

Н.М. РЫСКИН

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
В НЕЛИНЕЙНЫХ
АКТИВНЫХ СРЕДАХ**

Курс лекций

Саратов, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Глава 1. Неустойчивости в средах с отрицательным поглощением	8
§ 1.1. Универсальное уравнение	8
§ 1.2. Два типа неустойчивостей. Критерии абсолютной/конвективной неустойчивости.....	10
1.2.1. Первый критерий характера неустойчивости	11
1.2.2. Второй критерий характера неустойчивости	13
Глава 2. Уравнение Гинзбурга–Ландау.....	21
§ 2.1. Введение.....	21
§ 2.2. Нормировка переменных.....	22
§ 2.3. Решения в виде бегущих волн. Модуляционная неустойчивость.....	23
2.3.1. Пространственно-однородное решение.....	23
2.3.2. Решения в виде бегущих волн	24
2.3.3. Модуляционная неустойчивость	25
§ 2.4. Анализ характера модуляционной неустойчивости	29
§ 2.5. Нелинейная динамика уравнения Гинзбурга–Ландау. Переход к турбулентности.....	32
2.5.1. Дискретная модель Гинзбурга–Ландау. Пространственное развитие турбулентности.....	32
2.5.2. Нелинейная динамика уравнения Гинзбурга–Ландау с периодическими граничными условиями. Фазовая и амплитудная турбулентность	35
2.5.3. Пространственное развитие турбулентности в полубезграничной среде.....	38

2.5.4. Турбулентность, индуцированная внешним сигналом, при конвективной неустойчивости.....	42
§ 2.6. О характере модуляционной неустойчивости в консервативной среде.....	44
Глава 3. Неустойчивости в системах взаимодействующих волн с положительной и отрицательной энергией	50
§ 3.1. Волны с положительной и отрицательной энергией. Волны пространственного заряда в электронном потоке	50
§ 3.2. Взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной .	53
§ 3.3. Анализ дисперсионного соотношения в двухволновом приближении	56
3.3.1. Взаимодействие попутных волн с энергией одного знака	56
3.3.2. Взаимодействие встречных волн с энергией одного знака.	57
3.3.3. Взаимодействие попутных волн с энергиями разных знаков	58
3.3.4. Взаимодействие встречных волн с энергиями разных знаков	59
3.3.5. Анализ характера неустойчивости	60
§ 3.4. Анализ дисперсионного соотношения в общем случае.....	63
§ 3.5. Двухпучковая неустойчивость.....	66
§ 3.6. Переход абсолютной неустойчивости в конвективную при наличии диссипации.....	69
§ 3.7. Характер неустойчивости при нулевой групповой скорости одной из волн	70
§ 3.8. Неустойчивость при взаимодействии электронного потока с электромагнитной волной вблизи границы полосы пропускания	74
§ 3.9. Разделение усиления и непропускания. Критерий Бриггса.....	77
Глава 4. Взаимодействие излучения со средой из двухуровневых частиц.....	80

Предисловие

4.1. Двухуровневая среда.....	80
4.2. Уравнения Максвелла–Блоха.....	84
4.3. Самоиндуцированная прозрачность.....	88
4.4. Распространение импульса в усилителе. Автомодельные решения.....	96
Глава 5. Неустойчивость в полупроводнике с отрицательной дифференциальной проводимостью.....	100
§ 5.1. Понятие о междолинном переносе электронов. Эффект Ганна.....	100
§ 5.2. Линейная теория неустойчивости Ганна.....	105
§ 5.3. Нелинейные стационарные волны.....	109
Глава 6. Неустойчивости в химических системах типа «реакция — диффузия».....	117
§ 6.1. Брюсселятор — простая модель колебательной химической реакции	117
§ 6.2. Распределенный брюсселятор. Неустойчивость Тьюринга.....	120
§ 6.3. Неустойчивость в системе «брюсселятор с потоком».....	126
6.3.1. Неустойчивость Тьюринга.....	127
6.3.2. Неустойчивость Хопфа.....	129
6.3.3. Поточно–диффузионные структуры.....	131
6.3.4. Результаты численного моделирования.....	133
Приложение. Метод перевала.....	136
Литература.....	141

ПРЕДИСЛОВИЕ

Под *активными* понимают среды, в которых энергия может не только уменьшаться за счет диссипации, но и увеличиваться за счет развития каких-либо неустойчивостей. Активные среды широко используются в вакуумной, плазменной, полупроводниковой и квантовой электронике для усиления и генерации электромагнитных колебаний. Разнообразные примеры волновых неустойчивостей можно найти в газо- и гидродинамике, биологии, химии и в ряде других областей науки.

Настоящее учебное пособие написано на основе одноименного курса лекций, который читается автором в течение ряда лет для студентов магистратуры (направление «Прикладные математика и физика») Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. Оно ориентировано на читателя, уже знакомого с основами нелинейной теории колебаний и волн и имеющего базовую физико-математическую подготовку в объеме университетского курса.

Книга состоит из шести глав. В главе 1 рассматриваются линейные волновые процессы в средах с отрицательным поглощением. Вводятся понятия абсолютной и конвективной неустойчивости, сформулированы критерии определения характера неустойчивости. Изложение ведется на примере универсального уравнения, описывающего динамику медленно меняющейся амплитуды волны в такой среде (фактически, это линеаризованная версия уравнения Гинзбурга–Ландау — одного из самых знаменитых уравнений нелинейной физики).

Уравнению Гинзбурга–Ландау посвящена глава 2. В ней рассматривается неустойчивость решений в виде бегущих волн (модуляционная неустойчивость). Обсуждаются явления, которые происходят при развитии модуляционной неустойчивости, включая переход к пространственно–временному хаосу (турбулентности). Подробно обсуждается картина пространственного развития турбулентности в полуограниченной системе и её связь с модуляционной неустойчивостью.

В главе 3 рассматриваются неустойчивости иного типа, возникающие при взаимодействии волн с положительной и отрицательной энергией. Подобные неустойчивости характерны для приборов вакуумной СВЧ электроники, в которых электронный поток взаимодействует с замедленной электромагнитной волной (лампы бегущей и обратной волны). Также обсуждается двухпучковая неустойчивость и пучково–плазменная неустойчивость. Уделяется внимание некоторым пограничным ситуациям, в которых анализ на абсолютную/конвективную неустойчивость является нетривиальным, в частности, неустойчивость при взаимодействии вблизи границы полосы пропускания, где групповая скорость электромагнитной волны обращается в нуль.

В главе 4 обсуждается пример из квантовой электроники — неустойчивость при взаимодействии электромагнитной волны со средой из двухуровневых квантовых частиц. На примере простой модели рассматривается распространение импульса в усилителе, а также явление самоиндуцированной прозрачности.

Глава 5 посвящена неустойчивости в полупроводнике с отрицательной дифференциальной проводимостью, которая возникает при междолинном переносе электронов. Рассматривается линейная теория неустойчивости Ганна, а также анализируются стационарные нелинейные волны в такой среде. Формируется представление о домене Ганна как об автосолитоне.

Заключительная, шестая глава содержит пример неустойчивости в химической системе типа «реакция – диффузия». В ней на примере гипотетической химической реакции — брюсселятора — рассматривается неустойчивость Тьюринга, приводящая к возникновению диссипативных структур. Нетривиальная ситуация возникает в системе «брюсселятор с потоком», введенной в рассмотрение С.П. Кузнецовым (1997). В такой системе конкурируют две неустойчивости — Хопфа и Тьюринга, каждая из которых может быть как абсолютной, так и конвективной. Представлены численные результаты, иллюстрирующие различные ситуации.

Автор благодарит А.А. Ростунцову за помощь в изготовлении компьютерных иллюстраций.

ГЛАВА 1. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СРЕДАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

§ 1.1. Универсальное уравнение

Рассмотрим активную среду с отрицательным поглощением. Волны в такой среде описываются комплексным дисперсионным соотношением вида

$$\omega(k) = \omega_r(k) + i\omega_i(k, \nu), \quad (1.1)$$

где ν — некоторый управляющий параметр, который характеризует степень неравновесности среды. Типичной оказывается ситуация, когда при ν , меньших некоторого критического значения ν_c , $\omega_i(k, \nu) < 0$ при всех k , т.е. волны с любыми волновыми числами затухают. При $\nu = \nu_c$ для некоторого $k = k_c$

$$\omega_i(k_c, \nu_c) = 0.$$

При $\nu > \nu_c$ появляется область волновых чисел вблизи k_c , где $\omega_i(k, \nu) > 0$, т.е. поглощение становится отрицательным (рис. 1.1). Величину $\omega_i(k, \nu)$ будем называть *инкрементом неустойчивости*.

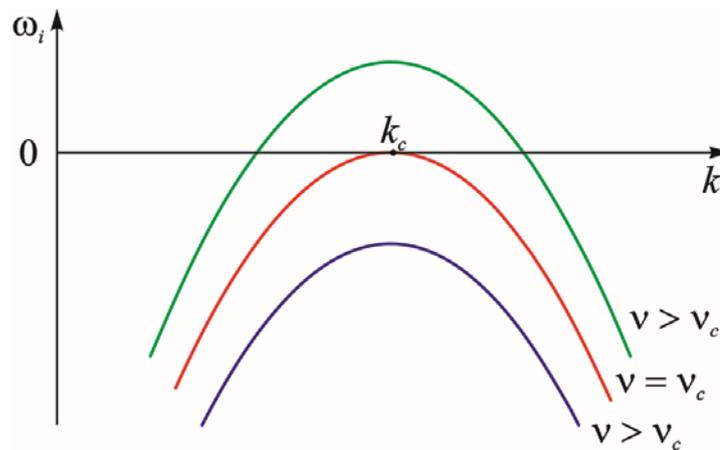


Рис. 1.1. Зависимость $\omega_i(k)$ при различных значениях параметра ν

Предположим, что ν незначительно превышает критическое значение. Очевидно, что усиливаться будут возмущения, волновые числа которых лежат в узком интервале вблизи k_c . Разложим дисперсионное соотношение (1.1) в

ряд Тейлора в точке $k = k_c$, $v = v_c$, учитывая, что в этой точке $\omega_i(k_c, v_c) = 0$, $\partial\omega_i(k_c, v_c)/\partial k = 0$ (т.к. это точка максимума, см. рис. 1.1). Получим

$$\begin{aligned} \omega \approx \omega_r(k_c) + \frac{\partial\omega_r}{\partial k}(k - k_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega_r}{\partial k^2}(k - k_c)^2 + \dots + \\ + \frac{i}{2} \frac{\partial^2\omega_i}{\partial k^2}(k - k_c)^2 + i \frac{\partial\omega_i}{\partial v}(v - v_c) + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \omega_c = \omega_r(k_c), \quad v_g = \frac{\partial\omega_r}{\partial k}, \quad \alpha = (v - v_c) \frac{\partial\omega_i}{\partial v}, \\ \beta = \beta_r + i\beta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\omega_r}{\partial k^2} + i \frac{\partial^2\omega_i}{\partial k^2} \right), \end{aligned}$$

приведем соотношение (1.2) к виду

$$\omega = \omega_c + v_g(k - k_c) + \beta(k - k_c)^2 + i\alpha. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) представляет собой универсальный вид дисперсионного соотношения для активной среды с отрицательным поглощением вблизи порога неустойчивости.

Инкремент неустойчивости равен

$$\omega_i = \alpha + \beta_i(k - k_c)^2. \quad (1.4)$$

При этом, в соответствии с рис. 1.1, считаем, что $\beta_i < 0$. Волновые числа нарастающих возмущений лежат в области

$$(k - k_c)^2 < -\frac{\alpha}{\beta_i}. \quad (1.5)$$

Вблизи порога неустойчивости эта область достаточно узкая. Поэтому разумно представить возмущение в виде волнового пакета с узким спектром

$$u(x, t) \sim A(x, t) e^{i(k_c x - \omega_c t)}, \quad (1.6)$$

где $A(x, t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда.

Применив к (1.3) обратное преобразование Фурье, получим дифференциальное уравнение, которому подчиняется амплитуда A . Считаем, что возмущение амплитуды имеет частоту $\Omega = \omega - \omega_c$ и волновое число $K = k - k_c$ (подробнее см. [3], гл. 1). Получим

$$i(A_t + v_g A_x) + \beta A_{xx} = i\alpha A. \quad (1.7)$$

Это уравнение представляет собой универсальную модель для описания линейных волновых процессов в активной среде с отрицательным поглощением вблизи порога неустойчивости. Как мы увидим ниже, (1.7) является линеаризованным вариантом уравнения Гинзбурга–Ландау — одного из важнейших уравнений нелинейной физики, которое встречается во множестве физических (и не только физических) задач [3,4].

§ 1.2. Два типа неустойчивостей. Критерии абсолютной/конвективной неустойчивости

Наличие комплексных корней дисперсионного соотношения с $\omega_i(k) > 0$ означает нарастание возмущения во времени, т.е. неустойчивость. Однако в пространстве это нарастание может происходить различным образом. Если возмущение $A(x,t)$ нарастает так, что в любой фиксированной точке x $\lim_{t \rightarrow \infty} |A(x,t)| = \infty$, неустойчивость называют *абсолютной* (рис. 1.2,а). Если же возмущение, нарастая, сносится вдоль системы так, что $\forall x \lim_{t \rightarrow \infty} |A(x,t)| = 0$, неустойчивость называют *конвективной* или *сносовой* (рис. 1.2,б) [1-10].

Понятия абсолютной и конвективной неустойчивости ввел Л.Д. Ландау (1954) и независимо от него — П. Стэррок (P. Sturrock, 1958). В радиофизике и электронике на основе систем с абсолютной неустойчивостью обычно создают генераторы, а на основе систем с конвективной неустойчивостью — усилители электромагнитных колебаний.

