнений

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)} = \lambda \sum_{k=0}^{m} r_k(x) y^{(k)} \tag{10}$$

в случае когда коэффициент $r_m(x)$ обращается в нуль в некоторой точке рассматриваемого интервала. Уравнения высших порядков вида (10) с точками поворота возникают при исследовании задач теории упругости, например, в теории колебаний оболочек [38] .

Отметим, кроме того, что к возникновению регулярной особенности может привести преобразование системы вида:

$$y' = \lambda H(x) y. \tag{11}$$

Такие системы возникают в задачах оптики, спектроскопии, акустики, электродинамики, радиоэлектроники, а также представляют самостоятельный интерес. Предположим, что матрица $H(x)$ представима в виде $H(x) = p(x)W(x)BW^{-1}(x)$, где $p(\cdot)$ – знакопостоянная скалярная функция, B – постоянная диагональная матрица, а матрица-функция $W(x)$ такова, что $\det W(x)$ имеет простые нули. Тогда замена $y(x) = W(x)Y(x)$ приводит систему (11) к виду

$$Y' = \lambda p(x) BY + Q(x)Y,\ Q(x) = -W^{-1}(x)W'(x).$$

Пусть $\det W(0) = 0$, $(\det W)'(0) \neq 0$. Тогда матрица $Q(x)$ представима в виде

$$Q(x) = x^{-1}A + q(x),$$

где A – некоторая постоянная матрица, матрица-функция $q(\cdot)$ суммируема в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Операторы с бесселевой особенностью (8), а также тесно связанные с ними системы вида (2) с $Q(x) = x^{-1}A + q(x)$ (где A – некоторая постоянная матрица, а матрица-функция $q(\cdot)$ суммируема) были и остаются предметом активного изучения, начиная с классических работ [39] , [40] и до настоящего

[38] Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979.

[39] Сташевская В. В. Об обратной задаче спектрального анализа для некоторого класса дифференциальных уравнений // ДАН СССР — 1953 — Т.93 — С. 409 – 412.

[40] Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи мат. наук. — 1959 — Т.14 — №4 — С. 57–119.

времени [41], [42], [43], [44], [45]. Однако исследования, проведенные в указанных работах, существенно опираются на упоминавшуюся выше специфику случая $n = 2$ и перенесение используемых в них методов на случай операторов (7) высокого порядка и систем с $n > 2$ сталкивается с рядом трудностей принципиального характера. Операторы вида (7) изучались ранее в работах В.А. Юрко и его учеников. Был получен ряд результатов, относящихся к прямым и обратным задачам для операторов вида (7) в различных постановках, включая задачи на полуоси [46], конечном отрезке [47], , [48], а также на геометрических графах [49], [50]. Более того, удалось исследовать также случай (произвольного числа) особенностей внутри интервала [51], [52]. В то же время, несмотря на указанные достижения, использовавшийся подход имеет существенные ограничения, выражающиеся в дополнительных требованиях специального поведения коэффициентов $\{q_k(x)\}$ в окрестности особой точки $x = 0$. Операторы, удовлетворяющие соответствующим требованиям, образуют важный частный подкласс операторов вида (7), обладающий целым рядом интересных свойств. Однако, многие закономерности, присущие операторам этого подкласса, не имеют места в общем случае, поэтому его изучение не дает общей картины.

Подход, развитый для операторов (7), позволяет исследовать и операторы (5), но также лишь при дополнительном условии достаточно быстрого убывания матрицы-функции $q(x)$ при $x \to 0$. Отметим, что условия такого типа, вообще говоря, не выполняются в упомянутых выше приложениях.

[41] Kostenko A., Sakhnovich A., and Teschl G. Inverse eigenvalue problems for perturbed spherical Schrödinger operators // Inverse Problems — 2010 — Vol.26 – 105013(14pp).

[42] Albeverio S., Hryniv R., and Mykytyuk Ya. Scattering theory for Schrödinger operators with Bessel-type potentials // J. Reine und Angew. Math. — 2012 — Vol. 666 — Pp. 83 – 113.

[43] Brunnhuber R., Kostenko A. and Teschl G. Singular Weyl-Titchmarsh-Kodaira theory for one-dimensional Dirac operators // Monatshefte für Mathematik — 2014 — DOI: 10.1007/s00605-013-0563-5.

[44] Albeverio S., Hryniv R. and Mykytyuk Ya. Reconstruction of radial Dirac and Schrödinger operators from two spectra // J. Math. Anal. Appl. — 2008 — Vol. 339 — Pp. 45 – 57.

[45] Bondarenko N. Matrix Sturm–Liouville equation with a Bessel-type singularity on a finite interval // Anal.Math.Phys. — 2017 — Vol. 7 — Pp. 77 — 92.

[46] Yurko V.A. On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems — 1993 — Vol. 9 — Pp. 495 – 502.

[47] Юрко В.А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Матем. сборник. — 1995 — Vol. 186 — №6 — С. 133 – 160.

[48] Кудишин П.М. Обратная задача для дифференциальных операторов высших порядков с особенностью. Дис.... канд. физ.-мат. наук — Саратов, 1998.

[49] Yurko V.A. Inverse problems for differential systems on graphs with regular singularities // Math. Notes — 2014 — Vol. 96 — No.3-4 — Pp. 617 – 621.

[50] Yurko V. A. Inverse problems for variable order differential operators with regular singularities on graphs // Journal of Inverse and Ill-posed Problems — 2015 — Vol. 23 — No. 6 — Pp. 647 – 656.

[51] Yurko V.A. On integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval — Integral Transforms and Special Functions — 1997 — Vol. 5 — No. 3-4 — Pp. 309 – 322.

[52] Fedoseev A. E. Inverse problems for differential equations on the half-line having a singularity in an interior point // Tamkang J. of Math. — 2011 — Vol. 42 — No. 3 — Pp. 343 — 354.

В настоящей работе мы используем другой подход, позволяющий избавиться от упомянутых ограничений и исследовать операторы (5) в общем случае, причем требования на матрицу-функцию $q(\cdot)$ налагаются в терминах принадлежности некоторым классам суммируемости и не предполагают, вообще говоря, ни дифференцируемости, ни даже непрерывности указанной функции. Отметим, что возникающие при исследовании систем с недифференцируемыми коэффициентами трудности во многом аналогичны трудностям, возникающим при изучении скалярных операторов высших порядков с коэффициентами-распределениями.

В третьей главе настоящей работы представлен ряд результатов, касающихся обратных задач рассеяния на некомпактных графах, содержащих цикл, в том числе, для операторов переменного порядка; кроме того, исследована задача рассеяния на некомпактном графе-звезде в не изучавшемся ранее случае, когда потенциал оператора имеет бесселеву особенность в вершине.

Обратные задачи Штурма–Лиувилля на некомпактных графах изучены существенно менее полно, особенно в случае графов, содержащих циклы. Ряд важных частных случаев рассмотрен в работах [53], [54], [55], [56], однако, общая теория таких задач на данный момент отсутствует.

Принципиально более сложными для изучения являются обратные задачи на графах для уравнений высших порядков. Такие задачи остаются малоизученными, причем открытыми в значительной мере остаются даже вопросы, связанные с постановкой задач. Среди имеющихся результатов можно упомянуть полученное в работах [57], [58], [59] решение задачи для деревьев. Особенно сложным является случай, когда порядки операторов на разных ребрах графа могут различаться между собой, в исследовании этого случая сделаны

[53] Trooshin I., Marchenko V. and Mochizuki K. Inverse scattering on a graph containing circle. — Analytic methods of analysis and DEs: AMADE 2006, 237—243, Camb. Sci. Publ., Cambridge, 2008.

[54] Trooshin I. and Mochizuki K. Spectral problems and scattering on noncompact star-shaped graphs containing finite rays // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2015 — Vol. 23 — No. 1 — Pp. 23 – 40.

[55] Freiling G., Yurko V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on noncompact trees // Results Math. — 2007 — Vol. 50 — No.3-4 — Pp. 195 – 212.

[56] Buterin S. A., Freiling G. Inverse spectral-scattering problem for the Sturm– Liouville operator on a noncompact star-type graph // Tamkang J. Math. — 2013 — Vol. 44 — No.3 — Pp. 327 – 349.

[57] Юрко В. А. Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях // Матем. заметки — 2008 — Т.83 — №1 — С. 139 – 152.

[58] Yurko V. A. Inverse spectral problems for arbitrary order differential operators on noncompact trees // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2012 — Vol. 20 — No.1 — Pp. 111 – 131.

[59] Yurko V. A. Inverse problems for differential systems on graphs with regular singularities // Math. Notes — 2014 — Vol.96 — No.3-4 — Pp. 617 – 621.

лишь первые шаги [60], [61], [62].

В четвертой главе настоящей работы исследуются задачи восстановления некоторых интегро-дифференциальных операторов.

Обратные задачи для нелокальных операторов, таких, как операторы с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные и интегральные операторы, занимают особое место в теории обратных спектральных задач. Несмотря на то, что модели с последействием естественным образом возникают во многих областях естествознания и техники, теория обратных задач для нелокальных операторов развита весьма слабо, фактически представляя собой набор отдельных разрозненных результатов, не формирующих общей картины. В значительной мере это обусловлено сложностью таких задач. Нелокальный характер операторов делает малоэффективными упоминавшиеся выше классические методы, такие, как метод Гельфанда–Левитана и метод спектральных отображений. Как правило, исследование обратных задач для таких операторов приводит к существенно нелинейным уравнениям, позволяющим получать лишь результаты локального характера.

Важным исключением являются задачи, в которых требуется восстановить сверточную компоненту оператора. Так, еще в работе [63] было замечено, что задание спектра задачи Дирихле для оператора

$$\ell y = -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt \tag{12}$$

однозначно определяет функцию $M(\cdot)$ при условии, что коэффициент $q(\cdot)$ известен априори. Иначе говоря, для задачи восстановления сверточной компоненты оператора имеет место *глобальная* единственность решения. Позднее [64] С.А. Бутерин показал, что задача восстановления оператора (12) в случае $q = 0$ может быть сведена к решению некоторого специального нелинейного уравнения, для которого можно доказать глобальную разрешимость. Таким образом, удалось получить нелокальную конструктивную процедуру решения указанной обратной задачи, и, более того, описать необходимые и достаточные условия ее разрешимости. В дальнейшем указанный результат

[60] Yurko V. Inverse problems for differential operators of variable orders on star-type graphs: general case // Anal. Math. Phys. — 2014 — Vol.4 — No.3 — Pp. 247 – 262.