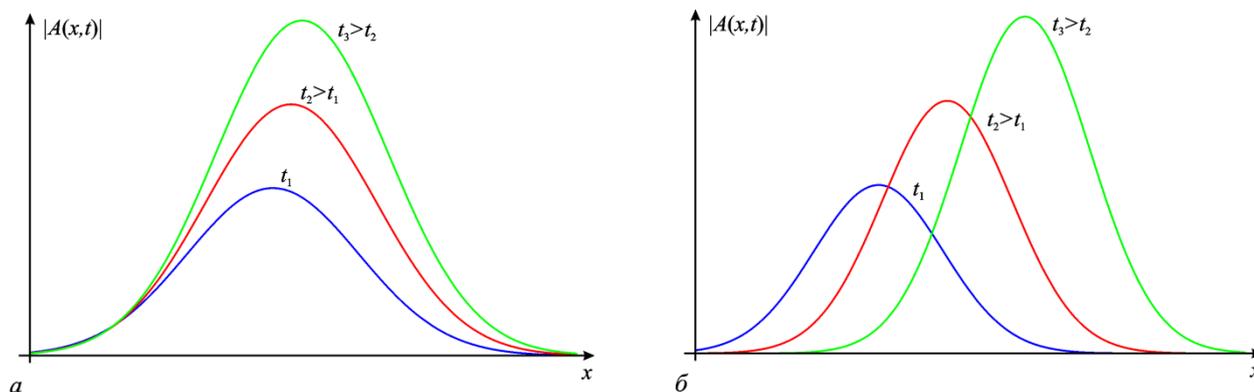


Рис. 1.2. Эволюция возмущения при абсолютной (а) и конвективной (б) неустойчивости

Понятно, что, если формально рассмотреть безграничную систему, разница между абсолютной и конвективной неустойчивостями по сути исчезает, поскольку можно перейти в движущуюся систему отсчета. Поэтому принципиальную роль при выяснении характера неустойчивости играет постановка граничных условий. В пространственно-ограниченных системах выделяют неустойчивость еще одного типа — *глобальную*. Это понятие было введено А.Г. Куликовским в 1966 г. [11]. Глобальную неустойчивость можно осуществить, если часть возмущения с выхода конвективно неустойчивой системы подать на ее вход. Это можно сделать, например, замкнув систему в кольцо или за счет отражений от границ.

1.2.1. Первый критерий характера неустойчивости

Вернемся к уравнению (1.7) и попытаемся определить, при каких условиях неустойчивость будет конвективной, а при каких — абсолютной. Представим $A(x,t)$ в виде интеграла Фурье

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{i(kx - \omega(k)t)} dk, \quad (1.8)$$

где ω и k связаны дисперсионным соотношением (1.3), причем и ω , и k будем далее считать комплексными. Асимптотическую форму возмущения (1.8) при $t \rightarrow \infty$ можно оценить при помощи *метода перевала* (см. Приложение):

$$A(x,t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{i\omega''(k_s)t}} A(k_s) e^{f(k_s)t}, \quad (1.9)$$

Неустойчивость в среде с отрицательным поглощением

где $f(k) = i(kx/t - \omega(k))$, k_s — точка перевала, которая определяется из условия

$$\frac{df(k_s)}{dk} = \frac{d\omega(k_s)}{dk} - \frac{x}{t} = 0.$$

Величина $\text{Re} f(k_s) = \omega_i - \text{Im} k_s \cdot x/t$, очевидно, представляет собой инкремент неустойчивости. Таким образом, если $\text{Re} f(k_s) > 0$ в фиксированной точке x при $t \rightarrow \infty$, т.е. $\omega_i(k_s) > 0$, то неустойчивость будет абсолютной.

Найдем точку перевала. Причем, поскольку мы интересуемся ситуацией, когда $x/t \rightarrow 0$, то ее определим из уравнения¹

$$\frac{d\omega}{dk} = 0.$$

Дифференцируя (1.3), получаем

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g + 2\beta(k_s - k_c) = 0. \quad (1.10)$$

Отсюда находим k_s :

$$k_s = k_c - \frac{v_g}{2\beta} = k_c - \frac{v_g \beta^*}{2|\beta|^2} = k_c - \frac{v_g(\beta_r - i\beta_i)}{2|\beta|^2}. \quad (1.11)$$

Теперь можем найти ω_s , подставляя (1.11) в (1.3):

$$\begin{aligned} \omega_s &= \omega(k_s) = \omega_c + v_g(k_s - k_c) + \beta(k_s - k_c)^2 + i\alpha = \\ &= \omega_c - \frac{v_g^2 \beta^*}{2|\beta|^2} + \beta \frac{v_g^2 (\beta^*)^2}{4|\beta|^4} + i\alpha = \omega_c - \frac{v_g^2 \beta^*}{4|\beta|^2} + i\alpha. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что инкремент неустойчивости равен

$$\text{Im} \omega_s = \alpha + \frac{v_g^2 \beta_i}{4|\beta|^2}. \quad (1.13)$$

Как уже говорилось выше, неустойчивость будет абсолютной, если $\text{Im} \omega_s > 0$.

Таким образом, в зависимости от параметра надкритичности α имеем следующую ситуацию:

¹ Величину $d\omega/dk$ иногда называют комплексной групповой скоростью.

$\alpha < 0$ — устойчивость;

$0 < \alpha < \alpha_a$ — конвективная неустойчивость;

$\alpha > \alpha_a$ — абсолютная неустойчивость.

Здесь введено обозначение

$$\alpha_a = -\frac{v_g^2 \beta_i}{4|\beta|^2}.$$

(напомним, что $\beta_i < 0$).

Итак, чтобы установить характер неустойчивости, надо найти точку перевала, в которой комплексная групповая скорость $d\omega/dk = 0$ и вычислить инкремент $\text{Im } \omega_s$. Можно обобщить этот критерий на другие дисперсионные соотношения. Поскольку не всегда удается разрешить дисперсионное соотношение относительно частоты, критерий удобно сформулировать следующим образом.

Пусть дисперсионное соотношение имеет вид $D(\omega, k) = 0$ и может иметь комплексные корни $\omega(k)$. Тогда неустойчивость будет абсолютной, если в точке перевала ω_s , которая удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial D(\omega, k)}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial^2 D(\omega, k)}{\partial k^2} \neq 0,$$

инкремент $\text{Im } \omega_s > 0$. В противном случае неустойчивость конвективная.

1.2.2. Второй критерий характера неустойчивости

Точнее, речь идет о другой формулировке предыдущего критерия, которая принадлежит П. Стэрроку (1958). Вновь рассмотрим уравнение (1.7) и выполним в нем преобразование Фурье по координате x

$$A(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_k(t) e^{ikx} dk.$$

Получим

$$i \frac{dA_k}{dt} - (v_g k + \beta k^2 + i\alpha) A_k = 0. \quad (1.14)$$

Неустойчивость в среде с отрицательным поглощением

Если теперь выполнить преобразование Фурье по t

$$A_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{k\omega} e^{-i\omega(k)t} d\omega,$$

то интеграл будет расходящимся, так как есть определенный диапазон значений k , в котором $\text{Im } \omega(k) > 0$. Поэтому воспользуемся вместо преобразования Фурье преобразованием Лапласа²

$$A_{k\omega} = \int_0^{\infty} A_k(t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.15)$$

где $\omega = \text{Re } \omega + i\sigma$, причем σ выбрано так, чтобы быть больше максимально возможного $\omega_i(k)$, которое определяется из дисперсионного соотношения (в нашем случае $\max(\omega_i) = \alpha$, см. формулу (1.4)). Обратное преобразование имеет вид

$$A_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} A_{k\omega} e^{-i\omega(k)t} d\omega.$$

Интегрирование в плоскости комплексной переменной ω ведется вдоль горизонтальной прямой, лежащей выше $\max(\omega_i)$, см. рис. 1.3.

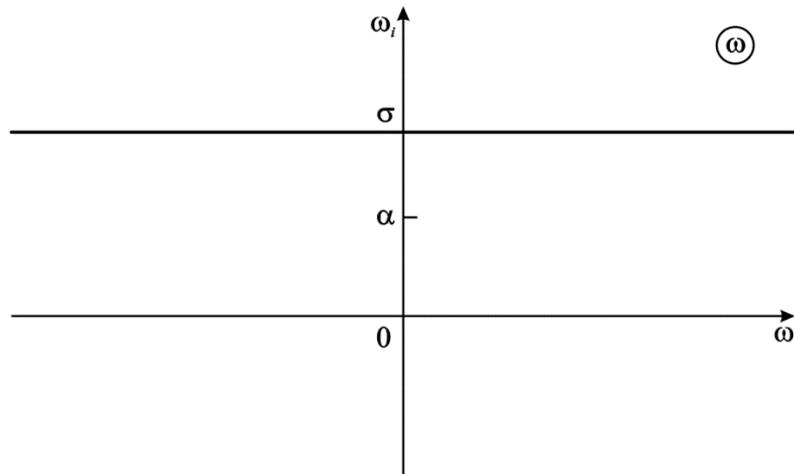


Рис. 1.3. К вычислению преобразования Лапласа

² Обычно преобразование Лапласа записывают в виде $A_s = \int_0^{\infty} A(t) e^{-st} ds$, где $s = \sigma - i\omega$ и переменная ω вещественная. Очевидно, что эта формула совпадает с (1.15), если переобозначить $\omega = is$.

Применим к (1.14) преобразование Лапласа (1.15). Получим

$$(\omega - v_g k - \beta k^2 - i\alpha) A_{k\omega} = iA_k(0). \quad (1.16)$$

Выражая отсюда $A_{k\omega}$ и выполняя обратные преобразования, находим решение

$$A(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iA_k(0) e^{i(kx-\omega t)}}{\omega - v_g k - \beta k^2 - i\alpha} dk. \quad (1.17)$$

Понятно, что поведение функции $A(x, t)$ будет определяться в основном нулями знаменателя в (1.17), а от $A_k(0)$ зависит слабо. По крайней мере, если начальное возмущение $A(x; t=0)$ достаточно быстро спадает при $|x| \rightarrow \infty$, то $A_k(0)$ не добавляет никаких особенностей в подынтегральное выражение. Поэтому вместо (1.17) достаточно исследовать поведение интеграла

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx-\omega t)}}{D(\omega, k)} dk, \quad (1.18)$$

где $D(\omega, k)$ есть дисперсионное соотношение (точнее, дисперсионное соотношение имеет вид $D(\omega, k) = 0$). Интеграл (1.18) называется *функцией Грина* системы. Фактически функция Грина есть отклик на мгновенное воздействие, так как если $A(x; t=0) = \delta(x)$, то $A_k(0) = 1$. Функция Грина является мощным инструментом решения различных задач математической физики.

Вычислим внутренний интеграл в (1.18). Его значение определяется полюсами подынтегрального выражения, то есть нулями знаменателя, которые имеют место, когда $D(\omega, k) = 0$, т.е. когда ω и k в точности удовлетворяют дисперсионному соотношению. Для упрощения выполним в уравнении (1.3) перенормировку $\omega \rightarrow \omega - \omega_c$, $k \rightarrow k - k_c$, и перепишем его в виде

$$\omega = v_g k + \beta k^2 + i\alpha, \quad (1.19)$$

т.е. теперь ω и k — это отстройки от несущих частоты и волнового числа. Это квадратное уравнение относительно k , т.е. имеется два полюса $k_{1,2}(\omega)$:

$$k_{1,2}(\omega) = \frac{-v_g \pm \sqrt{v_g^2 + 4\beta(\omega - i\alpha)}}{2\beta} \quad (1.20)$$

Пусть вначале мы находимся на ω -плоскости в точке, где $|\omega| \rightarrow \infty$. Тогда для полюсов (1.20) имеем приближенное выражение

$$k_{1,2} \approx \pm \sqrt{\frac{\omega}{\beta}},$$

причем они расположены так, как показано на рис. 1.4. Для дальнейшего существенно, что они расположены в разных полуплоскостях. При выполнении интегрирования по k можно замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости (при $x > 0$) или в нижней (при $x < 0$) и перейти к контурному интегралу, который вычисляется с помощью вычетов. В данном случае имеется всего один простой полюс в верхней полуплоскости, так что интеграл вычисляется очень просто:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx-\omega t)}}{D(\omega, k)} dk &= 2\pi i \cdot \text{Res}(k = k_1(\omega)) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i(k_1 x - \omega t)}}{\partial D / \partial k|_{k_1}} = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{i(k_1 x - \omega t)}}{\beta(k_1(\omega) - k_2(\omega))} = 2\pi i \cdot \frac{e^{i(k_1 x - \omega t)}}{\sqrt{v_g^2 + 4\beta(\omega - i\alpha)}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Когда мы движемся вдоль прямой, изображенной на рис. 1.3, полюсы смещаются в комплексной плоскости k , как показано на рис. 1.4, но остаются один в верхней полуплоскости, другой — в нижней.

Теперь попытаемся вычислить внешний интеграл

$$G(x, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i(k_1(\omega)x-\omega t)}}{\sqrt{v_g^2 + 4\beta(\omega - i\alpha)}} d\omega = \frac{i}{4\pi\sqrt{\beta}} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i(k_1(\omega)x-\omega t)}}{\sqrt{\omega - \omega_s}} d\omega, \quad (1.22)$$

где введено обозначение

$$\omega_s = i\alpha - \frac{v_g^2 \beta^*}{4|\beta|^2}. \quad (1.23)$$

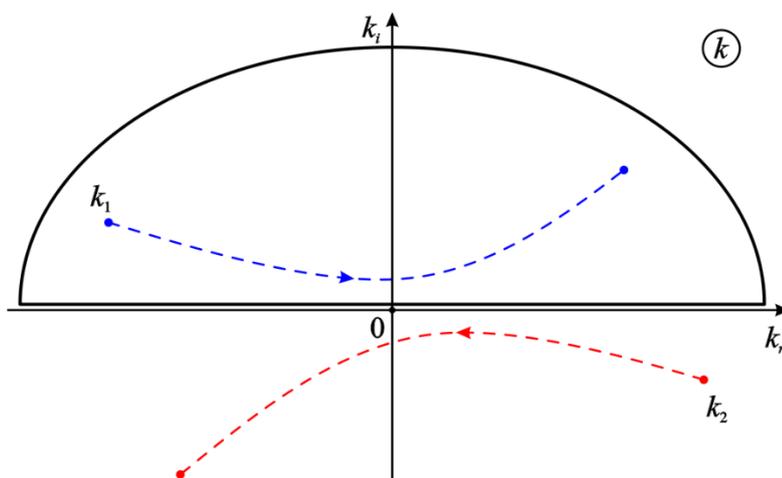
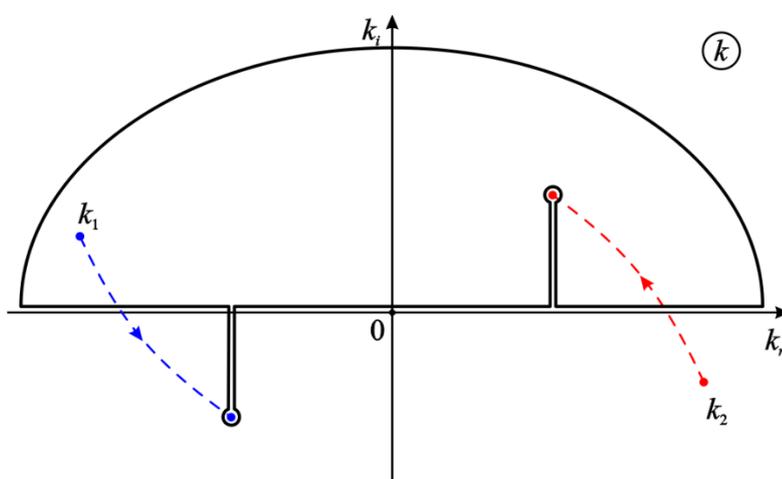
Рис. 1.4. Перемещение полюсов (1.20) в комплексной плоскости при $\sigma > \alpha$ 

Рис. 1.5. Перемещение полюсов, при котором они переходят из одной полуплоскости в другую

Будем смещать контур интегрирования по ω вниз, чтобы совместить его с вещественной осью. Если это удалось сделать, то подынтегральное выражение в (1.22) при $t \rightarrow \infty$ — быстро осциллирующая функция, не имеющая особенностей, поэтому $G(x, t) \rightarrow 0$, т.е. неустойчивость конвективная.

При смещении контура интегрирования вниз, когда σ станет меньше α , полюсы $k_{1,2}$ могут переходить из одной полуплоскости в другую, как это показано на рис. 1.5. Например, ясно, что когда $\sigma = \text{Im} \omega(k)$, где $\omega(k)$ определяется согласно дисперсионному соотношению (1.19), полюс k_1 будет лежать на вещественной оси. Однако интеграл (1.21) при этом не изменится, так как

можно деформировать контур интегрирования таким образом, что порядок обхода особых точек останется прежним (рис. 1.5).

Однако это может оказаться невозможным, если два полюса *сливаются*, зажимая контур интегрирования с разных сторон (рис. 1.6). В этой точке $k_1(\omega) = k_2(\omega)$, т.е. $\omega = \omega_s$. Точка ω_s называется *точкой ветвления* функции $k(\omega)$. Ясно, что в таком случае поведение интеграла (1.22) будет определяться окрестностью точки ω_s , и если $\text{Im } \omega_s > 0$, неустойчивость будет абсолютной.

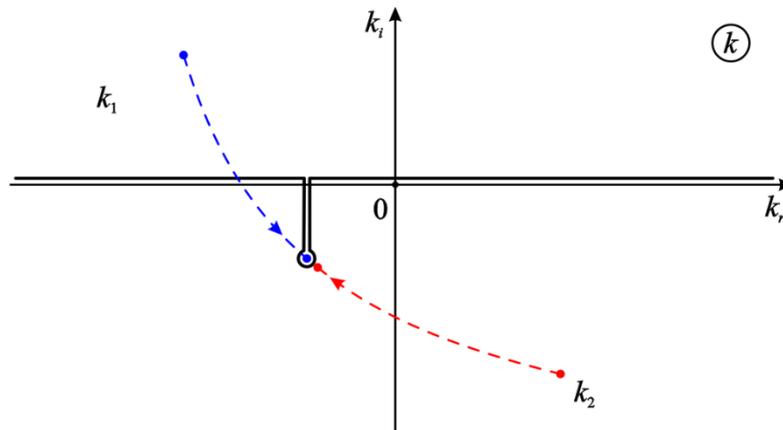
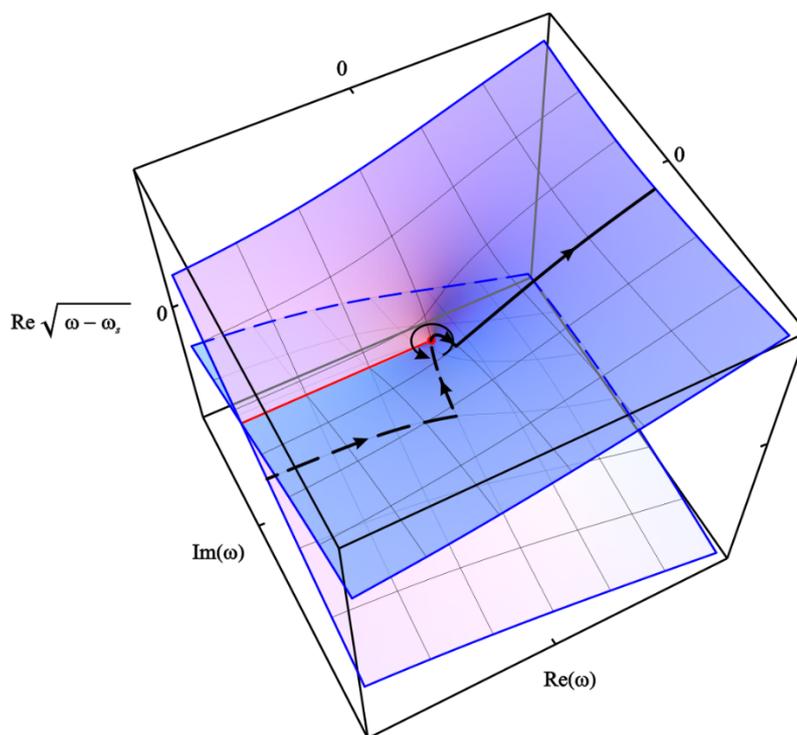
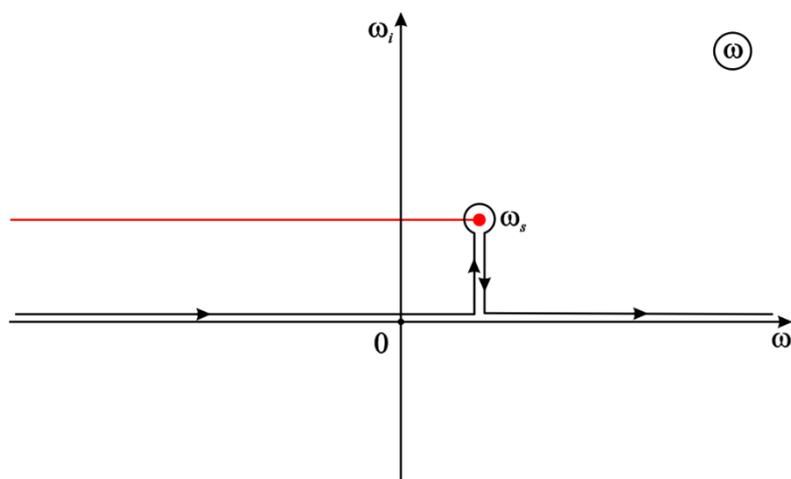


Рис. 1.6. Слияние полюсов при абсолютной неустойчивости

Можно вычислить функцию Грина для этого случая. При этом следует учесть, что подынтегральное выражение является многозначной функцией. На рис. 1.7 представлена поверхность $\text{Re} \sqrt{\omega - \omega_s}$, на которой видна линия ветвления. Двигаясь по ω -плоскости, путь интегрирования следует выбирать так, как показано на рис. 1.8. При этом на поверхности, изображенной на рис. 1.7, при обходе вокруг точки ω_s мы будем переходить с одного листа поверхности на другой. Соответственно, аргумент будет изменяться не на 2π , а на π . Поэтому, в отличие от полюсов, вклады в интеграл от двух противоположно направленных вертикальных участков, показанных на рис. 1.8, не уничтожают друг друга, а складываются.

Рис. 1.7. Двухлистная поверхность $\operatorname{Re} \sqrt{\omega - \omega_s}$ Рис. 1.8. Путь интегрирования в ω -плоскости

Вычислим интеграл (1.22). Поскольку мы интересуемся поведением при $t \rightarrow \infty$ в фиксированной точке x , можно для простоты опустить зависимость от x . Итак

$$G(x, t) \sim \int_0^{\operatorname{Im} \omega_s} \frac{e^{-i(\operatorname{Re} \omega_s + i \omega_i)t}}{\sqrt{\operatorname{Im} \omega_s - \omega_i}} d\omega_i. \quad (1.24)$$

Интегрирование на плоскости ω проводится вдоль отрезка $\omega_r = \operatorname{Re} \omega_s$, $0 < \omega_i < \operatorname{Im} \omega_s$. Если сделать замену $\xi = \operatorname{Im} \omega_s - \omega_i$, (1.24) приводится к виду

Неустойчивость в среде с отрицательным поглощением

$$G(x,t) \sim e^{-i\omega_s t} \cdot \int_0^{\text{Im}\omega_s} \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{\xi}} d\xi. \quad (1.25)$$

Так как мы интересуемся поведением при $t \rightarrow \infty$, не будет большой ошибкой заменить верхний предел интегрирования на бесконечность. Поскольку

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

получаем для функции Грина следующую оценку

$$G(x,t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-i\omega_s t}. \quad (1.26)$$

Неустойчивость будет абсолютной, когда $\text{Im}\omega_s > 0$, т.е.

$$\alpha > -\frac{v_g^2 \beta_i}{4|\beta|^2}. \quad (1.27)$$

Очевидно, что условие (1.27) полностью совпадает с результатом, полученным с помощью метода перевала, точка ветвления (1.23) совпадает с седловой точкой (1.12), точка слияния полюсов $k_{1,2} = -v_g / (2\beta)$ — с точкой k_s (1.11).

Итак, можно сформулировать критерий характера неустойчивости. *Неустойчивость будет абсолютной, когда в точке ветвления ω_s , в которой сливаются два корня дисперсионного соотношения $D(\omega, k) = 0$, которые при $\omega \rightarrow \infty$ находились в разных полуплоскостях, $\text{Im}\omega_s > 0$.*

Поскольку точка ветвления определяется из условия $\partial D / \partial k = 0$, $\partial D / \partial \omega \neq 0$, это по сути лишь другая формулировка первого критерия.

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

§ 2.1. Вводные замечания

В § 1.1 было получено универсальное уравнение (1.7) для описания линейных волновых процессов в активной среде с отрицательным поглощением вблизи порога неустойчивости. Обобщим это уравнение на нелинейный случай, используя подход, описанный в [3] (гл. 1). Считая нелинейность слабой, можно по-прежнему считать, что возмущение имеет вид квазигармонической волны с медленно меняющейся комплексной амплитудой

$$u(x, t) \sim A(x, t) e^{i(k_c x - \omega_c t)}. \quad (2.1)$$

Однако нелинейность приводит к тому, что в дисперсионном соотношении появляется зависимость от амплитуды. Вместо (1.1) будем иметь

$$\omega = \omega_r(k, |A|^2) + i\omega_i(k, |A|^2, \nu). \quad (2.2)$$

Будем называть соотношение вида (2.2) *нелинейным дисперсионным соотношением*. Разумеется, в пределе $|A|^2 \rightarrow 0$ (2.2) должно переходить в линейное дисперсионное соотношение (1.1).

Разложим (2.2) в ряд Тейлора и по волновому числу, и по амплитуде, и по параметру ν в точке $k = k_c$, $A = 0$, $\nu = \nu_c$. Вместо (1.2) теперь получим

$$\omega = \omega_c + \nu_g (k - k_c) + \beta (k - k_c)^2 - \gamma |A|^2 + i\alpha, \quad (2.3)$$

где

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_i = - \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial |A|^2} + i \frac{\partial \omega_i}{\partial |A|^2} \right)$$

Остальные параметры имеют тот же смысл, что и выше (§ 1.1). Повторяя те же преобразования, что были проделаны в § 1.1 для линейного случая, приходим к уравнению

$$i(A_t + \nu_g A_x) + \beta A_{xx} + \gamma |A|^2 A = i\alpha A, \quad (2.4)$$

Уравнение Гинзбурга—Ландау

которое является универсальной моделью для описания динамики амплитуды волнового пакета в слабонелинейной активной среде вблизи порога неустойчивости. Оно носит название *уравнения Гинзбурга—Ландау* (ГЛ). Уравнение ГЛ — одно из важнейших в нелинейной физике. Оно встречается во множестве физических (и не только физических) задач, описывая, например, тепловую конвекцию Рэлея—Бенара [12], течение Пуазейля [13], т.е. течение жидкости между двумя параллельными плоскостями, течение Куэтта—Тейлора между двумя вращающимися цилиндрами [14], колебательные химические реакции [15]. Уравнение ГЛ способно демонстрировать разнообразное поведение, включая режимы пространственно-временного хаоса или *турбулентности*. Ему посвящена обширная литература (см., например, обзоры [16,17]).