[61] Юрко В. А. Восстановление дифференциальных операторов переменных порядков на звездообразном графе по спектрам // Дифференц. уравнения — 2013 — Vol. 49 — №12 — С. 1537 – 1548.

[62] Bondarenko N. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges // Tamkang J. Math. — 2015 — Vol. 46 — No.3 — Pp. 229 – 243.

[63] Юрко В.А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки — 1991 — т. 50 — №. 5 — С. 134 – 144.

[64] Buterin S. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results Math. — 2007 — Vol. 50 — No. 3–4 — Pp. 173 – 181.

был распространен на общий случай оператора (12) с ненулевым (априори заданным) потенциалом $q(\cdot)$ и на случай оператора высшего порядка

$$\ell y = y^{(n)} + \int\limits_0^x M(x-t) y^{(n-1)}(t)\, dt,$$

причем во всех указанных случаях для однозначного восстановления оператора оказалось достаточно задания спектра задачи Дирихле (или какой-либо иной краевой задачи с распадающимися условиями). Полученные результаты также получили дальнейшее развитие, см., например, работу [65] и библиографию в ней.

В настоящей работе упомянутые результаты распространены на случай операторов дробного порядка, причем, рассмотрен, в частности, наиболее сложный случай, когда оператор в целом не имеет сверточной структуры (как, например, оператор (12) при $q \neq 0$). Существенную роль в проведенном исследовании играет полученная автором формула умножения для функций одного вида, выражающихся через функции типа Миттаг–Леффлера.

Степень разработанности темы. Наиболее полно разработана теория обратных спектральных задач для операторов Штурма – Лиувилля, Дирака и их непосредственных обобщений. Исследование операторов высших порядков и матричных операторов с коэффициентами размерности большей двух сталкивается с целым рядом трудностей принципиального характера и построение теории обратных задач здесь далеко от своего завершения. Наиболее существенные трудности возникают при исследовании сингулярных дифференциальных операторов, в частности, матричных операторов с негладкими коэффициентами, операторов с особенностью и операторов на некомпактных графах. Для таких операторов решение обратных задач рассеяния известными методами возможно лишь при выполнении некоторых весьма ограничительных дополнительных условий на коэффициенты оператора или, соответственно, структуру графа.

Цель работы - разработка новых современных методов исследования задачи рассеяния для сингулярных дифференциальных операторов.

Задачи исследования. Разработка конструктивной процедуры решения обратной задачи рассеяния для матричных дифференциальных операторов первого порядка с регулярной особенностью; исследование неклассических постановок обратных задач рассеяния на некомпактных геометрических графах; исследование и конструктивное решение обратных спектральных задач для некоторых интегро-дифференциальных операторов дробных порядков.

[65] S. Buterin Uniform full stability of recovering convolutional perturbation of the Sturm — Liouville operator from the spectrum // Journal of Differential Equations — 2021 — Vol.282 — No.2 — Pp.67 – 103.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Главные из них состоят в следующем:

1. Введены и исследованы интегральные преобразования, ядра которых строятся по решениям дифференциальных систем с регулярной особенностью. Данные преобразования можно рассматривать как далеко идущие обобщения классических преобразований Фурье–Ханкеля. Доказаны теоремы о свойствах таких преобразований, аналогичные теоремам А.М. Седлецкого о свойствах преобразования Фурье–Лапласа в комплексной плоскости спектрального параметра.
2. Предложен метод построения и исследования решений типа Вейля для дифференциальных операторов с особенностью, основанный на использовании тензорно-значных решений построенных специальным образом вспомогательных дифференциальных систем. Метод позволяет исследовать решения типа Вейля при минимальных ограничениях на коэффициенты оператора, не предполагающих, в частности, их дифференцируемости. Также снято требование быстрого убывания коэффициентов при $x \to 0$.
3. Получены теорема единственности и конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра. Конструктивная процедура основана на сведении задачи к линейному интегральному уравнению, для указанного уравнения доказана корректная разрешимость.
4. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра. Получены легко проверяемые достаточные условия разрешимости обратной задачи.
5. Разработана конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния на графе-звезде для оператора Штурма–Лиувилля с бесселевой особенностью в вершине. Конструктивная процедура основана на сведении задачи к линейному интегральному уравнению, для указанного уравнения доказана корректная разрешимость.
6. Предложена конструктивная процедура решения обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на некомпактном графе с циклом. Показано, что задача восстановления потенциала на неограниченном ребре по данным рассеяния, ассоциированным с этим ребром, может быть сведена к решению линейного уравнения. Найдены дополнительные данные, задание которых обеспечивает однозначное восстановление потенциала на цикле.

7. Доказана теорема единственности решения обратной задачи рассеяния для оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом.
8. Разработана конструктивная процедура решения обратной задачи для некоторых интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Процедура основана на сведении задачи к некоторому нелинейному интегральному уравнению, для указанного уравнения установлена его однозначная разрешимость. При построении уравнения существенную роль играют полученные автором формулы умножения для функций типа Миттаг-Леффлера.

Методы исследования. Для исследования обратной задачи применяется развитие идей метода спектральных отображений[66], в основе которого лежит метод контурного интегрирования Коши-Пуанкаре. Также в работе используются асимптотические методы, аппарат теории целых и мероморфных функций, теории интегральных уравнений, теории операторов в банаховых пространствах и другие методы вещественного, комплексного и функционального анализа.

Теоретическая значимость работы. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, а также при построении математических моделей различных прикладных задач. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им В.А. Стеклова РАН, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, СПбГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержании специальных курсов для магистрантов и аспирантов.

Достоверность результатов обоснована строгими математическими доказательствами.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты автора:

1. Теория интегральных преобразований, являющихся обобщениями классических преобразований Фурье–Ханкеля. В частности, теоремы о свойствах таких преобразований, рассматриваемых в комплексной плоскости спектрального параметра.

[66] Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач.

2. Метод построения и исследования решений типа Вейля для дифференциальных операторов с особенностью, основанный на использовании тензорно-значных решений построенных специальным образом вспомогательных дифференциальных систем.
3. Теорема единственности и конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра.
4. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра. Также достаточные условия разрешимости обратной задачи.
5. Конструктивная процедура решения обратной задачи рассеяния на графе-звезде для оператора Штурма – Лиувилля с бесселевой особенностью в вершине.
6. Конструктивная процедура решения обратной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на некомпактном графе с циклом.
7. Теорема единственности решения обратной задачи рассеяния для оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом.
8. Формулы умножения для функций типа Миттаг - Леффлера.
9. Конструктивная процедура решения обратной задачи для некоторых интегро - дифференциальных операторов дробного порядка.

Практическая значимость работы. Результаты диссертации могут быть полезны при решении обратных спектральных задач, возникающих в различных областях теории упругости, оптики, астрофизики. Все представленные в диссертации методы решения задач конструктивны, на их основе могут быть разработаны численные алгоритмы.

Апробация работы. Результаты диссертации в разные годы докладывались на научных семинарах «Операторные модели в математической физике» механико- математического факультета МГУ (руководитель — чл.-корр. РАН А. А. Шкаликов), «Обратные задачи спектрального анализа» Саратовского го- сударственного университета (руководитель — профессор В. А. Юрко), а также на семинаре факультета математики университета Дуйсбург-Эссен (руководитель — профессор Г. Фрайлинг), г. Дуйсбург, Германия
и на международных научных конференциях:

1. Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов (2014, 2018, 2020 гг.).
2. Крымская осенняя математическая школа-симпозиум КРОМШ (2015 г.).

3. «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа (2018 г.).
4. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего, Москва (2019 г.).
5. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж (2021 г.).
6. «Конференция международных математических центров мирового уровня», Сириус (2021 г.).
7. «Уфимская осенняя математическая школа», Уфа (2021, 2022 гг.).
8. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль (2022 г.)

Часть результатов получена при работе в качестве исполнителя по грантам РФФИ 10-01-00099, 10-01-92001-NSC, 13-01-00134, 15-01-04864, 16-01-00015, 17-51-53180, 19-01-00102, РНФ 17-11-01193, госзаданиям Минобрнауки 1.1436.2014K, 1.1160.2017/PCh.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 13 работах, 12 из которых – статьи, опубликованные в журналах, индексируемых Scopus, Web of Science.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 12 параграфов, и списка литературы, содержащего 143 наименования. Общий объем работы — 273 страницы.

Содержание работы

Во **введении** дается обоснование актуальности темы, приведен краткий обзор литературы и перечислены основные результаты диссертации.

Главы 1, 2 посвящены изучению задачи рассеяния для дифференциального оператора вида (5) Основное внимание уделено решению *обратной задачи* восстановления матрицы-функции $q(\cdot)$ по данным рассеяния. Матрицы A и B_0 предполагаются заданными, фиксированными и удовлетворяющими следующим условиям.

Условие A. Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $\mathrm{Re}\mu_1 < \mathrm{Re}\mu_2 < \cdots < \mathrm{Re}\mu_n$, $\mathrm{Re}\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.

Условие B. $b_1, \dots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 0$.

Неинтегрируемость слагаемого $x^{-1}A$ требует его включения в главную часть, таким образом, уравнение $\ell y = \rho y$ в «простейшем» случае $q = 0$ эквивалентно следующей «невозмущенной системе»:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A)y, \ B = diag(b_1, \dots, b_n). \tag{13}$$

Опишем решения системы (13). Важную роль играет случай $\rho = 1$. Рассмотрим соответствующую систему

$$y' = (B + x^{-1}A)y, \tag{14}$$

при *комплексных* x. При выполнении Условия А, система (14) имеет фундаментальную матрицу вида $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$, где

$$c_k(x) = x^{\mu_k}\hat{c}_k(x),$$

$\hat{c}_k(\cdot)$ – целые функции, или, эквивалентно, $c(x) = \hat{c}(x)x^{\mu}$, где (как и всюду в дальнейшем) $\mu := diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\hat{c}(\cdot)$ – целая матрица-функция. Для функций $\hat{c}_k$ справедливы представления:

$$\hat{c}_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m H_{mk}, \ H_{0k} = \mathfrak{h}_k, \ H_{mk} = ((\mu_k + m)I - A)^{-1} BH_{m-1,k}, \tag{15}$$

где $\mathfrak{h}_k$ – собственные векторы матрицы A. Заметим, в частности, что $\hat{c}_k(0) = \mathfrak{h}_k$. Всюду далее будем считать систему собственных векторов $\{\mathfrak{h}_k\}_{k=1}^n$ фиксированной, причем $\det(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n) = 1$. Тогда, очевидно, выполнено $\det c(x) \equiv 1$, $\det \hat{c}(x) \equiv 1$.

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

При выполнении Условия В для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ существует перестановка $R_1, \dots, R_n$ чисел $b_1, \dots, b_n$ такая. что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \dots < \mathrm{Re}(R_n z)$. Пусть $\mathcal{S}$ – некоторый открытый сектор $\{z = r\exp(i\gamma), r \in (0, \infty), \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)\}$, лежащий в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Тогда система (14) имеет фундаментальную матрицу $e(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$ аналитическую в секторе $\mathcal{S}$, непрерывную в $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ и такую, что имеет место следующая асимптотика:

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{xR_k}(\mathfrak{f}_k + x^{-1}\eta_k(x)), \ \eta_k(x) = O(1), \ x \to \infty, \ x \in \overline{\mathcal{S}}, \tag{16}$$

где $(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \dots, R_n) = (b_1, \dots, b_n)\mathfrak{f}$.

Всюду далее предполагается выполненным, в дополнение к условиям A,B, следующее условие на матрицы A и B_0.

Условие информативности. *Для любого открытого сектора* $\mathcal{S} \subset (\mathbb{C} \setminus \Sigma)$ *с вершиной в нуле и для всех* $k = \overline{2, n}$ *числа*

$$\Delta_k^0 := \det(e_1(x), \ldots, e_{k-1}(x), c_k(x), \ldots, c_n(x))$$

отличны от 0.

При выполнении условия информативности для любого открытого сектора $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ с вершиной в точке $x = 0$ существует и единственна фундаментальная матрица $\psi_0(x) = (\psi_{01}(x), \ldots, \psi_{0n}(x))$ системы (14), аналитическая в секторе $\mathcal{S}$, непрерывная в $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ и такая, что выполнены следующие асимптотические равенства:

$$\psi_{0k}(xt) = \exp(xtR_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), t \to \infty, x \in \mathcal{S},\ \psi_{0k}(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0. \quad (17)$$

Зафиксируем некоторый открытый сектор $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma$ с вершиной в нуле. Следующие матричные функции двух переменных $x \in (0, \infty)$, $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$: $C(x, \rho) := c(\rho x)$, $E(x, \rho) := e(\rho x)$, $\Psi_0(x, \rho) := \psi_0(\rho x)$ являются фундаментальными матрицами для (13).

Условимся относительно некоторых обозначений, используемых в дальнейшем. Помимо обозначений, введенных выше, будем считать, если иное не оговорено явно, что действуют следующие договоренности:

- через $\mathcal{A}_m$ обозначается множество упорядоченных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$, $\alpha_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $u_\alpha := u_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge u_{\alpha_m}$, где $u_j \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}_m$;
- α', где α мультииндекс, обозначает упорядоченный мультииндекс, являющийся дополнением α до $(1, 2, \ldots, n)$;
- $V^{(m)}$, где V – $n \times n$ матрица, обозначает оператор, действующий в $\wedge^m \mathbb{C}^n$ так, что тождество:

  $$V^{(m)}(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m) = \sum_{j=1}^{m} u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{j-1} \wedge V u_j \wedge u_{j+1} \wedge \cdots \wedge u_m;$$

  выполнено для любых векторов $u_1, \ldots, u_m$;
- если $h \in \wedge^n \mathbb{C}^n$, то $|h|$ обозначает число, такое что $h = |h| \mathfrak{e}_1 \wedge \mathfrak{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{e}_n$, $\{\mathfrak{e}_k\}_{k=1}^n$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^n$;
- если $\{a_j\}$ есть некоторая числовая последовательность, то для мультииндекса α обозначаем:

  $$a_\alpha := \sum_{j \in \alpha} a_j,\ a^\alpha := \prod_{j \in \alpha} a_j;$$

для $k \in \{1, \ldots, n\}$ используем обозначения:

$$\overrightarrow{a}_k := \sum_{j=1}^{k} a_j, \ \overleftarrow{a}_k := \sum_{j=k}^{n} a_j, \ \overrightarrow{a}^k := \prod_{j=1}^{k} a_j, \ \overleftarrow{a}^k := \prod_{j=k}^{n} a_j;$$

- $\theta^{\pm}(\cdot)$ обозначают функции Хевисайда:

$$\theta^+(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \leqslant 0 \\ 1, \xi > 0, \end{cases}, \ \theta^-(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \leqslant 0 \\ 0, \xi > 0 \end{cases} = 1 - \theta^+(\xi).$$

- символ Id обозначает тождественный оператор;
- если U и V – некоторые матрицы, то $[U, V] = UV - VU$;
- один и тот же символ M обозначает различные константы в неравенствах; если иное не оговорено явно, константы являются абсолютными (т.е., зависящими только от фиксированных матриц A и B_0).
- символ $W(\cdot)$ обозначает диагональную матрицу-функцию: $W(\xi) = diag(W_1(\xi), \ldots, W_n(\xi))$, где

$$W_k(\xi) := \begin{cases} W_0\left(\xi^{\mu_k}\right)\exp(R_k\xi), \ |\xi| \leqslant 1 \\ \exp(R_k\xi), \ |\xi| > 1, \end{cases}$$

$$W_0(\xi) = (1 - |\xi|)\xi + |\xi|^2, \ |\xi| \leqslant 1, \ W_0(\xi) := \left(W_0\left(\xi^{-1}\right)\right)^{-1}, \ |\xi| > 1.$$

Основным предметом изучения в **Главе 1** являются определяемые специальным образом решения уравнения $\ell y = \rho y$ — *решения типа Вейля*, которые можно трактовать как реакцию системы на внешнее воздействие. Решения типа Вейля играют ключевую роль в теории рассеяния для оператора (5). Для их построения и исследования их свойств используется подход, основанный на привлечении *фундаментальных тензоров* — тензорнозначных решений некоторых вспомогательных систем дифференциальных уравнений [67]. Существенным является тот факт, что каждый из фундаментальных тензоров имеет наименьший рост при $x \to 0$ или $x \to \infty$ среди решений той же вспомогательной системы. Указанное свойство фундаментальных тензоров позволяет использовать для их построения *вольтерровские* интегральные уравнения.

Построению и изучению фундаментальных тензоров посвящен §2 Главы 1. Важное наблюдение состоит в том, что, как и в случае систем без особенности [68] , свойства решений возникающих здесь интегральных уравнений во многом определяются свойствами первого слагаемого ряда метода последовательных

[67]Beals R., Deift P. and Tomei C. Direct and inverse scattering on the line

[68]Савчук А. М., Шкаликов А. А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб. — 2020 — Т. 211 — № 11. — С. 129 – 166.

приближений, используемого при их решении. Эти функции линейно зависят от потенциала $q(\cdot)$, их можно рассматривать как результат применения к $q(\cdot)$ интегральных преобразований, являющихся далекими обобщениями преобразования Фурье – Ханкеля. Изучению данных интегральных преобразований посвящен §1 Главы 1.

Опишем упомянутые результаты более подробно.

Для $k = 1, \ldots, n$ рассмотрим следующие интегральные преобразования:

$$\mathcal{T}_k(Q, x, \rho) = \int\limits_0^x \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \sigma_\alpha \left| \left(Q(t) T_k^0(t, \rho) \right) \wedge C_{\alpha'}(t, \rho) \right| C_\alpha(x, \rho)\, dt, \tag{18}$$

$$\mathcal{F}_k(Q, x, \rho) = -\int\limits_x^\infty \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \sigma_\alpha \left| \left(Q(t) F_k^0(t, \rho) \right) \wedge C_{\alpha'}(t, \rho) \right| C_\alpha(x, \rho)\, dt, \tag{19}$$

где

$$T_k^0(x, \rho) = C_k(x, \rho) \wedge \cdots \wedge C_n(x, \rho), \; F_k^0(x, \rho) = \Psi_{01}(x, \rho) \wedge \cdots \wedge \Psi_{0k}(x, \rho),$$

$\sigma_\alpha = |\mathfrak{h}_\alpha \wedge \mathfrak{h}_{\alpha'}|$, функция $Q = Q(t), t \in (0, \infty)$ такова, что при каждом фиксированном t значение функции $Q(t)$ представляет собой линейный оператор, действующий в $\wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$ в случае преобразования (18) и в $\wedge^k\mathbb{C}^n$ в случае преобразования (19).

Введем обозначение $X_p := L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$; через $\mathcal{X}_p$ будем обозначать пространство $n \times n$ внедиагональных матриц-функций с элементами из X_p. Будем использовать также обозначение $\mathcal{X}_p^m$, где $Q(\cdot) \in \mathcal{X}_p^m$ означает по определению, что:

- при каждом фиксированном $t \in (0, \infty)$ $Q(t)$ есть линейный оператор, действующий в $\wedge^m\mathbb{C}^n$;
- для любой пары мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_m$ функция $|(Q(\cdot)\mathfrak{e}_\beta) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}|$ принадлежит X_p;
- для любого $\alpha \in \mathcal{A}_m$ $|(Q(t)\mathfrak{e}_\alpha) \wedge \mathfrak{e}_{\alpha'}| \equiv 0$.