Слагаемое вида $\gamma_r |A|^2 A$ в (2.4) отвечает за эффекты реактивной (фазовой) нелинейности, другими словами, за появление поправки к частоте, зависящей от амплитуды или неизохронность. Слагаемое $\gamma_i |A|^2 A$ описывает эффекты *нелинейного насыщения*. Имеет смысл рассматривать уравнение ГЛ только в случае, когда $\gamma_i > 0$ и $\beta_i < 0$ (при этом член $\sim i\beta_i A_{xx}$ отвечает за высокочастотную диссипацию, см. § 1.1). Можно показать, что при нарушении одного из этих условий решения уравнения ГЛ «взрываются», т.е. обращаются в бесконечность за конечное время.

§ 2.2. Нормировка переменных

Уравнение Гинзбурга-Ландау (2.4) характеризуется шестью вещественными параметрами: ν_g , α , $\beta_{r,i}$, $\gamma_{r,i}$. Их число можно уменьшить перенормировкой переменных. Введем нормированные время, координату и амплитуду.

$$t' = \alpha t, \quad x' = \sqrt{\frac{\alpha}{|\beta_i|}} \cdot x, \quad A' = \sqrt{\frac{\gamma_i}{\alpha}} \cdot A.$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид:

$$i \left(\alpha \frac{\partial A'}{\partial t'} + v_g \sqrt{\frac{\alpha}{|\beta_i|}} \frac{\partial A'}{\partial x'} \right) + \alpha \left(\frac{\beta_r + i\beta_i}{|\beta_i|} \right) \frac{\partial^2 A'}{\partial x'^2} + \left(\frac{\gamma_r + i\gamma_i}{|\gamma_i|} \right) \alpha |A'|^2 A' = i\alpha A'.$$

Разделив это уравнение на $i\alpha$, получим (штрихи у нормированных переменных далее будем опускать)

$$A_t + VA_x = A + (1 + ib)A_{xx} - (1 - ic)|A|^2 A. \quad (2.5)$$

В уравнении (2.5) присутствуют только три параметра: нормированная групповая скорость $V = v_g / \sqrt{\alpha |\beta_i|}$, параметр дисперсии $b = \beta_r / |\beta_i|$, и параметр фазовой нелинейности $c = \gamma_r / \gamma_i$, что делает его более удобным для исследования.

Заметим, что критерий абсолютной/конвективной неустойчивости, полученный в § 1.2, в новых переменных принимает простой вид

$$V^2 < 4(b^2 + 1). \quad (2.6)$$

§ 2.3. Решения в виде бегущих волн. Модуляционная неустойчивость

2.3.1. Пространственно-однородное решение

Рассмотрим простейшее из нетривиальных решений уравнения ГЛ, не зависящее от пространственной координаты x . Очевидно, что это решение описывает *пространственно-однородное* состояние. Уравнение (2.5) при этом принимает вид

$$\dot{A} = A - (1 - ic)|A|^2 A, \quad (2.7)$$

где точкой обозначена полная производная по времени. Уравнение (2.7) хорошо известно в теории колебаний (см., например, [3,18]). Оно описывает установление автоколебаний вблизи порога суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа; его иногда называют уравнением Ландау–Стюарта или укороченным уравнением Ван дер Поля.

Введя вещественные амплитуду и фазу, $A = a \exp(i\phi)$, перепишем (2.7) в виде системы двух вещественных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a - a^3, \\ \dot{\phi} &= -ca^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Решение первого уравнения легко находится:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - a^{-2}(0))e^{-t}}}.\tag{2.9}$$

Итак, с течением времени устанавливаются автоколебания с постоянной амплитудой $a = 1$ и частотой $\omega = -c$. Характер установления колебаний при достаточно малой начальной амплитуде иллюстрирует рис. 2.1.

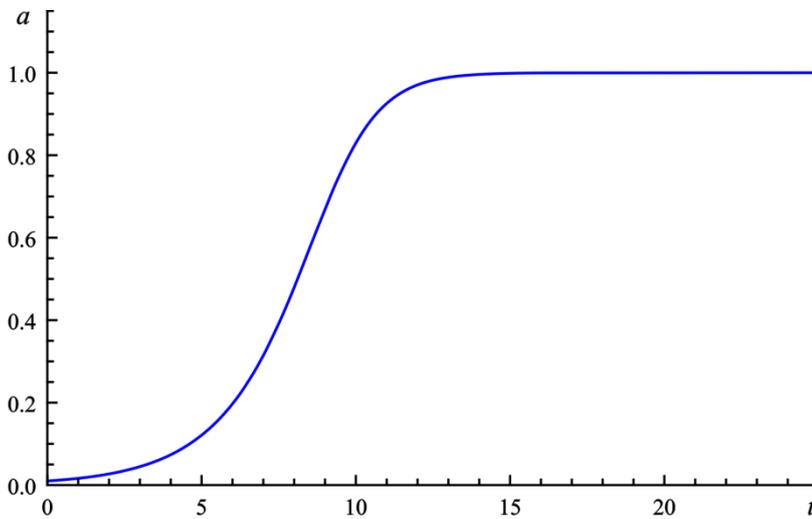


Рис. 2.1. Установление амплитуды пространственно-однородного решения при достаточно малом начальном возмущении

2.3.2. Решения в виде бегущих волн

Проанализируем более общий класс решений уравнения (2.5) в виде бегущих гармонических волн с постоянной амплитудой

$$A = A_0 e^{i(kx - \omega t)}.\tag{2.10}$$

Подставляя выражение (2.10) в уравнение (2.5), получим

$$-i(\omega - kV)A_0 = A_0 - (1 + ib)k^2 A_0 - (1 - ic)A_0^3.\tag{2.11}$$

Без ограничения общности амплитуду A_0 можно считать вещественной. Разделяя в уравнении (2.11) вещественную и мнимую части, найдём

$$\begin{aligned}-\omega + kV &= cA_0^2 - bk^2, \\ A_0^2 &= 1 - k^2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Отсюда следует нелинейное дисперсионное соотношение:

$$\omega = kV + bk^2 - cA_0^2 = kV - c + (b + c)k^2. \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.12) видно, что решения в виде бегущих волн существуют при $k^2 < 1$. Максимальную амплитуду $A_0 = 1$ имеет волна с $k = 0$, что соответствует пространственно-однородному решению (2.9), рассмотренному в предыдущем разделе.

2.3.3. Модуляционная неустойчивость

Исследуем полученные решения на устойчивость. Зададим малое возмущение решения (2.10) в следующем виде:

$$A = (A_0 + \tilde{a}(x, t))e^{i(kx - \omega t)}.$$

При этом A_0 , ω и k связаны соотношениями (2.12). Подставим данное выражение в (2.5) и линеаризуем, считая \tilde{a} малым. Получим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_t - i\omega\tilde{a} + V\tilde{a}_x + ikV\tilde{a} = & \tilde{a} - (1 - ic)A_0^2(2\tilde{a} + \tilde{a}^*) + \\ & + (1 + ib)(\tilde{a}_{xx} + 2ik\tilde{a}_x - k^2\tilde{a}). \end{aligned}$$

В силу соотношений (2.12) и (2.13) некоторые слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение несколько упрощается

$$\tilde{a}_t + V\tilde{a}_x = (1 + ib)(\tilde{a}_{xx} + 2ik\tilde{a}_x) - (1 - ic)A_0^2(\tilde{a} + \tilde{a}^*). \quad (2.14)$$

Будем искать решение уравнения (2.14) в виде двух *сателлитов* с частотами, равно отстоящими от несущей

$$\tilde{a}(x, t) = a_+ e^{i(Kx - \Omega t)} + a_- e^{-i(Kx - \Omega^* t)}. \quad (2.15)$$

Здесь частота Ω , вообще говоря, считается комплексной. Подставим это выражение в (2.14) и выделим члены, пропорциональные $\exp[i(Kx - \Omega t)]$, что дает

$$\left[i(KV - \Omega) + (1 + ib)(2k + K)K + (1 - ic)A_0^2 \right] a_+ = (1 - ic)A_0^2 a_-^*. \quad (2.16)$$

Аналогично выделим члены, пропорциональные $\exp[-i(Kx - \Omega^* t)]$:

$$\left[-i(KV - \Omega^*) + (1 + ib)(K - 2k)K + (1 - ic)A_0^2 \right] a_- = (1 - ic)A_0^2 a_+^*.$$

Подействовав на последнее уравнение операцией комплексного сопряжения, получим

$$\left[i(KV - \Omega) + (1 - ib)(K - 2k)K + (1 + ic)A_0^2 \right] a_-^* = (1 + ic)A_0^2 a_+. \quad (2.17)$$

Перемножая (2.16) и (2.17), приходим к характеристическому уравнению

$$-\left(\Omega - KV - 2bkK + i(K^2 + A_0^2) \right)^2 + (bK^2 - 2ikK - cA_0^2)^2 = (1 + c^2)A_0^4,$$

которое нетрудно разрешить относительно Ω :

$$\Omega_{\pm} = KV + 2bkK - i(K^2 + A_0^2) \pm i\sqrt{(1 + c^2)A_0^4 - (bK^2 - 2ikK - cA_0^2)^2}. \quad (2.18)$$

Малое возмущение (2.15) становится неустойчивым, когда имеются корни характеристического уравнения с положительной мнимой частью, $\text{Im}\Omega_{\pm}(K) > 0$. Чтобы выяснить, возможно ли это, проанализируем поведение выражения (2.18) в области малых K (длинноволновые возмущения) [17]. Разложение (2.18) в ряд с точностью до членов $\sim K^2$ имеет вид.

$$\Omega_{+} \approx KV + 2(b + c)kK + i\frac{(bc - 1)(1 - k^2) + 2(1 + c^2)k^2}{1 - k^2}K^2. \quad (2.19)$$

При этом мы ограничиваемся рассмотрением только корня Ω_{+} , так как корень Ω_{-} при вещественных K имеет отрицательную мнимую часть:³

$$\Omega_{-} \approx KV + 2(b + c)kK - 2i(1 - k^2) + \dots$$

Итак, из формулы (2.19) следует критерий неустойчивости, т.е. условие того, что $\text{Im}\Omega_{+} > 0$:

$$bc > 1 - \frac{2(1 + c^2)k^2}{1 - k^2}. \quad (2.20)$$

При выполнении этого условия решение в виде бегущей волны (2.10) становится неустойчивым относительно возмущений (2.15), представляющих собой медленные пространственно-временных модуляции амплитуды. Такую не-

³ Решения в виде бегущих волн, как видно из (2.12), существуют только при $k^2 < 1$.

устойчивость называют модуляционной (МН), или неустойчивостью Бенджамина–Фейра (хотя Бенджамин и Фейр рассматривали модуляционную неустойчивость в консервативной среде [19]).

На рис. 2.2 представлены границы неустойчивости на плоскости параметров b и c для волн с различными k . Наиболее устойчивым является пространственно-однородное решение, для которого $k = 0$. В этом случае критерий (2.20) принимает простой вид

$$bc > 1. \quad (2.21)$$

Это условие впервые было получено в работе Ланджа и Ньюэлла [20].

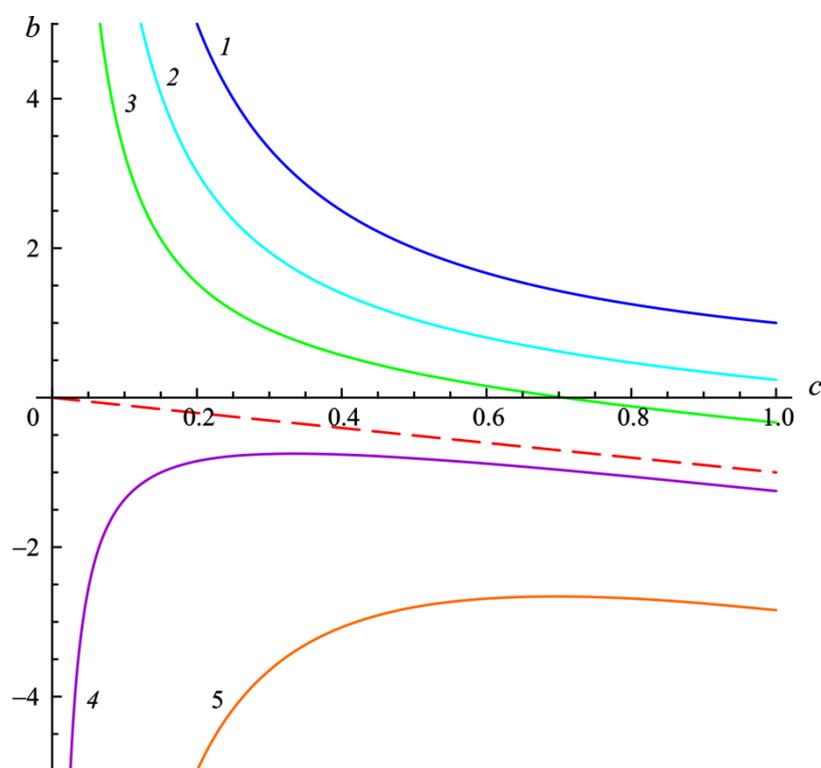


Рис. 2.2. Границы устойчивости на плоскости параметров b, c для бегущих волн с различными значениями k : 0 (1); 0.4 (2); 0.5 (3); 0.6 (4); 0.7 (5). Штриховой линией показана граница $b = -c$ для волны с критическим волновым числом $k = 1/\sqrt{3}$

Как видно из рис. 2.2, вид этих границ качественно меняется при $k = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$. Соответствующая граница устойчивости, как нетрудно найти из (2.20), задается прямой линией $b = -c$. На рис. 2.2 она показана штриховой линией.

В случае пространственно-однородного решения, для которого $k = 0$, $A_0^2 = 1$, выражение (2.18) значительно упрощается

$$\Omega = KV - i(1 + K^2) + i\sqrt{1 + 2bcK^2 - b^2K^4}, \quad (2.22)$$

и его удастся проанализировать, не ограничиваясь областью малых K . Если считать K вещественным, то зависимость инкремента неустойчивости $\text{Im}\Omega(K)$ от волнового числа имеет вид, изображенный на рис. 2.3.

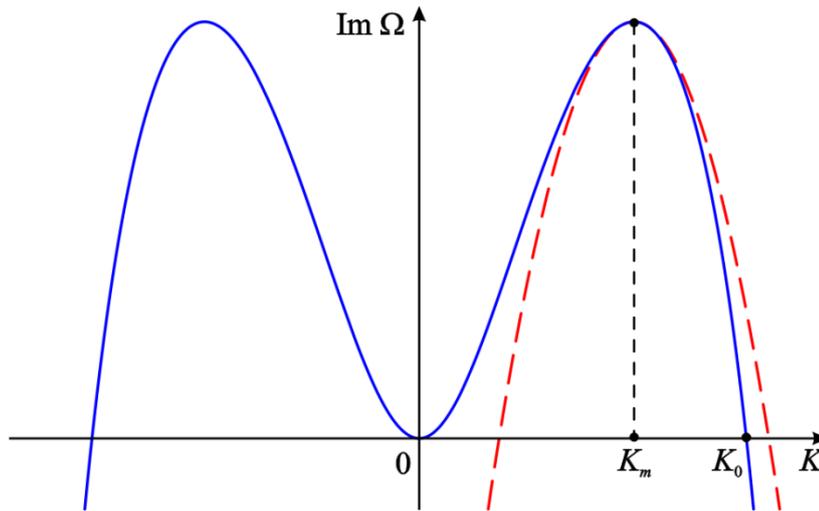


Рис. 2.3. Зависимость инкремента неустойчивости от волнового числа построенная согласно формуле (2.22) (сплошная линия) и параболическая аппроксимация этой зависимости (штриховая линия)

Как следует из формулы (2.22), инкремент неустойчивости положителен в области $K^2 < K_0^2$, где

$$K_0^2 = \frac{2(bc - 1)}{b^2 + 1} \quad (2.23)$$

Эта величина определяет ширину полосы неустойчивости.

Найдем значение $K = \pm K_m$, при котором инкремент достигает максимума. Дифференцируя (2.22) по K , получаем

$$\frac{d\Omega}{dK} = V + 2iK \left[\frac{b(c - bK^2)}{\sqrt{1 + 2bcK^2 - b^2K^4}} - 1 \right].$$

Приравняем мнимую часть этого выражения к нулю, считая K вещественным. Очевидно, нас интересуют ненулевые значения K , так как при $K = 0$ инкремент достигает минимума (см. рис. 2.3). Тогда получим уравнение

$$b(c - bK^2) = \sqrt{1 + 2bcK^2 - b^2K^4},$$

корни которого есть

$$K_m^2 = \frac{1}{b} \left(c \pm \sqrt{\frac{1+c^2}{1+b^2}} \right). \quad (2.24)$$

В этом выражении знак «+» следует брать при $b, c < 0$, знак «-» — при $b, c > 0$.

Тогда можно найти максимальное значение инкремента $\lambda_m \equiv \text{Im} \Omega(K_m)$

$$\lambda_m = b(c - bK_m^2) - (1 + K_m^2) = \mp \frac{1}{b} \sqrt{(1+c^2)(1+b^2)} - \frac{c}{b} - 1. \quad (2.25)$$

§ 2.4. Анализ характера модуляционной неустойчивости

Для анализа на абсолютную/конвективную неустойчивость воспользуемся следующим приёмом, описанным в [21,22]: разложим $\Omega(K)$ в ряд вблизи $K = K_m$, полагая, что основной вклад вносят возмущения, инкремент которых близок к максимальному. Представим K в виде $K = K_m + \chi$, где χ — малая отстройка от точки максимума, подставим в (2.22) и получим

$$\Omega(K) \approx V(K_m + \chi) + i(\lambda_m - D\chi^2), \quad (2.26)$$

где введено обозначение

$$D = \frac{2(1+b^2) \left[c \left(\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)} - c \right) - 1 \right]}{b^2(1+c^2)}. \quad (2.27)$$

Отметим, что если выполнен критерий (2.21), то $D > 0$. Фактически зависимость инкремента от волнового числа аппроксимируется параболой вблизи точки максимума. На рис. 2.3 эта аппроксимация показана штриховой линией.

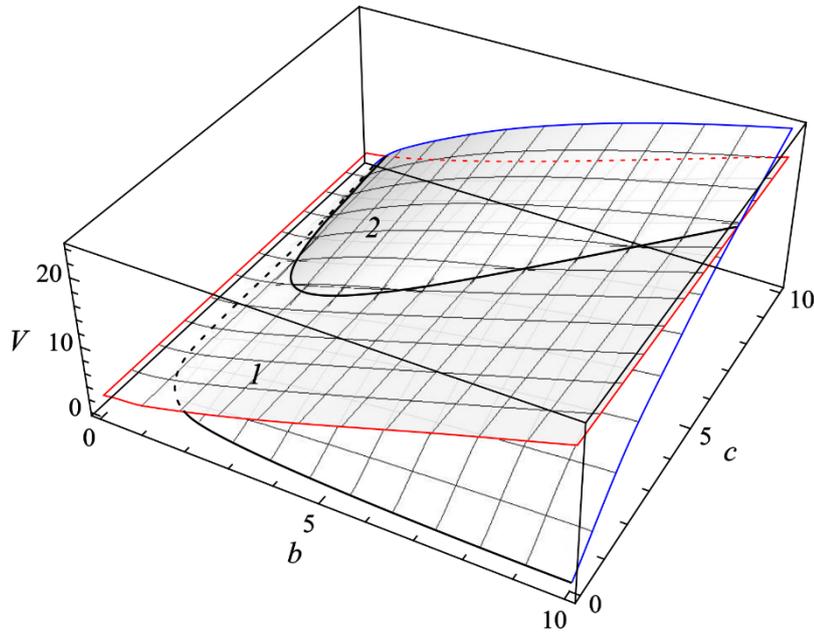


Рис. 2.4. Границы перехода от конвективной неустойчивости к абсолютной в пространстве параметров b , c , V ; 1 — граница для малых возмущений нулевого состояния, 2 — граница для модуляционной неустойчивости (неравенства (2.6) и (2.28), соответственно). Жирной линией показан порог модуляционной неустойчивости $bc = 1$.

Теперь нетрудно определить характер неустойчивости с помощью методов, развитых в § 1.2. Применим первый критерий, основанный на методе перевала. Дифференцируя (2.26) и приравнявая производную к нулю, получаем

$$\frac{d\Omega}{d\chi} = V - 2iD\chi = 0,$$

откуда находится точка перевала

$$\chi_s = -\frac{iV}{2D}.$$

Вычислим значение частоты в этой точке:

$$\Omega_s = VK_m + i\left(\lambda_m - \frac{V^2}{4D}\right).$$

Тогда условие абсолютной неустойчивости принимает вид

$$V^2 < 4D\lambda_m. \tag{2.28}$$

Анализ показывает, что с ростом b , c пороговое значение V монотонно возрастает. На рис. 2.4 изображена граница смены характера МН (2.28) в пространстве параметров b , c и V . Там же приведена граница смены характера первичной неустойчивости (2.6).

Как видно из рис. 2.4, эти границы делят пространство параметров на четыре области, т.е. можно выделить четыре характерные ситуации.

Если первичная неустойчивость является абсолютной, система будет функционировать как генератор автоколебаний. Если критерий МН не выполнен, ясно, что в безграничной среде будет устанавливаться режим генерации монохроматической бегущей волны (2.10). Однако эта картина не изменится и в том случае, если МН конвективная, поскольку возмущения амплитуды волны, хотя и нарастают во времени, будут сноситься вправо, так что в любой фиксированной точке x амплитуда волны будет с течением времени стремиться к константе. Если же МН является абсолютной, модуляционные возмущения амплитуды волны будут нарастать в каждой точке пространства, и следует ожидать, что в этом случае будет устанавливаться режим генерации не монохроматических, а более сложных колебаний (многочастотных или хаотических).

Теперь обсудим ситуацию, когда первичная неустойчивость конвективная. В этом случае все нарастающие возмущения сносятся из рассматриваемой области и, в конце концов, амплитуда поля в каждой точке обратится в нуль. Нетривиальное поведение возможно в случае, когда система функционирует как усилитель сигнала, подаваемого от какого-либо внешнего источника. Рассмотрим для простоты полубезграничную систему, считая, что в точке $x = 0$ находится источник гармонического сигнала с частотой ω . При этом, если МН также является конвективной, ожидается устойчивое усиление входного сигнала, т.е. в каждой точке будут устанавливаться гармонические колебания с той же частотой ω . Если же МН является абсолютной, следует ожидать, что режим усиления входного сигнала станет неустойчивым и будет происходить возбуждение спектральных составляющих с какими-либо другими частотами.

Однако следует отметить, что эти рассуждения носят качественный характер. Действительно, теоретическая граница смены характера МН (2.28) была получена для волны с $k = 0$, тогда как, если первичная неустойчивость абсолютная, динамика системы носит автоколебательный характер и волновое число (и частота) определяются параметрами самой системы. Если же первичная неустойчивость конвективная, частота волны определяется источником входного сигнала, при этом волновое число, вообще говоря, также отлично от нуля. Поэтому для выяснения картины поведения системы необходимо прибегнуть к непосредственному численному интегрированию уравнения (2.5).

§ 2.5. Нелинейная динамика уравнения Гинзбурга—Ландау. Переход к турбулентности

2.5.1. Дискретная модель Гинзбурга—Ландау. Пространственное развитие турбулентности

Существуют различные подходы к численному моделированию уравнения ГЛ. Наиболее простой способ — воспользоваться дискретным аналогом уравнения ГЛ. Введем дискретную пространственную сетку с шагом Δx , и вместо непрерывной функции $A(x, t)$ будем рассматривать набор функций $A_n(t)$, где $A_n = A(x = n\Delta x)$ — амплитуда в n -ном узле. Производные по координате в уравнении (2.5) можно аппроксимировать следующим образом:

$$A_x \approx \frac{A_n - A_{n-1}}{\Delta x},$$

$$A_{xx} \approx \frac{A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}}{\Delta x^2}.$$

С учетом этих выражений уравнение ГЛ (2.5) примет вид (для простоты полагаем $\Delta x = 1$)

$$\frac{dA_n}{dt} = A_n - V(A_n - A_{n-1}) + (1 + ib)(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) - (1 - ic)|A_n|^2 A_n. \quad (2.29)$$

По сути мы перешли от уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую легко проинтегрировать численно, например, с помощью метода Рунге–Кутты.

Уравнение (2.29) называют *дискретным уравнением ГЛ*. Оно представляет самостоятельный интерес, так как с точки зрения теории колебаний его можно рассматривать как модель цепочки связанных нелинейных автоколебательных осцилляторов. Отметим, что изучению нелинейной динамики дискретного уравнения ГЛ (и других цепочек связанных автогенераторов) посвящено немало работ. В частности, в работе [23], рассматривалась дискретная цепочка ГЛ с однонаправленной связью

$$\frac{dA_n}{dt} = A_n - (1 - ic)|A_n|^2 A_n - V(A_n - A_{n-1}). \quad (2.30)$$

Соответствующее уравнение можно получить, опустив в (2.29) слагаемое, отвечающее за диффузионную связь.

Поскольку на первый осциллятор в цепочке не действует сигнал предшествующего генератора, (2.30) принимает вид

$$\frac{dA_1}{dt} = (1 - V)A_1 - (1 - ic)|A_1|^2 A_1. \quad (2.31)$$

Это уравнение с точностью до коэффициента V совпадает с (2.7), а его решение, аналогично (2.9), описывает установление стационарных колебаний $A_1 = a \exp(-i\omega t)$ с амплитудой $a = (1 - \operatorname{Re} V)^{1/2}$ и частотой $\omega = -c(1 - \operatorname{Re} V) + \operatorname{Im} V$.⁴ Таким образом, второй осциллятор в цепочке находится под воздействием гармонического сигнала:

$$\frac{dA_2}{dt} = (1 - V)A_2 - (1 - ic)|A_2|^2 A_2 + Vae^{-i\omega t}, \quad (2.32)$$

т.е. мы приходим к задаче о синхронизации генератора внешним сигналом. Если каждый предыдущий генератор синхронизирует последующий, вдоль цепочки устанавливается стационарный режим колебаний с частотой ω . Однако

⁴ Для большей общности в [23] параметр связи V считался комплексным.

возможна ситуация, когда начиная с некоторого номера $n = n_q$, режим синхронизации становится неустойчивым, т.е. устанавливается режим биений. Теперь осциллятор с номером $n_q + 1$ находится под воздействием не гармонического, а двухчастотного сигнала. В итоге периодические колебания сменяются многочастотными (квазипериодическими). Далее колебания еще более усложняются и становятся хаотическими. Ситуацию иллюстрирует рис. 2.5, на котором хорошо видно, как усложняется спектр колебаний вдоль цепочки. В [23] это явление было названо *пространственным развитием турбулентности*. Впоследствии оно более подробно изучалось в [24,25], включая случай, когда связь не является однонаправленной.