Заметим, что если $q(\cdot) \in \mathcal{X}_p$, то $(q(\cdot))^{(m)} \in \mathcal{X}_p^m$, $m = \overline{1, n}$.

Теорема 1.2. *Пусть $Q(\cdot) \in \mathcal{X}_p^{n-k+1}$. Тогда $\mathcal{T}_k(Q, x, \rho)$ определена при всех $x \in (0, \infty)$ и $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, аналитична по $\rho \in \mathcal{S}$ и допускает представление*

$$\mathcal{T}_k(Q, x, \rho) = \overleftarrow{W}^k(\rho x)\omega_k(Q, x, \rho),$$

где $\omega_k(Q, x, \rho)$ непрерывна по $(x, \rho) \in [0, \infty) \times \overline{\mathcal{S}}$ и

$$\lim_{\rho \to \infty, \rho \in \overline{\mathcal{S}}} \sup_{x \in [0, \infty)} \|\omega_k(Q, x, \rho)\| = 0.$$

Аналогично, если $Q(\cdot) \in \mathcal{X}_p^k$, *то* $\mathcal{F}_k(Q,x,\rho)$ *определена при всех* $x \in (0,\infty)$ *и* $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$, *аналитична по* $\rho \in \mathcal{S}$ *и допускает представление*

$$\mathcal{F}_k(Q,x,\rho) = \overrightarrow{W}^k(\rho x)\omega_k^+(Q,x,\rho),$$

где $\omega_k^+(Q,x,\rho)$ *непрерывна по* $(x,\rho) \in [0,\infty) \times \overline{\mathcal{S}}$ *и*

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\overline{\mathcal{S}}} \sup_{x\in[0,\infty)} \|\omega_k^+(Q,x,\rho)\| = 0.$$

Теорема 1.3. $\omega_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC\left([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}})\right)\right)$, *причём для любого луча* $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, *где* $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ *соответствующее ограничение* $\omega_k|_l$ *принадлежит* $\mathcal{L}(\mathcal{X}_p^{n-k+1}, BC([0,\infty), \mathcal{H}(l)))$, $\mathcal{H}(l) := C_0(l) \cap L_2(l)$.

Аналогично, $\omega_k^+(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{X}_p^k, BC\left([0,\infty), C_0(\overline{\mathcal{S}})\right)\right)$, *причём для любого луча* $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, *где* $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ *соответствующее ограничение* $\omega_k^+\big|_l$ *принадлежит* $\mathcal{L}(\mathcal{X}_p^k, BC([0,\infty), \mathcal{H}(l)))$.

Здесь и далее для замкнутого неограниченного множества L $C_0(L)$ обозначает банахово пространство функций $f = f(\rho)$, непрерывных на L и таких что $\lim\limits_{\rho\to\infty} f(\rho) = 0$, с нормой $\|f\|_{C_0(L)} = \sup\limits_{\rho\in L} \|f(\rho)\|$. При этом для пространств функций, принимающих значения в различных конечномерных пространствах (т.е., скалярных, векторно-значных, тензорно-значных и т.п.), используется одно и то же обозначение.

Рассмотрим интегральные уравнения:

$$Y(x) = \int_0^x G_{n-k+1}(x,t,\rho)\left(q^{(n-k+1)}(t)Y(t)\right)\,dt + T_k^0(x,\rho), \tag{20}$$

$$Y(x) = -\int_x^\infty G_k(x,t,\rho)\left(q^{(k)}(t)Y(t)\right)\,dt + F_k^0(x,\rho). \tag{21}$$

Теорема 1.5. *Пусть* $q(\cdot) \in L_1(0,\infty)$. *Тогда:*

I. При каждом $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ *уравнение* (20) *имеет единственное решение* $T_k(x,\rho)$ *в классе функций* $Y : (0,\infty) \to \wedge^{n-k+1}\mathbb{C}^n$ *таких, что*

$$\left(\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} Y(x) \in L_\infty(0,\infty),$$

уравнение (21) *имеет единственное решение* $F_k(x,\rho)$ *в классе функций* $Y : (0,\infty) \to \wedge^k\mathbb{C}^n$ *таких, что*

$$\left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} Y(x) \in L_\infty(0,\infty).$$

Нормы функций $\left(\overleftarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} T_k(x,\rho)$, $\left(\overrightarrow{W}^k(\rho x)\right)^{-1} F_k(x,\rho)$ *в* $L_\infty(0,\infty)$ *ограничены в совокупности некоторой константой, не зависящей от* ρ.

Функции $T_k(x,\rho)$, $F_k(x,\rho)$ – *аналитические по* $\rho \in \mathcal{S}$.

II. Функции $\rho^{-\overleftarrow{\mu}_k} T_k(x,\rho)$, $\rho^{-\overrightarrow{\mu}_k} F_k(x,\rho)$ *допускают непрерывные продолжения на множество* $(0,\infty)\times\overline{\mathcal{S}}$. *Предельные значения*

$$\tau_k(x) := \lim_{\rho\to 0} \rho^{-\overleftarrow{\mu}_k} T_k(x,\rho), f_k(x) := \lim_{\rho\to 0} \rho^{-\overrightarrow{\mu}_k} F_k(x,\rho)$$

являются единственными в классах функций $y : x^{-\overleftarrow{\mu}_k} y(x) \in L_\infty(0,\infty)$, $y : x^{-\overrightarrow{\mu}_k} y(x) \in L_\infty(0,\infty)$ *соответственно решениями уравнений:*

$$y(x) = \int_0^x G_{n-k+1}(x,t,0)\left(q^{(n-k+1)}(t)y(t)\right)\,dt + \tau_k^0(x,0), \tag{22}$$

$$y(x) = -\int_x^\infty G_k(x,t,0)\left(q^{(k)}(t)y(t)\right)\,dt + f_k^0(x,0), \tag{23}$$

где $\tau_k^0(x,\rho) := \rho^{-\overleftarrow{\mu}_k} T_k^0(x,\rho)$, $f_k^0(x,\rho) := \rho^{-\overrightarrow{\mu}_k} F_k^0(x,\rho)$.

Следующая теорема уточняет полученный результат. При этом описано также поведение фундаментальных тензоров $T_k(x,\rho)$, $F_k(x,\rho)$ как функций потенциала $q(\cdot)$. В связи с этим q добавлена в список аргументов.

Теорема 1.6. *Пусть* $p > 2$. *Тогда:*

I. Для функции $T_k(q,x,\rho)$, $q \in \mathcal{X}_p, x \in (0,\infty), \rho \in \overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *справедливо представление:*

$$T_k(q,x,\rho) = T_k^0(x,\rho) + \overleftarrow{W}^k(\rho x)\hat{T}_k(q,x,\rho),$$

где $\hat{T}_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$ *и для любого луча* $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, *где* $z \in \overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *ограничение* $\hat{T}_k\Big|_l$ *принадлежит пространству* $C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), \mathcal{H}(l)\right)\right)$, $\mathcal{H}(l) := C_0(l)\cap L_2(l)$.

II. Для функции $F_k(q,x,\rho)$, $q \in \mathcal{X}_p, x \in (0,\infty), \rho \in \overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *справедливо представление:*

$$F_k(q,x,\rho) = F_k^0(x,\rho) + \overrightarrow{W}^k(\rho x)\hat{F}_k(q,x,\rho),$$

где $\hat{F}_k(\cdot,\cdot,\cdot) \in C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), C_0\left(\overline{\mathcal{S}}\right)\right)\right)$ *и для любого луча* $\{\rho = zt, t \in [0,\infty)\}$, *где* $z \in \overline{\mathcal{S}}\setminus\{0\}$ *ограничение* $\hat{F}_k\Big|_l$ *принадлежит пространству* $C\left(\mathcal{X}_p, BC\left([0,\infty), \mathcal{H}(l)\right)\right)$.

Перейдем к изложению результатов Главы 1, описывающих свойства решений типа Вейля. Соответствующие результаты получены в §3.

Определение 1.1. *Зафиксируем произвольные* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и* $\rho \in \mathcal{S}$. *Решение* $y(x)$, $x \in (0, \infty)$ *уравнения* $\ell y = \rho y$ *назовем* k*-м решением типа Вейля, если для него имеют место асимптотики:*

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\; y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Теорема 1.8. *Пусть* $q(\cdot) \in L_1(0, \infty)$. *Зафиксируем произвольное* $k \in \{2, \ldots, n\}$. *Тогда для любого* $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ *такого, что* $\Delta_k(\rho) \neq 0$ k*-е решение типа Вейля* $\Psi_k(\cdot, \rho) : (0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ *существует, единственно и для любого фиксированного* $x \in (0, \infty)$ *является единственным решением системы линейных уравнений* $F_{k-1} \wedge \Psi_k = F_k$, $\Psi_k \wedge T_k = 0$.

Здесь и далее через $\Delta_k(\cdot)$ обозначается *характеристическая функция*

$$\Delta_k(\rho) := |F_{k-1}(x, \rho) \wedge T_k(x, \rho)|,$$

$k \in \{2, \ldots, n\}$.

При $k = 1$ положим $\Delta_1(\rho) := |T_1(x, \rho)| = 1$, $\Psi_1(x, \rho) := F_1(x, \rho)$.

Теорема 1.9. *Пусть*

$$\prod_{k=1}^{n} \Delta_k(0) \neq 0.$$

Тогда для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ *функции* $\rho^{-\mu_k}\Psi_k(x, \rho)$ *как функции* ρ *допускают непрерывное продолжение на множество вида* $\overline{\mathcal{S}} \cap \{\rho : |\rho| \leqslant \delta\}$ *с некоторой положительной* δ.

Определение 1.2. *Пусть* L*– некоторое подмножество сектора* $\overline{\mathcal{S}}$. *Будем говорить, что* $q \in \mathcal{X}_p$ *принадлежит классу* $G_0^p(L)$, *если* $\prod_{k=1}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0$ *для всех* $\rho \in L$.

Следующая теорема содержит основной результат исследования решений типа Вейля.

Теорема 1.11. *Пусть* $p > 2$. *Тогда справедливо представление*

$$\Psi_k(q, x, \rho) = \Psi_{0k}(x, \rho) + W_k(\rho x)\hat{\Psi}_k(q, x, \rho),$$

где $\hat{\Psi}_k(\cdot, \cdot, \cdot) \in C(G_0^p(l), C([0, T], \mathcal{H}(l)))$ *для любого луча* $l = \{\rho = zt, t \in [0, \infty)\}$, $z \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ *и любого отрезка* $[0, T], 0 < T < \infty$.

Глава 2 посвящена решению обратной задачи рассеяния для оператора (5).

Пусть $\mathcal{S}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N+1$ – открытые секторы с вершиной в нуле такие, что $\mathbb{C} \setminus \Sigma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$, $\mathcal{S}_{N+1} = \mathcal{S}_1$. Через Σ_ν будем обозначать открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$. Обозначим $\bar{\Sigma}_\nu := \Sigma_\nu \cup \{0\}$, $\Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \Sigma_\nu = \Sigma \setminus \{0\}$.

Для (произвольной) функции $f = f(\rho)$, определенной на $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ договоримся при $\rho \in \Sigma'$ через $f^\pm(\rho)$ обозначать пределы:

$$f^\pm(\rho) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\rho \pm i\varepsilon s), \ s = \frac{\rho}{|\rho|}.$$

Пусть $q(\cdot) \in L_1(0,\infty)$ – произвольная фиксированная матрица функция, $\Psi = \Psi(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ – матрица, составленная из решений типа Вейля в каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$. Если $\rho \in \Sigma'$ таково, что $\Delta_k^\pm(\rho) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, то, согласно результатам предыдущей главы существуют пределы $\Psi^\pm(x,\rho)$ и определена не зависящая от x матрица $v = v(\rho)$ такая, что

$$\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho) v(\rho). \tag{24}$$

Введем при $\rho \in \Sigma'$ матрицу перестановок $\Pi(\rho)$ такую, что

$$(R_1^+(\rho), \ldots, R_n^+(\rho)) = (R_1^-(\rho), \ldots, R_n^-(\rho))\Pi(\rho),$$

или, эквивалентно, $R^+(\rho) = \Pi^{-1}(\rho) R^-(\rho) \Pi(\rho)$, где, как и всюду далее, если иное не оговорено явно,

$$R := diag(R_1, \ldots, R_n).$$

Ясно, что $\Pi(\rho)$ представляет собой блочно–диагональную матрицу, постоянную на каждом из лучей Σ_ν.

В дальнейшем блочно-диагональные матрицы с такой блочной структурой будем называть Π-*диагональными.* При выполнении Условия B блочная структура матрицы $\Pi(\rho)$ может быть описана следующим образом. Заметим, прежде всего, что в двойном неравенстве $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) \leqslant \mathrm{Re}(\rho R_k) \leqslant \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ знак равенства возможен не более, чем в одной позиции. Обозначим через I_0 множество таких индексов k, для которых $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k) < \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ ($\mathrm{Re}(\rho R_k) < \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ в случае $k = 1$). Таким индексам в матрице $\Pi(\rho)$ соответствуют «тривиальные» 1×1 диагональные блоки, причем $\Pi_{kk}(\rho) = 1$. Далее, определим I_- как множество k таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ (при этом $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k)$, если $k > 1$). Отметим, что для $k \in I_-$ имеем $R_k^+ = R_{k+1}$, $R_{k+1}^+ = R_k$, иначе говоря, таким k в матрице $\Pi(\rho)$ соответствует 2×2 блок вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

расположенный в строках и столбцах с номерами k и $k+1$.

Теорема 2.1. *При каждом $\rho \in \Sigma'$ $v(\rho)$ – нижнетреугольная* П-*диагональная матрица. Кроме того, для каждого индекса $k \in I_-$ имеем:*

1. $v_{k+1,k}(\rho) \equiv 1$*;*

2. $v_{kk}(\rho)v_{k+1,k+1}(\rho) \equiv -1$.

Теорема 2.2. *Пусть для всех $\nu = 1, \ldots, N$ выполнено условие*

$$\lim_{\rho\to 0, \rho\in\overline{\mathcal{S}}_\nu} \prod_{k=1}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0.$$

Тогда для всех $\nu = 1, \ldots, N$ существуют пределы $\lim\limits_{\rho\to 0, \rho\in\Sigma_\nu} v(\rho)$, зависящие только от матриц A, B.

Определение 2.1. *Будем говорить, что $q \in \mathcal{X}_p$ принадлежит классу $G_0^p(\Sigma)$, если*

$$\prod_{k=1}^{n} \Delta_k^{\pm}(q, \rho) \neq 0$$

для всех $\rho \in \Sigma$. При $\rho = 0$ здесь подразумевается отличие от нуля предельных значений левой части при $\rho \to 0$, $\rho \in \Sigma_\nu$ для всех $\nu = 1, \ldots, N$.

Определим пространство $\mathcal{H}(\Sigma)$ как пространство, состоящее из функций $\varphi(\cdot) \in L_2(\Sigma)$, таких что для каждого $\nu = 1, \ldots, N$ ограничение $\varphi(\rho)\big|_{\rho\in\Sigma_\nu}$ непрерывно и существуют $\lim\limits_{\rho\to 0, \rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho)$ и $\lim\limits_{\rho\to \infty, \rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho)$, причем

$$\lim_{\rho\to \infty, \rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho) = 0.$$

Иначе говоря, ограничение $\varphi(\rho)\big|_{\rho\in\Sigma_\nu}$ допускает продолжение на $\overline{\Sigma}_\nu$ до элемента пространства $C_0(\overline{\Sigma}_\nu)$. Для $\varphi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ положим $\|\varphi\| := \|\varphi\|_{L_2(\Sigma)} + \|\varphi\|_{C_0(\Sigma)}$. Через $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ обозначим замкнутое подпространство, состоящее из таких $\varphi(\cdot) \in \mathcal{H}(\Sigma)$, что для каждого $\nu = 1, \ldots, N$ $\lim\limits_{\rho\to 0, \rho\in\Sigma_\nu} \varphi(\rho) = 0$.

Теорема 2.3. *Пусть $p > 2$. Тогда $v(\cdot, \cdot) - v_0(\cdot) \in C(G_0^p(\Sigma), \mathcal{H}_0(\Sigma))$.*

Здесь и далее матрица сопряжения в (24) рассматривается как функция $v = v(q, \rho)$ спектрального параметра $\rho \in \Sigma'$ и потенциала $q(\cdot)$, $v_0(\rho) := v(0, \rho)$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что $q(\cdot) \in \mathcal{X}_p$ принадлежит классу G_0^p, если для каждого $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ справедливо $q(\cdot) \in G_0^p\left(\overline{\mathcal{S}}_\nu\right)$.*

Обратная задача рассеяния далее рассматривается в следующей постановке.

Задача 1. *Восстановить* $q(\cdot) \in G_0^p$ *по заданной матрице-функции* $v(q,\rho)$, $\rho \in \Sigma'$.

В дальнейшем матрицу-функцию $v(q,\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ для заданного $q(\cdot) \in G_0^p$ будем называть *данными рассеяния* для системы (6) с потенциалом $q(\cdot)$.

Условимся, что для каждого $\nu \in \{1,\dots,N\}$ открытые лучи Σ_ν ориентированы в направлении от 0 к ∞. Обозначим через $Cf(\rho)$ интеграл Коши:

$$Cf(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} f(\zeta), \ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma;$$

через $C^{\pm} f(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ обозначим предельные значения $C^{\pm} f(\rho) := (Cf)^{\pm}(\rho)$.

Введем в рассмотрение следующую *матрицу спектральных отображений* $P(x,\rho) := \Psi(x,\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)$, где матрица $\Psi_0(x,\rho)$ есть матрица, состоящая из решений типа Вейля «простейшего» оператора с $q = 0$. Для $\rho \in \Sigma'$ определим: $\hat{P}(x,\rho) := P^+(x,\rho) - P^-(x,\rho)$. Обозначим:

$$V(x,\rho) := \Psi_0(x,\rho) v(\rho) v_0^{-1}(\rho) \Psi_0^{-1}(x,\rho). \tag{25}$$

Теорема 2.5. *Для каждого фиксированного* $x > 0$*:*

1. $\hat{P}(x,\cdot)$ *является единственным в пространстве* $L_2(\Sigma)$ *решением уравнения* $\mathbf{A}(x)\varphi = \hat{V}(x,\cdot)$, *где* $\hat{V}(x,\rho) := V(x,\rho) - I$, $\mathbf{A}(x)$ *– линейный оператор, действующий в* $L_2(\Sigma)$ *по формуле:*

$$\mathbf{A}(x)\varphi(\rho) := \left(C^+\varphi\right)(\rho) - \left(C^-\varphi\right)(\rho) V(x,\rho);$$

2. *оператор* $\mathbf{A}(x)$ *обратим.*

Обозначим через $L_2^+(\Sigma)$ пространство П-верхнетреугольных (нестрого) матриц-функций с элементами из $L_2(\Sigma)$, $\mathcal{H}_0^+(\Sigma) := \mathcal{H}_0(\Sigma) \cap L_2^+(\Sigma)$. Через $\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$ будем обозначать пространство нижнетреугольных П - диагональных матриц-функций с элементами из $\mathcal{H}_0(\Sigma)$. Пространство непрерывных функций $C[0,\infty)$ будем рассматривать с топологией, порожденной системой полунорм $\|\cdot\|_{C[0,T]}$, $T \in (0,\infty)$. Через $L_{2,loc}(0,\infty]$ обозначим пространство функций, принадлежащих $L_2(\varepsilon,\infty)$ для любого $\varepsilon > 0$, с топологией, определяемой системой полунорм $\|\cdot\|_\varepsilon = \|\cdot\|_{L_2(\varepsilon,\infty)}$.