При продвижении «вниз по потоку» колебания всё более усложняются, а средняя мощность турбулентных пульсаций увеличивается. Однако на достаточном удалении от левой границы происходит пространственная стабилизация турбулентного режима, т.е. его количественные характеристики перестают меняться с увеличением номера n . Это подтверждает рис. 2.6, на котором приведена зависимость размерности аттрактора D вдоль цепочки. На этом графике видны области периодических ($D = 1$) и двухчастотных квазипериодических ($D = 2$), а также область хаотических колебаний, в которой размерность странного аттрактора является дробной.

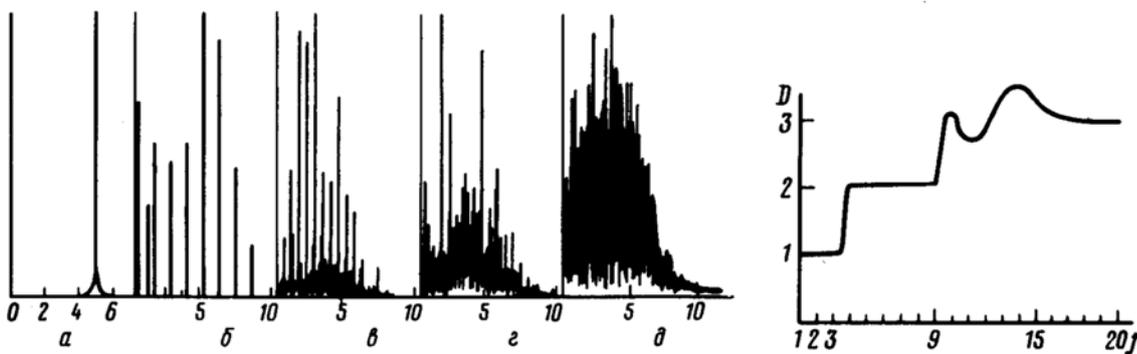


Рис. 2.5. Спектры колебаний элементов цепочки с различными номерами n , иллюстрирующие пространственное развитие турбулентности: a — $n = 2$; $б$ — $n = 9$; $в$ — $n = 10$; $г$ — $n = 12$; $д$ — $n = 20$ и 50 (из работы [23])

Рис. 2.6. Изменение размерности аттрактора вдоль цепочки (из работы [23])

2.5.2. Нелинейная динамика уравнения Гинзбурга–Ландау с периодическими граничными условиями. Фазовая и амплитудная турбулентность

Рассмотрим замкнутую в кольцо систему, описываемую уравнением ГЛ (2.5), т.е. будем считать, что система имеет конечную длину l , и наложим периодические граничные условия:

$$A(x=0, t) = A(x=l, t).$$

Так как в случае кольцевой системы мы всегда можем перейти в движущуюся систему отсчета, разница между абсолютной и конвективной неустойчивостью нивелируется. Поэтому без ограничения общности можно положить в (2.5) $V = 0$.

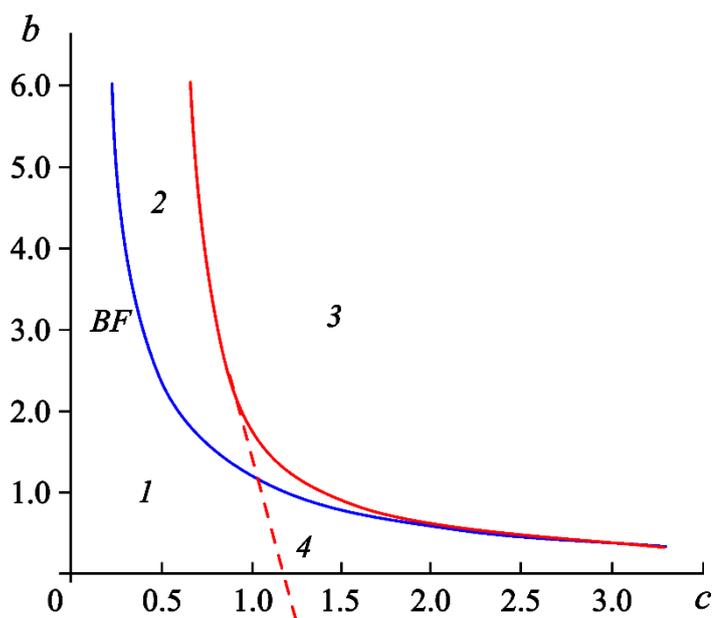


Рис. 2.7. Карта динамических режимов кольцевой системы Гинзбурга–Ландау на плоскости параметров b и c [26]

Одномерное комплексное уравнение ГЛ с периодическими граничными условиями обладает богатым набором различных динамических режимов. В частности, при выполнении критерия модуляционной неустойчивости (2.21), когда решения в виде бегущих волн (§ 2.3) становятся неустойчивыми, происходит переход к турбулентности, т.е. к хаотическому поведению решения как во времени, так и в пространстве. Важный результат был получен в работах [26-28] где было показано, что следует различать два вида турбулентности:

амплитудную и фазовую. На рис. 2.7 приведена карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров [26]. Линия BF есть порог модуляционной неустойчивости (Бенджамина—Фейра) $bc = 1$. Ниже этой линии имеют место однородные периодические колебания с постоянной амплитудой. В области выше кривой BF , наблюдается турбулентное поведение.⁵

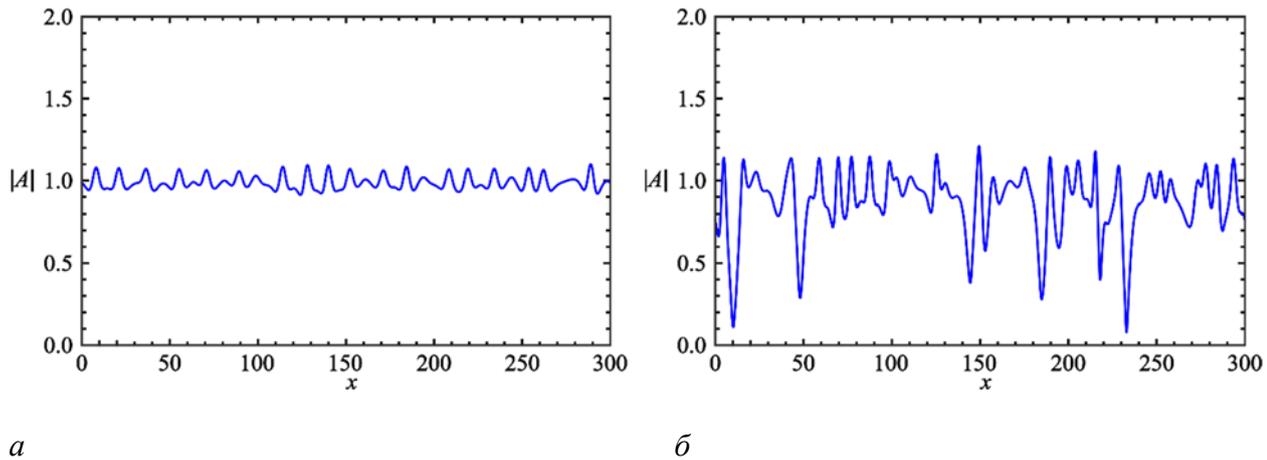


Рис. 2.8. Зависимости амплитуды волны от координаты в некоторый фиксированный момент времени в режимах фазовой (а) и амплитудной (б) турбулентности

В области 2 присутствует фазовая турбулентность, в которой амплитуда поля слабо флуктуирует около некоторого постоянного значения, а фаза меняется хаотически в пространстве и во времени. В области 3 имеет место амплитудная турбулентность — более нерегулярный режим сложной пространственно-временной динамики, в котором амплитуда волны испытывает сильные осцилляции с характерными «провалами» почти до нуля. Характерные распределения амплитуды вдоль цепочки в обоих режимах приведены на рис. 2.8. Отметим, что переход между фазовой и амплитудной турбулентностью при изменении параметров происходит с гистерезисом [26-28]. Так, при плавном увеличении параметра b на рис. 2.7 амплитудная турбулентность возникает при пересечении границы области 3. Если же, находясь в области 3, начать плавно уменьшать параметр b , то амплитудная турбулентность сохранится вплоть до границы, обозначенной пунктирной линией. В области 4 на рис. 2.7 имеет место мультистабильность.

⁵ Строго говоря, выше линии BF имеется узкая область квазипериодических режимов [26], однако на рис. 2.7 она не показана.

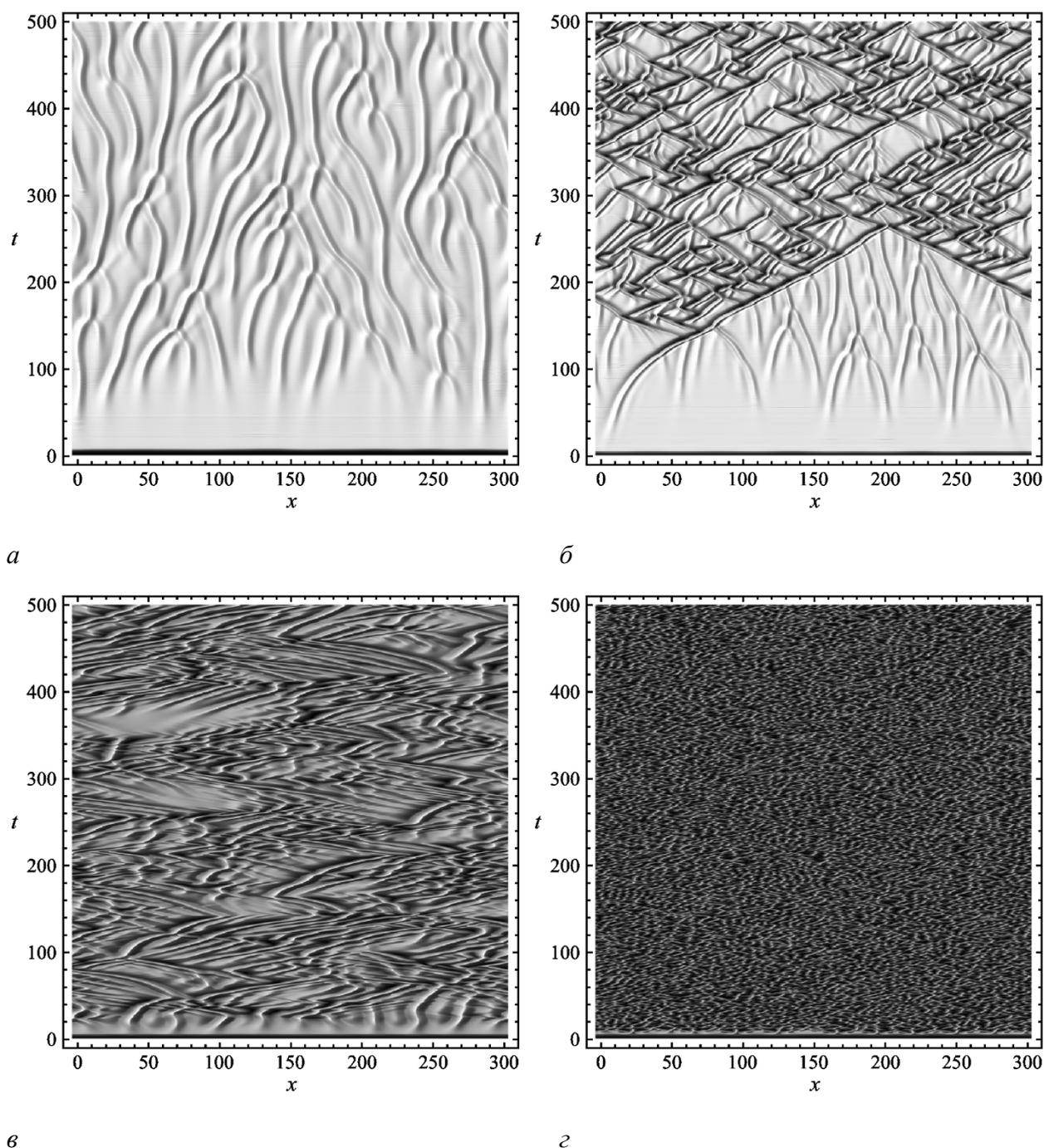


Рис. 2.9. Пространственно-временные диаграммы в различных режимах: *a* — фазовая турбулентность ($b = 3.5$, $c = 0.65$); *б-г* — амплитудная турбулентность со все более сильно выраженной нерегулярностью ($b = 1.1$, $c = 1.44$); *в* — амплитудная турбулентность ($b = 12$, $c = 0.75$), *г* — $b = 4.4$, $c = 2.5$

Еще более наглядно различие между фазовой и амплитудной турбулентностью иллюстрирует рис. 2.9, где приведены пространственно-временные диаграммы, на которых различными оттенками серого кодируются различные значения амплитуды сигнала: белому цвету соответствует максимальная ам-

плитуда, чёрному — минимальная. Видно, что в режиме фазовой турбулентности (рис. 2.9,а) на начальном этапе амплитуда колебаний вдоль цепочки практически постоянна. Затем появляются небольшие флуктуации амплитуды, которые медленно дрейфуют вдоль системы. При увеличении параметров b , c мы попадаем в область амплитудной турбулентности (область 3 на рис. 2.7). В этом случае амплитуда колебаний начинает испытывать сильные нерегулярные осцилляции (рис. 2.9,б).

Для режима амплитудной турбулентности типичны сильные вариации амплитуды вдоль цепочки с образованием *дефектов*, т.е. локализованных «провалов». Дефекты приближенно описываются известными решениями уравнения ГЛ типа *дырок Нозаки–Бекки* (Nozaki–Bekki holes) [29]. На пространственно-временной диаграмме, представленной на рис. 2.9,б, хорошо видно рождение дефектов, которые достаточно сложным образом взаимодействуют друг с другом, образуя характерные зигзагообразные структуры. С продвижением вглубь области 3 на плоскости параметров b, c (рис. 2.7) степень нерегулярности колебаний увеличивается, что иллюстрирует рис. 2.9,в,г.