Лемма 2.3. *Определим билинейный оператор:*

$$\mathbf{\Phi}(u,\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i} \left[B, \int\limits_{\Sigma} d\rho \left(C^-\varphi(x,\cdot)\right)(\rho) \hat{V}(u,x,\rho) \right],$$

где

$$\hat{V}(u,x,\rho) := \Psi_0(x,\rho) u(\rho) \Psi_0^{-1}(x,\rho).$$

Тогда:

1. $\mathbf{\Phi} : \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma) \times C([0,\infty), L_2(\Sigma)) \to C[0,\infty)$ *непрерывен;*
2. *Для любых* $u \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$, $\varphi \in C([0,\infty), L_2(\Sigma))$ *при* $r \to \infty$ $\mathbf{\Phi}_r(u,\varphi) \to \mathbf{\Phi}(u,\varphi)$, *где*

$$\mathbf{\Phi}_r(u,\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^-(|\rho|-r)\left[B, \left(C^-\varphi(x,\cdot)\right)(\rho)\hat{V}(u,x,\rho)\right].$$

Лемма 2.5. *Определим семейство линейных операторов:*

$$\mathbf{F}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^-(|\rho|-r)\left[B, \Psi_0(x,\rho) f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],$$

$r > 0$. *Тогда*

1. *для каждого* $r > 0$ $\mathbf{F}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right)$;
2. *существует сильный предел*

$$\mathbf{F} = s - \lim_{r\to\infty} \mathbf{F}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma), L_{2,loc}(0,\infty]\right).$$

Теорема 2.6. *Пусть* $v(\rho) = v(q,\rho)$ *– данные рассеяния для оператора* (5) *с потенциалом* $q(\cdot) \in G_0^p$, $\hat{v}(\rho) = v(\rho)v_0^{-1}(\rho) - I$, $\hat{P}(x,\rho) = P^+(x,\rho) - P^-(x,\rho)$. *Тогда справедлива формула восстановления:*

$$q = \mathbf{\Phi}(\hat{v}, \hat{P}) + \mathbf{F}\hat{v}.$$

Изложенные выше результаты дают решение Задачи 1 «по необходимости», т.е., в предположении, что поданная на вход матрица-функция $v(\cdot)$ действительно является данными рассеяния для оператора (5) с некоторым потенциалом $q(\cdot) \in G_0^p$.

Одним из важных и наиболее сложных вопросов теории обратных спектральных задач является вопрос об условиях их разрешимости, или, в иной терминологии, вопрос характеризации соответствующих спектральных данных [69] , [70] , [71], [72] – данных рассеяния в случае изучаемой в данной работе Задачи 1. Данному вопросу посвящен §3 Главы 2. Опишем полученные здесь результаты.

Определим следующий класс матриц-функций: будем говорить, что матрица-функция $v = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ принадлежит классу $\mathbf{V}$, если

[69] Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач

[70] Beals R., Deift P. and Tomei C. Direct and inverse scattering on the line

[71] Бондаренко Н. П. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного оператора Штурма–Лиувилля // Функциональный анализ и его приложения. — 2012. — Т. 46, № 1. — С. 65 – 70.

[72] Zhura, N.A., Soldatov, A.P. On a representation of the solution of the inverse Sturm–Liouville problem on the entire line // Diff. Equat. — 2015 — Vol. 51 — Pp. 1022 – 1032.

1. $v(\cdot) - v_0(\cdot) \in \mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)$;
2. нетривиальные диагональные блоки матрицы $v(\rho)$ расположены в строках с номерами k и $k+1$, где $k \in I_-$, и имеют вид

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

причем $v_{kk}v_{k+1,k+1} = -1$.

Из результатов, приведенных выше, следует, что, если $v(\cdot) = v(q,\cdot)$ – данные рассеяния для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$, то необходимо $v(\cdot) \in \mathbf{V}$. Мы будем рассматривать $\mathbf{V}$ как метрическое пространство с метрикой $dist(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}_0^{\Pi}(\Sigma)}$, корректно определенной в силу равенства $v_1 - v_2 = (v_1 - v_0) - (v_2 - v_0)$.

Для заданной матрицы-функции $v = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma$ определим:

$$\hat{v}(\rho) := v(\rho)v_0^{-1}(\rho) - I,$$

$$V = V(v,x,\rho) := \Psi_0(x,\rho)v(\rho)v_0^{-1}(\rho)(\Psi_0(x,\rho))^{-1},$$
$$\hat{V}(v,x,\rho) := V(v,x,\rho) - I = \Psi_0(x,\rho)\hat{v}(\rho)(\Psi_0(x,\rho))^{-1}.$$

Введем зависящие от параметров $v \in \mathbf{V}$, $x \in [0,\infty)$ операторы

$$\mathbf{A}(v,x)f(\rho) := C^+f(\rho) - (C^-f)(\rho)V(v,x,\rho) = f(\rho) - (C^-f)(\rho)\hat{V}(v,x,\rho).$$

Из свойств матриц-функций $\hat{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, $V(\cdot,\cdot,\cdot)$ следует, что для любых $v \in \mathbf{V}$, $x \in [0,\infty)$ $\mathbf{A}(v,x) \in \mathcal{L}(L_2(\Sigma))$; более того, при каждом фиксированном $v \in \mathbf{V}$ имеем $\mathbf{A}(v,\cdot) \in BC([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma)))$, причем $\mathbf{A}(\cdot,\cdot) \in C(\mathbf{V}, BC([0,\infty), \mathcal{L}(L_2(\Sigma))))$.

Далее, определим (при тех значениях параметров, при которых правая часть имеет смысл):

$$\mathbf{p}(v,x,\cdot) := (\mathbf{A}(v,x))^{-1}\hat{V}(v,x,\cdot),$$

$$\mathbf{q}(v,\cdot) := \mathbf{\Phi}(\hat{v}(\cdot), \mathbf{p}(v,\cdot,\cdot)) + \mathbf{F}\hat{v}(\cdot).$$

Следующая теорема содержит основной результат §3 Главы 2.

Теорема 2.7. *Пусть $v(\cdot) \in \mathbf{V}$. Для того, чтобы $v(\cdot)$ являлась данными рассеяния $v(q,\cdot)$ для некоторого оператора вида (5) с потенциалом $q(\cdot) \in G_0^p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *для каждого $x \in [0,\infty)$ оператор $\mathbf{A}(v,x)$ обратим;*
2. *для каждого $k = \overline{1,n}$ найдется функция $\delta_k(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и такая, что:*

- *для каждого* $\nu = \overline{1, N}$ *существует непрерывное продолжение функции* $\rho^{\mu_k}\delta_k(\rho)$ *в* $\overline{\mathcal{S}}_\nu$*;*
- $\rho^{\mu_k}\delta_k(\rho)$ *не обращается в нуль ни для каких* $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$*,* $\nu = \overline{1, N}$*;*
- *при* $\rho \in \Sigma'$ *справедливы формулы сопряжения* $\delta^-(\rho) = v_{kk}(\rho)\delta_k^+(\rho)$*;*
- *при* $\rho \to \infty$*,* $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ *справедлива асимптотика* $\delta(\rho) = \delta_0(\rho)(I + o(1))$*, кроме того,* $\delta^\pm(\cdot)(\delta_0^\pm(\cdot))^{-1} - I \in L_2(\Sigma)$*. Здесь* $\delta_0(\rho)$ *– диагональная матрица, такая что* $\Psi_0(x, \rho)\delta_0(\rho) = (\mathfrak{h} + o(1))x^\mu$ *при* $x \to 0$*,* $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n)$*.*

3. $\mathbf{q}(v, \cdot) \in \mathcal{X}_p$*.*

Обозначим через $\mathbf{V}_{00}$ множество матриц-функций $v(\cdot) \in \mathbf{V}$ таких, что разность $v - v_0$ принадлежит классу бесконечно гладких функций на Σ, обращающихся в 0 вне некоторого кольца $\{\rho : 0 < r_1 \leqslant |\rho| \leqslant r_2 < \infty\}$ (своего для каждой функции).

Следующая теорема показывает, что в случае $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$ выполнение наиболее трудно проверяемого условия 3 Теоремы 2.7 следует из выполнения условия 1.

Теорема 2.8. *Пусть* $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$ *такова, что выполнено условие 1 Теоремы 2.7. Тогда* $\mathbf{q}(v, x)$ *непрерывна по* $x \in [0, \infty)$ *и справедлива оценка* $\mathbf{q}(v, x) = O(x^{-m})$ *при* $x \to \infty$*, где* $m \geqslant 0$ *произвольно.*

Пользуясь результатом Теоремы 2.8, можно получить *достаточные* условия разрешимости изучаемой обратной задачи.

Следствие 2.2. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое что любая* $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{00}$*:* $\|v - v_0\|_{L_\infty(\Sigma)} < \varepsilon_0$ *является данными рассеяния для некоторого оператора вида* (5) *с потенциалом* $q(\cdot) \in G_0^p$*.*

Глава 3 посвящена исследованию обратных задач на некомпактных метрических графах.

В **первом параграфе** рассматривается некомпактный метрический граф–звезда Γ, состоящий из конечного набора лучей $\{\mathcal{R}_k\}_{k=1}^p$, выходящих из общей внутренней вершины. Функция y, заданная на луче $\mathcal{R}_k$, рассматривается как функция локального параметра $x \in [0, \infty)$, причем значение параметра $x = 0$ соответствует вершине. Функция y, заданная на Γ, рассматривается как набор функций $\{y_k\}_{k=1}^p$ (где функция $y_k = y\,|_{\mathcal{R}_k}$ рассматривается как функция на $[0, \infty)$, как указано выше).

На каждом луче $\mathcal{R}_k$, $k = \overline{1, p}$ задано дифференциальное уравнение:

$$\ell_k y := -y'' + \left(\frac{\nu_{k0}}{x^2} + q_k(x)\right) y = \lambda y = \rho^2 y, \tag{26}$$

где $\nu_{k0}=\nu_k^2-1/4$, $\mathrm{Re}\nu_k>1/2$, $\nu_k\notin\mathbb{N}$ и функция $q_k(\cdot)$ удовлетворяет условию:

$$\int\limits_0^1\left|x^{1-2\nu_k}q_k(x)\right|dx+\int\limits_1^\infty|xq_k(x)|\,dx<\infty. \tag{27}$$

Комплексные (вообще говоря) числа ν_{k0} могут быть различными для различных лучей; но следующее условие предполагается выполненным всюду в данном параграфе.