2.5.3. Пространственное развитие турбулентности в полубезграничной среде

Во многих случаях, например, для гидродинамических потоков, замкнутая в кольцо система не всегда является удачной моделью. Более адекватной является модель в виде полубезграничной среды. Точнее, будем по-прежнему рассматривать систему конечной длины l , на левой границе которой задано нулевое граничное условие

$$A(x=0) = 0, \quad (2.33)$$

а справа границе наложим условие открытой границы

$$A_x(x=l) = 0. \quad (2.34)$$

Хотя такое граничное условие и не обеспечивает полного поглощения падающей волны, при достаточно большой длине системы конкретный выбор граничного условия на правой границе оказывается несущественным.⁶

Выберем параметры дисперсии и фазовой нелинейности таким образом, чтобы был превышен порог модуляционной неустойчивости (2.21), и рассмотрим, как трансформируется поведение системы с уменьшением скорости потока при постоянных параметрах b и c , привлекая для интерпретации результаты анализа характера неустойчивости (§ 2.4).

На рис. 2.10 приведены пространственно-временные диаграммы, соответствующие различным режимам. При достаточно больших значениях скорости, когда не выполняется критерий абсолютной первичной неустойчивости (2.6), нарастающие возмущения с течением времени сносятся из системы и в конце концов амплитуда в каждой точке обращается в нуль (рис. 2.10,а).

При меньших скоростях первичная неустойчивость становится абсолютной, в то время, как МН является конвективной. На рис. 2.10,б и в видно, как неустойчивые модуляционные возмущения сносятся вдоль системы, и устанавливается режим стационарной генерации бегущей волны (см. § 2.3.2). Амплитуда волны плавно нарастает вдоль координаты, стремясь к постоянному значению $A_0 = (1 - k^2)^{1/2}$ (см. формулы (2.12)), а с течением времени не меняется.

При дальнейшем уменьшении скорости потока МН также становится абсолютной и режим генерации бегущей волны теряет устойчивость. Возникает *автомодуляция*, т.е. спонтанные, не вызванные никакими внешними воздействиями осцилляции амплитуды (рис. 2.10,г). Фактически при этом генерируются бегущие волны модуляции, распространяющиеся вдоль системы. Установлению этого режима предшествует хаотический переходный процесс (пе-

⁶ Полностью исключить отражения от границы можно, например, с помощью поглощающего граничного условия, когда в правую часть уравнения (2.5) в области $l < x < l_1$ добавляется диссипативное слагаемое вида $-\gamma(x)A$, причем коэффициент затухания γ плавно нарастает с ростом координаты.

реходный хаос [24,25]), длительность которого увеличивается с ростом координаты. Дальнейшее уменьшение скорости приводит к тому, что на достаточном удалении от левой границы колебания становятся хаотическими. На рис. 2.10,д хорошо видно, как происходит постепенное усложнение колебаний вдоль системы: вблизи левой границы амплитуда практически стационарна, правее лежит область периодической автомодуляции, далее — область турбулентности. Еще одной иллюстрацией служит рис. 2.11, на котором показана эволюция спектра колебаний. Видно, что достаточно далеко от левой границы спектр практически перестает меняться.

Итак, если обе неустойчивости (и первичная, и модуляционная) являются абсолютными, наблюдается явление пространственного развития турбулентности, аналогичное описанному выше (§ 2.5.1) для дискретной модели ГЛ.

Однако следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. В отличие от цепочки осцилляторов с однонаправленной связью (2.30), в данном случае характер колебаний (периодический, квазипериодический, хаотический) в различных точках системы, строго говоря, не может отличаться, и размерность аттрактора в любой точке также должна быть одинаковой. Это обстоятельство отмечалось ещё в работе [25]. Таким образом, в спектре колебаний в любой точке, вообще говоря, изначально содержатся спектральные компоненты на всех частотах в полосе хаотического сигнала. Однако вблизи левой границы они настолько малы, что режим кажется практически монохроматическим. При приближении к правой границе амплитуда автомодуляционных компонент нарастает, в результате чего визуально наблюдается усложнение сигнала. На пространственно-временных диаграммах рис. 2.10 хорошо различимы области стационарных колебаний, регулярной и хаотической автомодуляции. Заметим, что при уменьшении скорости V границы этих областей сдвигаются влево.

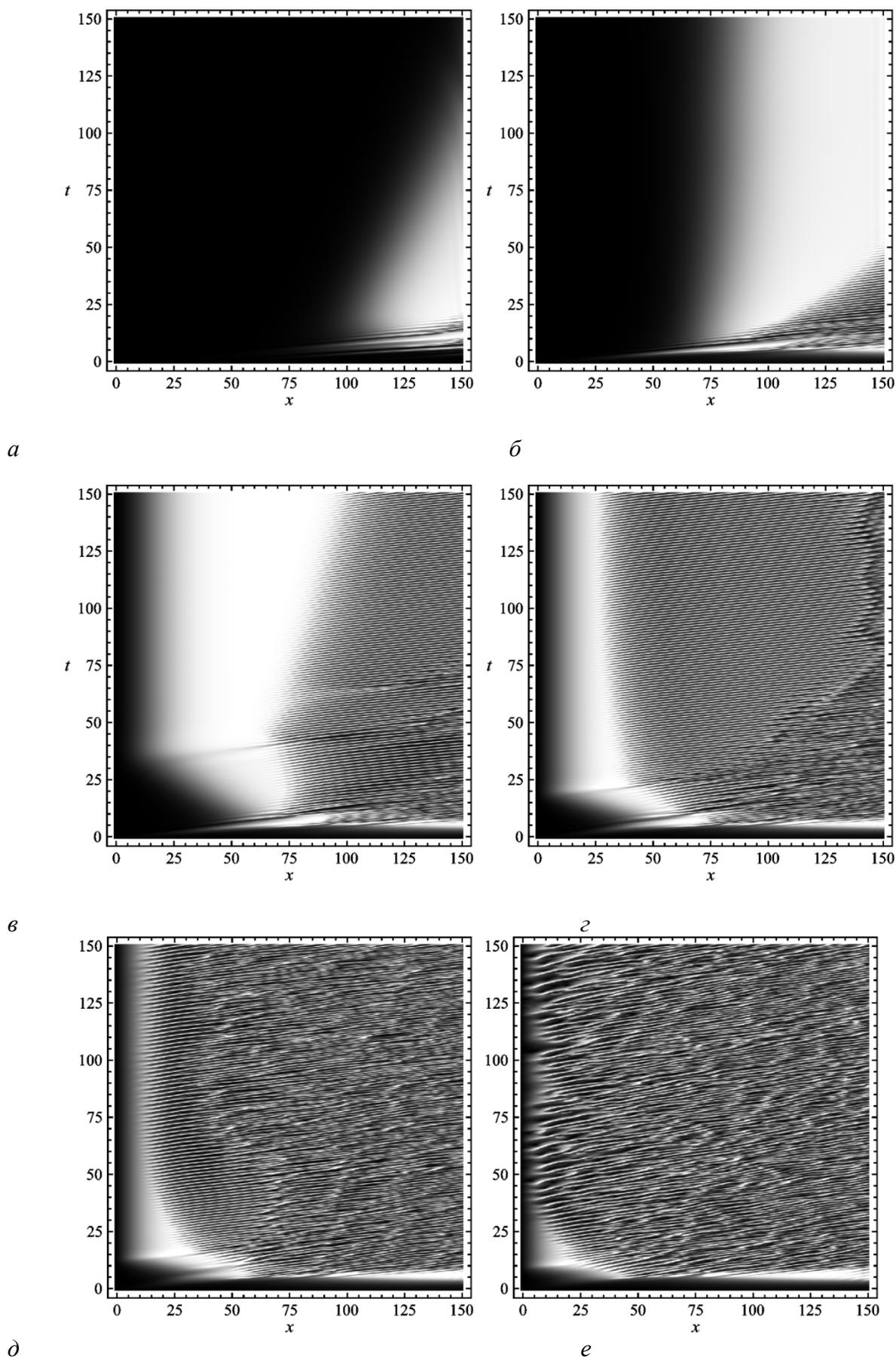


Рис. 2.10. Пространственно-временные диаграммы при $b = 7$, $c = 3$ и различных значениях скорости потока: $V = 15$ (*a*), 14 (*б*), 12 (*в*), 10 (*г*), 8 (*д*), 6 (*е*)

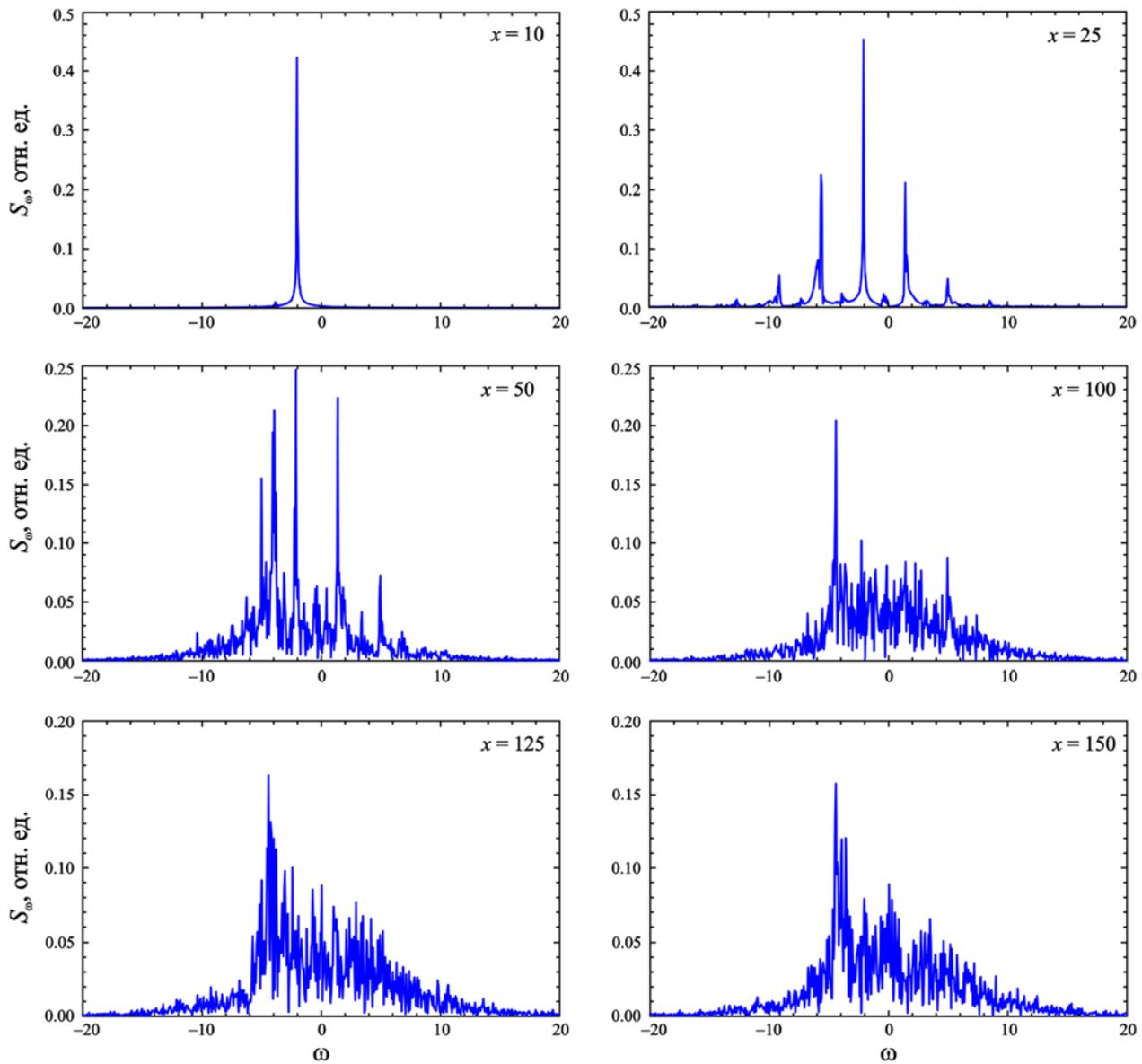


Рис. 2.11. Спектры колебаний в различных точках, иллюстрирующие пространственное развитие турбулентности ($b = 7$, $c = 3$, $V = 8$)

2.5.4. Турбулентность, индуцированная внешним сигналом, при конвективной неустойчивости

Если первичная неустойчивость является конвективной (критерий (2.6) не выполняется), для того чтобы в системе наблюдались колебания, необходимо подать внешний сигнал на левой границе. Рассмотрим возбуждение гармоническим сигналом $A(x=0, t) = A_0 \exp(-i\omega t)$. Если МН при этом также является конвективной, происходит устойчивое усиление входного сигнала. Решение имеет вид $A(x, t) = A(x) \exp(-i\omega t)$, а пространственно-временная диаграмма будет аналогична представленной на рис. 2.10,б.