Условие 1. *Если $\nu_j\neq\nu_k$, то $Re\nu_j\neq Re\nu_k$.*

Пусть $C_{kj}(x,\lambda)$ суть решения невозмущенного уравнения:

$$-y''+\frac{\nu_{0k}}{x^2}y=\lambda y=\rho^2y, \tag{28}$$

представимые в виде рядов:

$$C_{kj}(x,\lambda)=x^{\mu_{kj}}\sum_{n=0}^{\infty}c_{jn}^{(k)}\lambda^nx^{2n},\ c_{10}^{(k)}c_{20}^{(k)}=(2\nu_k)^{-1}, \tag{29}$$

где

$$c_{jn}^{(k)}=(-1)^nc_{j0}^{(k)}\left(\prod_{s=1}^{n}((2s+\mu_{kj})(2s+\mu_{kj}-1)-\nu_{0k})\right)^{-1},$$

$\mu_{k1}=1/2-\nu_k$, $\mu_{k2}=1/2+\nu_k$. Заметим, что функции $C_{kj}(x,\lambda)$ являются целыми функциями спектрального параметра λ.

Через $S_{kj}(x,\lambda)$, $j=1,2$ обозначим решения уравнения (26), удовлетворяющие интегральным уравнениям:

$$S_{kj}(x,\lambda)=C_{kj}(x,\lambda)-\int\limits_0^x g_k(x,t,\lambda)q_k(t)S_{kj}(t,\lambda)dt, \tag{30}$$

где через $g_k(x,t,\lambda)$ обозначены функции Грина невозмущенного уравнения: $g_k(x,t,\lambda)=C_{k1}(x,\lambda)C_{k2}(t,\lambda)-C_{k2}(x,\lambda)C_{k1}(t,\lambda)$. При выполнении условия (27) уравнения (30) однозначно разрешимы для всех значений λ, решения $S_{kj}(x,\lambda)$ являются целыми функциями λ.

Пусть заданная на Γ функция $y=\{y_k\}_{k=1}^p$ такова, что функции y_k, $k=\overline{1,p}$ удовлетворяют уравнениям (26). Определим *условия склейки* в вершине графа Γ следующим образом:

$$U_{j1}(y_j)=U_{k1}(y_k),\,j\neq k,\ \sum_{j=1}^{p}U_{j2}(y_j)=0. \tag{31}$$

Для произвольного фиксированного $k \in \{1, \dots, p\}$ и произвольного $\rho \in \mathbb{C}^+$ определим *решение типа Вейля, ассоциированное с лучом* $\mathcal{R}_k$, как функцию $\psi_k(\rho) = \{\psi_{kj}(x, \rho)\}_{j=1}^p$, $x \in [0, \infty)$ такую, что:

- функции $\psi_{kj}(\cdot, \rho)$, $j = \overline{1, p}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\ell_j \psi_{kj} = \rho^2 \psi_{kj}$;
- $\psi_{kj}(x, \rho) = O\left(\exp(i\rho x)\right)$ при $x \to \infty$, $j \neq k$;
- $\psi_{kk}(x, \rho) = \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$;
- $\psi_k(\rho)$ удовлетворяет условиям склейки (31).

Отметим, что для каждого $k = \overline{1, p}$ решение типа Вейля, ассоциированное с лучом $\mathcal{R}_k$, определяется, тем не менее, глобально на всем графе и содержит, таким образом, спектральную информацию, "снимаемую"со всего графа Γ.

Введем *коэффициент отражения, ассоциированный с лучом* $\mathcal{R}_k$, как коэффициент асимптотического разложения:

$$\psi_{kk}(x, \rho) = \exp(-i\rho x) + r_k(\rho) \exp(i\rho x) + o(1), x \to \infty, \tag{32}$$

$\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Данными рассеяния, ассоциированными с лучом* $\mathcal{R}_k$, будем называть набор $J_k := \{r_k(\cdot), Z_k^+, \alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^+\}$, где Z_k^+ – множество полюсов решения типа Вейля $\psi_k(\rho)$, $\alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^+$ – постоянные, такие что:

$$\operatorname{res}_{\rho=\rho_0} \psi_{kk}(x, \rho) = \alpha_k(\rho_0) \exp(i\rho_0 x)(1 + o(1)), x \to \infty, \tag{33}$$

$\rho_0 \in Z_k^+$. Набор $J = \{J_k\}_{k=1}^{p-1}$ будем называть данными рассеяния для графа Γ.

Исследование обратной задачи рассеяния на графе Γ проведено в предположении выполнения:

1. Условия регулярности.
2. Условия простоты и невещественности дискретного спектра.
3. Условия "общего положения".

Основные результаты §1 Главы 3 включают в себя:

- Теорему единственности восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по данным рассеяния, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$.
- Конструктивную процедуру решения обратной задачи $IP(k)$ восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по данным рассеяния, ассоциированным с лучом $\mathcal{R}_k$.
- Теорему единственности и конструктивную процедуру решения обратной задачи рассеяния на всем графе Γ по заданным данным рассеяния J.

Конструктивная процедура решения Задачи $IP(k)$ основана на сведении задачи к линейному уравнению вида

$$\mathbf{A}(x)\Phi(x,\cdot) = G(x,\cdot),$$

причем доказана обратимость для каждого значения параметра $x \in (0,\infty)$ линейного оператора $\mathbf{A}(x)$.

Во **втором параграфе** Главы 3 рассматривается некомпактный метрический граф G, состоящий из гладкой замкнутой кривой $\mathcal{R}_0$ длины π и лучей $\{\mathcal{R}_k\}_{k=1}^p$, $p \geqslant 2$, выходящих из некоторой точки $v \in \mathcal{R}_0$.

На каждом ребре графа G задано дифференциальное выражение:

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x) y_j, \tag{34}$$

где функция $q = \{q_j\}_{j=0}^p$ предполагается вещественно-значной и удовлетворяющей условию:

$$\int_0^\pi |q_0(x)|\ dx + \sum_{j=1}^p \int_0^\infty (1+x)|q_j(x)|\,dx < \infty. \tag{35}$$

Для произвольного луча $\mathcal{R}_k$, $k \in \overline{1,p}$ определим решение типа Вейля, ассоциированное с $\mathcal{R}_k$ как функцию на графе G $\psi_k(\rho) = \{\psi_{kj}(\cdot,\rho)\}_{j=0}^p$, $\rho \in \mathbb{C}^+$ такую, что:

- она непрерывна на G и удовлетворяет условию Киргофа в вершине;
- выполняются уравнения $\ell_j \psi_{kj} = \rho^2 \psi_{kj}$, $j = \overline{0,p}$;
- $\psi_{kj}(x,\rho) = O\left(\exp(i\rho x)\right)$ при $x \to \infty$, $j = \overline{1,p} \setminus \{k\}$;
- $\psi_{kk}(x,\rho) = \exp(-i\rho x)(1 + o(1))$ при $x \to \infty$.

Определим данные рассеяния, ассоциированные с лучом $\mathcal{R}_k$, как набор данных $J_k := \{s_k(\cdot), Z_k^-, \alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^-\}$, где $s_k(\cdot)$ – коэффициент отражения, ассоциированный с лучом $\mathcal{R}_k$, Z_k^- – множество полюсов решения типа Вейля $\psi_k(\rho)$, $\alpha_k(\rho), \rho \in Z_k^-$ – константы, такие что:

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0} \psi_{kk}(x,\rho) = i\alpha_k(\rho_0)\exp(i\rho_0 x)(1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Результаты §3.2 включают в себя:

- Теорему единственности восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по данным рассеяния, ассоциированным с $\mathcal{R}_k$.
- Конструктивную процедуру решения обратной задачи $IP(k)$ восстановления потенциала $q_k(\cdot)$ по J_k.
- Теорему единственности и конструктивную процедуру решения обратной задачи рассеяния на всем графе G по заданным данным рассеяния.

В **третьем параграфе** рассматривается задача рассеяния на геометрическом графе Γ, состоящем из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv D^3 y_0 + p_{01}(x) D y_0 + p_{00}(x) y_0 = \rho^3 y_0, \tag{36}$$

где ρ - спектральный параметр, $D = -id/dx$ и коэффициенты $p_{00}(x)$, $p_{01}(x)$ таковы, что $\ell_0^* = \ell_0$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_1 y_1 \equiv D^N y_1 + \sum_{s=0}^{N-2} p_{1s}(x) D^s y_1 = \rho^N y_1, \tag{37}$$

где $N \geqslant 3$.

Введем в рассмотрение следующие линейные формы:

$$U_\nu(y) := \sigma_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{s=0}^{\nu-2} \sigma_{\nu s} y^{(s)}(0), u_{\xi\nu}(y) = (-1)^{\chi_{\xi\nu}} y^{(\nu-1)}(\xi),$$

где $\xi \in \{0, T\}$, $\chi_{0\nu} = 0$, $\chi_{T\nu} = \chi$, $\nu = 1, 2$, $\chi_{T3} = \chi + 1$, $\chi \in \{0, 1\}$. Для функции $y = (y_0, y_1)$ на Γ и $\nu \in \overline{1, N}$ определим условие склейки $C(\nu)$ как равенство $u_{0\nu}(y_0) = u_{T\nu}(y_0) = U_\nu(y_1)$, а условие $K(\nu)$ равенством $u_{0\nu}(y_0) + u_{T\nu}(y_0) + U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu \leqslant 3$ и $U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu > 3$.

Пусть $S_l := \{\arg(i\rho) \in \big((l-1)\frac{\pi}{N}, l\frac{\pi}{N}\big)\}$. Для фиксированного l через R_k, $k = \overline{1, N}$ обозначим корни N-й степени из 1, занумерованные таким образом, что $\mathrm{Re}(i\rho R_1) < \mathrm{Re}(i\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(i\rho R_N)$ для всех $\rho \in S_l$.

Зафиксируем $\chi \in \{0, 1\}$. Для каждого $k = \overline{1, N}$ в каждом из секторов S_l определим *решение типа Вейля порядка* k как решение системы уравнений (36), (37) $\psi_k(\rho) = (\psi_{k0}(x, \rho), \psi_{k1}(x, \rho))$ со следующими свойствами:
1) $\psi_{k1}(x, \rho) = \exp(i\rho R_k x)(1 + o(1)),\ x \to \infty$;
2) для $\psi_k(\rho)$ выполнены условия склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1, \nu_k - 1}, \nu_k = \min\{k, 3\}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$.

Результаты §3.3 представляют собой теоремы единственности двух видов. В одной из них изучается вопрос о восстановлении коэффициентов оператора ℓ_1 по данным рассеяния, ассоциированным с лучом r_1. Соответствующие данные рассеяния вводятся в терминах решений типа Вейля аналогично тому, как вводятся данные рассеяния в задаче рассеяния для операторов произвольного порядка на вещественной оси. Теорема единственности для задачи рассеяния на всем графе утверждает, что для восстановления коэффициентов обоих операторов ℓ_1, ℓ_0 достаточно задания данных рассеяния, включающих в себя данные рассеяния J_1^χ, ассоциированные с лучом r_1, измеренные дважды со значениями $\chi = 0$ и $\chi = 1$, а также, вообще говоря, некоторые дополнительные данные, относящиеся оператору ℓ_0, рассматриваемому отдельно. Указанные дополнительные данные представляют собой конечный набор чисел, размер которого зависит от оператора; в частности, указанный набор может быть пустым.

В **Главе 4** изучаются обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов специального вида.

Результат **первого параграфа** носит вспомогательный характер и представляет собой формулу умножения для некоторых функций, выражаемых в терминах функций Миттаг–Леффлера.

Пусть символ J^α обозначает оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля:

$$(J^\alpha f)(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\, dt.$$

Всюду в дальнейшем мы будем полагать $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(\cdot, \lambda) := (Id - J^\alpha)^{-1}\, 1$, где символ Id обозначает тождественный оператор, а 1 – функцию, равную 1 тождественно.

Теорема 4.1. *Для произвольных $x, y > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо следующее соотношение:*

$$\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=-m}^{m} \varphi\left(x + \omega^j y, \lambda\right) +$$

$$\int_0^x g(x-t,y)\varphi(t,\lambda)dt + \int_0^y g(y-t,x)\varphi(t,\lambda)dt,$$

где $\omega = \exp(i\frac{2\pi}{\alpha})$, $m = [\alpha/2]$, $g(\cdot,\cdot)$ – функция вида:

$$g(x,y) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{x^{\alpha-1}y^\alpha}{x^{2\alpha} - 2x^\alpha y^\alpha \cos\alpha\pi + y^{2\alpha}}.$$

Во **втором параграфе** рассматривается обратная задача восстановления интегро-дифференциального оператора дробного порядка:

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1},\ \alpha > 2, \alpha \notin \mathbb{N}, \tag{38}$$

где M – оператор свертки:

$$Mf(x) = (M * f)(x) = \int\limits_0^x M(x-t)f(t)dt,$$

$M \in L_2(0,1)$, по заданному спектру краевой задачи:

$$Ly = \lambda y,\; D^{\alpha-k}y(0) = 0, k = \overline{2, [\alpha]+1},\; D^{\alpha-1}y(1) = 0. \tag{39}$$

Здесь D^α обозначает оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля, символ $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α.

Основным результатом является конструктивная процедура решения обратной задачи, основанная на следующей теореме.

Теорема 4.4. *Функция $M(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению:*

$$M(t) = -\frac{\alpha}{1-t}w(t) - A_{10}\int_0^t \frac{\alpha}{1-t}M(\tau)d\tau +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{\alpha\theta_n(1-t)}{1-t}M^{*n}(t) + \int_0^t\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\alpha\theta_\nu(1-t)}{1-t}A_{n\nu}(t-\tau)\right)M^{*n}(\tau)d\tau\right\} \tag{40}$$

Для каждого фиксированного $T \in (0,1)$ уравнение (40) однозначно разрешимо в $L_2(0,T)$.

В уравнении (40):

$$f^{*n} := f^{*(n-1)} * f,\; f^{*1} := f;\; \theta_n(\xi) := \frac{1}{n!}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^n,$$

число A_{10} и функции $A_{n\nu}(\cdot)$ зависят только от α, функция $w(\cdot)$ однозначно определяется заданием спектра задачи (39) и может быть найдена по явным формулам.

В **третьем параграфе** рассматривается интегро-дифференциальный оператор:

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1},\; \alpha \in (1,2), \tag{41}$$

где M – интегральный оператор вида:

$$Mf(x) = \int\limits_0^x M(x-t,t)f(t)dt,$$

$M(\eta,\xi) = N(\eta)p(\xi)$, $(\eta,\xi) \in \Pi = \{\eta,\xi \geqslant 0, \eta+\xi \leqslant 1\}$, $p(\cdot)$ – непрерывная строго положительная функция, $N(\cdot) \in L_\infty(0,1)$.

Изучаемая обратная задача состоит в восстановлении оператора (41) по заданному спектру краевой задачи:

$$Ly = \lambda y,\; D^{\alpha-2}y(0) = 0,\; D^{\alpha-1}y(1) - D^{\alpha-1}y(0) = 0, \tag{42}$$

причем функция $p(\cdot)$ предполагается известной априори.

Основным результатом является конструктивная процедура решения обратной задачи, основанная на следующей теореме.

Теорема 4.6. *Функция $N(\cdot)$ удовлетворяет нелинейному уравнению:*

$$w(t) = p_1(1-t)N(t) + K(N; t, 1-t). \tag{43}$$

Для каждого фиксированного $T \in (0,1)$ уравнение (43) имеет единственное решение в $L_\infty(0,T)$.

В уравнении (43) функция $w(t)$ однозначно определяется заданием спектра задачи (42) и может быть найдена по явным формулам,

$$p_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\xi p(t)dt,$$

$$K(N;\eta,\xi) = \int_0^\eta dt \int_0^t g(\eta-t, t-\tau)N(\tau)p(t-\tau)d\tau +$$
$$\int_0^\eta dt \int_0^t g(t-\tau, \eta-t)N(\tau)p(t-\tau+\xi)d\tau + \sum_{n=2}^\infty K_n(\eta,\xi),$$

где:

$$K_1(\eta,\xi) = -\frac{1}{\alpha}N(\eta)\int_0^\xi p(t)dt - \int_0^\eta dt\int_0^t g(\eta-t,t-\tau)N(\tau)p(t-\tau)d\tau -$$
$$\int_0^\eta dt\int_0^t g(t-\tau,\eta-t)N(\tau)p(t-\tau+\xi)d\tau, \tag{44}$$

$$K_{n+1}(\eta,\xi) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\xi M_n(\eta,t)dt - \int_0^\eta dt\int_0^t g(\eta-t,t-\tau)M_n(\tau,t-\tau)d\tau -$$
$$\int_0^\eta dt\int_0^t g(t-\tau,\eta-t)M_n(\tau,t-\tau+\xi)d\tau, \tag{45}$$

$$M_n(\eta,\xi) = \int_0^\eta N(\eta-\tau)p(\xi+\tau)K_n(\tau,\xi)d\tau, \tag{46}$$

$g(\cdot,\cdot)$ – функция из Теоремы 4.1.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту Вячеславу Анатольевичу Юрко за постоянную поддержку и полезные обсуждения.

Список опубликованных работ автора по теме диссертации

[1] Игнатьев М.Ю. О подобии вольтерровых операторов и операторах преобразования для интеро-дифференциальных операторов дробного порядка // Мат. заметки — 2003 — т.73 — №2 — С. 206 – 216.

[2] Игнатьев М. Ю. Единственность решения обратной задачи рассеяния для дифференциального уравнения переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика — 2014 — т.14 — №4(2) — С. 542 – 549.

[3] Игнатьев М.Ю. Обратная задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2020, 156 с.

[4] Игнатьев М.Ю. О данных рассеяния дифференциальных систем с особенностью // Мат. заметки — 2022 — Т. 111 — №6 — С. 846 – 863.

[5] Ignatyev M. Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle // Tamkan J. of Mathematics — 2011 — Vol. 42 — No.3 — Pp. 365 – 384.

[6] Ignatyev M. Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operators with Bessel singularities on noncompact star-type graphs // Inverse Problems — 2015 — Vol. 31 — No.12 — DOI: 10.1088/0266-5611/31/12/125006.

[7] Ignatyev M. Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. — 2017 — Vol. 71 — Pp. 1531 – 1555.

[8] Ignatyev M. On an Inverse Spectral Problem for the Convolution Integro-Differential Operator of Fractional Order // Results Math. — 2018 — Vol. 73 — Article number: 34 — https://doi.org/10.1007/s00025-018-0800-2

[9] Ignatiev M. On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order // Journal of Inverse and Ill-posed Problems — 2018 — Vol. 27 — No.1 — Pp. 17 – 23.

[10] Ignatiev M. Integral transforms connected with differential systems with a singularity // Tamkang J. of Mathematics — 2019 — Vol. 50 — No.3 — Pp. 253 — 268.

[11] Ignatiev M. Yu. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity [Игнатьев М. Ю. Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений, связанных с дифференциальными системами с особенностью] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика — 2020 — Т. 20 — вып. 1. — С. 17–28.

[12] Ignatiev M. Yu. On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential // Mathematical Notes — 2020 — Vol. 108 — No. 6 — Pp. 814 – 826.

[13] Ignatiev M. Yu. Reconstruction Formula for Differential Systems with a Singularity [Игнатьев М. Ю. Формула восстановления для систем дифференциальных уравнений с особенностью] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика — 2021 — Т. 21 — вып. 3 — С. 282–293.