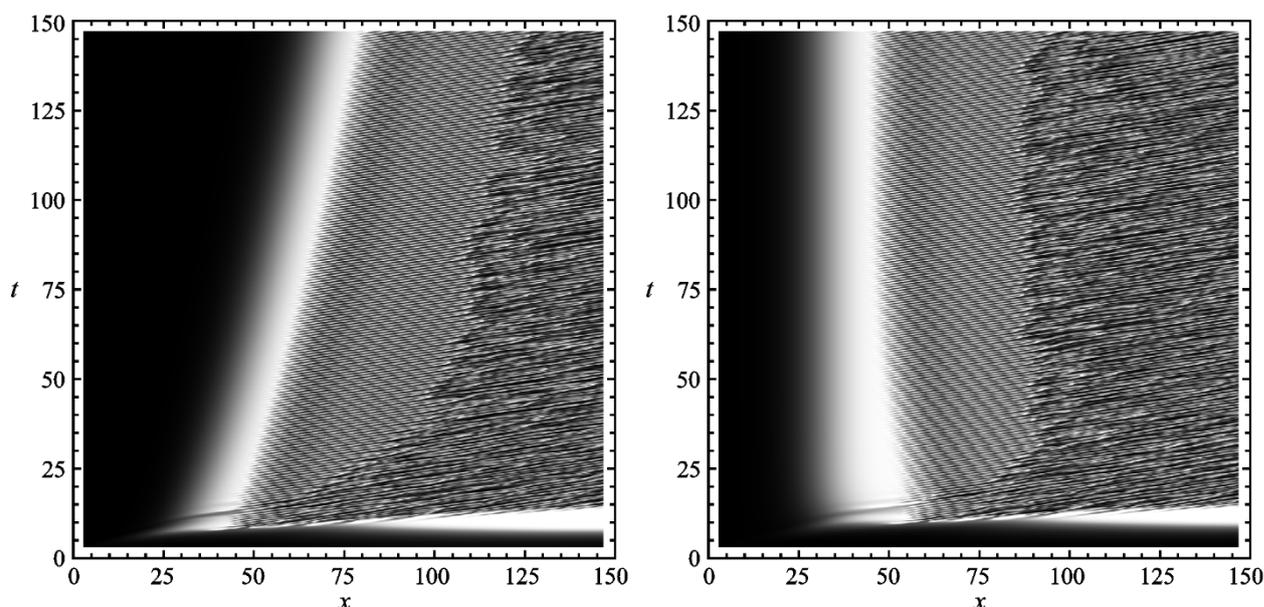


Рис. 2.12. Пространственно-временные диаграммы при $b = 3$, $c = 5$, $V = 6.5$, иллюстрирующие пространственное развитие турбулентности, индуцированной внешним сигналом: a — внешнее воздействие отсутствует; b — воздействие внешним сигналом с амплитудой $A_0 = 0.001$ и частотой $\omega = -\pi$

Однако, если МН является абсолютной, этот режим становится неустойчивым и возбуждается автомодуляция. Рассмотрим воздействие гармоническим сигналом с достаточно малой амплитудой $A_0 = 0.001$ и частотой $\omega = -\pi$, что приближенно равно частоте спектральной составляющей с максимальной амплитудой в спектре затухающих колебаний, которые наблюдаются в отсутствие входного сигнала. Пространственно-временная диаграмма для этого случая показана на рис. 2.12,б. Она имеет вид, аналогичный рис. 2.10,д. В начале цепочки наблюдаются одночастотные колебания с постоянной амплитудой. Далее видны область регулярной автомодуляции и область турбулентности. В данном случае следует говорить о *турбулентности, индуцированной внешним сигналом*, поскольку без внешнего воздействия колебания затухают (рис. 2.12,а). Впрочем, даже в отсутствие внешнего сигнала возможны нетривиальные эффекты, связанные с усилением флуктуаций, неизбежно присутствующих в любой реальной системе. Подобные вопросы рассматривались, например, в [30].

В целом результаты численного моделирования, представленные в этом и предыдущем разделах, хорошо согласуются с представлениями, развитыми в §2.4, и показывают, что картина поведения действительно определяется характером двух неустойчивостей (первичной и модуляционной).

§ 2.6. О характере модуляционной неустойчивости в консервативной среде

В пределе $\alpha, \beta_i, \gamma_i \rightarrow 0$ уравнение ГЛ (2.4) превращается в нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), которое является эталонной моделью для описания динамики огибающей волнового пакета в консервативной среде [3,31,32]. Запишем его в виде

$$i(A_t + v_g A_x) + \frac{\omega_0''}{2} A_{xx} + \gamma |A|^2 A = 0, \quad (2.35)$$

где $\omega_0'' = d^2\omega/dk^2$ — параметр дисперсии групповой скорости, γ — параметр фазовой нелинейности, который в данном случае является вещественным.

Уравнение (2.35) имеет решения в виде монохроматической волны с постоянной амплитудой

$$A(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.36)$$

где частота ω и волновое число k связаны нелинейным дисперсионным соотношением

$$\omega = kv_g + \frac{\omega_0''}{2} k^2 - \gamma |A_0|^2. \quad (2.37)$$

Считая амплитуду и частоту волны заданными, из (2.37) найдем волновое число для волны, распространяющейся слева направо:

$$k(\omega, A_0) = \frac{1}{\omega_0''} \left[\sqrt{v_g^2 + 2\omega_0'' (\gamma |A_0|^2 + \omega)} - v_g \right]. \quad (2.38)$$

Исследуем это решение на устойчивость аналогично тому, как это было сделано в § 2.3.3 для уравнения ГЛ. Зададим малое возмущение монохроматического решения

$$A(x, t) = (A_0 + \tilde{a}(x, t))e^{i(kx - \omega t)},$$

где $|\tilde{a}(x, t)| \ll |A_0|$, и будем искать его в виде двух сателлитов, симметрично отстоящих от несущей частоты:

$$\tilde{a}(x, t) = a_+ e^{i(Kx - \Omega t)} + a_- e^{-i(Kx - \Omega t)}. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в уравнение (2.35) и повторяя действия, описанные в § 2.3.3, приходим к дисперсионному соотношению для частоты и волнового числа малого возмущения

$$[\Omega - KV(\omega, A_0)]^2 = \left(\frac{\omega_0'' K^2}{2}\right)^2 - \gamma \omega_0'' |A_0|^2 K^2, \quad (2.40)$$

где

$$V(\omega, A_0) = v_g + \omega_0'' k(\omega, A_0) \quad (2.41)$$

— групповая скорость на частоте ω (вообще говоря, зависящая от амплитуды).

Считая волновое число K вещественным, запишем (2.40) в виде $\Omega = KV(\omega) \pm i\lambda(K)$, где

$$\lambda(K) = \sqrt{\gamma \omega_0'' |A_0|^2 K^2 - \left(\frac{\omega_0'' K^2}{2}\right)^2} \quad (2.42)$$

— инкремент неустойчивости. Очевидно, что при выполнении условия

$$\omega_0'' \gamma > 0, \quad (2.43)$$

известного как критерий Лайтхилла, в области малых K инкремент является вещественным и положительным, т.е. имеет место МН.⁷

График зависимости $\lambda(K)$ приведен на рис. 2.13. Неустойчивыми являются возмущения, волновые числа которых лежат в интервале

$$K^2 < K_0^2 = \frac{4\gamma |A_0|^2}{\omega_0''}. \quad (2.44)$$

⁷ Далее без ограничения общности будем считать $\omega_0'' > 0$, $\gamma > 0$.

Максимальное значение инкремента $\lambda_m = \gamma |A_0|^2$ имеет возмущение с волновым числом

$$K_m = \frac{K_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\gamma |A_0|^2}{\omega_0''}}. \quad (2.45)$$

Для уравнения ГЛ зависимость $\lambda(K)$ имела аналогичный характер (рис. 2.3).

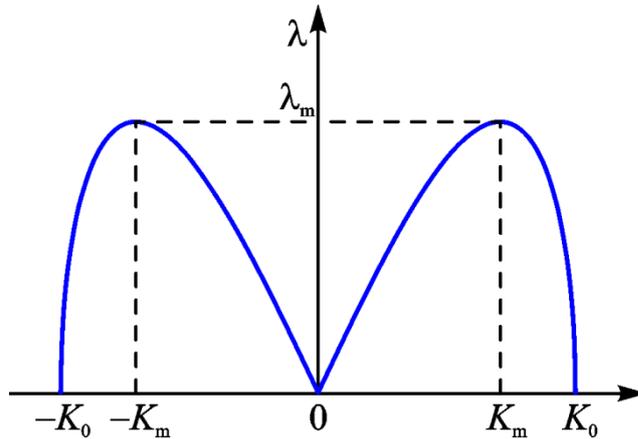


Рис. 2.13. Зависимость инкремента модуляционной неустойчивости от волнового числа

Выясним, при каких условиях МН является абсолютной, при каких — конвективной. Для определения характера неустойчивости используем критерий, основанный на методе перевала (§ 1.2.1). Введем безразмерные переменные $z = K/K_m$, $w = \Omega/\lambda_m$ и перепишем дисперсионное соотношение (2.40) в виде (перед мнимой частью выбираем знак «+», что соответствует нарастающей волне)

$$w = az + i\sqrt{z^2(2 - z^2)}, \quad (2.46)$$

где введен безразмерный параметр

$$a = \frac{V}{|A_0|} \sqrt{\frac{2}{\omega_0'' \gamma}}.$$

Дифференцируя (2.46) и приравнявая полученное соотношение нулю, находим точки перевала

$$z_s = \pm \sqrt{1 + \frac{a^2 \mp a\sqrt{a^2 - 16}}{8}}. \quad (2.47)$$

Наличие двух точек перевала связано с тем, что возмущение имеет вид двух сателлитов, расположенных симметрично относительно несущей частоты (см. (2.39)). Контур интегрирования должен пройти только через одну из точек перевала, причем таким образом, чтобы непосредственно в точке перевала его направление совпадало с направлением градиентного спуска, т.е. $\text{Im}(w) = \text{const}$ [33]. В данном случае это направление параллельно вещественной оси. Кроме того, контур должен обойти в нижней полуплоскости точки $z = 0, \pm\sqrt{2}$, в которых функция $w(z)$ не аналитична.

Записывая критерий абсолютной неустойчивости $\text{Im}(w(z_s)) > 0$, получим условие $a^2 < 16$ или, с учетом определения a ,

$$\gamma |A_0|^2 > \frac{V^2}{8\omega_0''}. \quad (2.48)$$

Однако необходимо учесть, что V в свою очередь зависит от частоты и амплитуды. С учетом соотношений (2.38) и (2.41) неравенство (2.48) приобретает окончательный вид

$$\gamma |A_0|^2 > \frac{1}{3} \left(\frac{V^2}{2\omega_0''} + \omega \right). \quad (2.49)$$

Таким образом, когда A_0 превышает критическое значение, которое определяется формулой (2.49), происходит смена характера неустойчивости с конвективной на абсолютную. Принципиальной особенностью является то, что этот эффект носит нелинейный характер, поскольку наблюдается по мере увеличения интенсивности волны.

Аналитические результаты, определяющие характер МН, подтверждаются результатами компьютерного моделирования [21,22]. Как и для уравнения ГЛ (§ 2.5), чтобы исключить эффекты отражения и реализовать режим однонаправленного распространения, граничное условие справа ставилось в виде так называемого поглощающего слоя, т.е. считалось, что интересующая нас область имеет некоторую конечную длину L , а при $x > L$ в уравнение

(2.35) искусственно вводится затухание с коэффициентом, экспоненциально нарастающим по координате. На левой границе задавалось граничное условие в виде

$$A(0,t) = A_{in} \operatorname{th}(t) \exp(-i\omega t), \quad (0.50)$$

что обеспечивает плавное нарастание амплитуды входного сигнала. Начальное условие выбиралось в виде $A(x,t=0) = 0$.

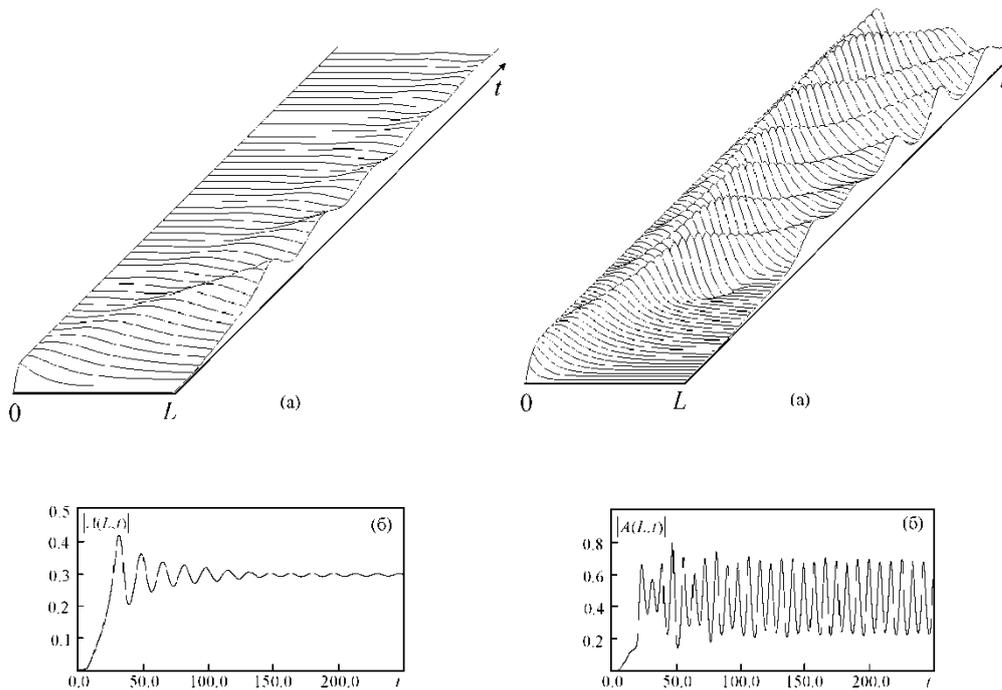


Рис. 2.14. Пространственно-временная динамика (а) и зависимость амплитуды сигнала от времени в точке $L = 10$ (б), иллюстрирующие распространение сигнала в случае конвективной неустойчивости ($v_g = 1.2$, $A_0 = 0.3$)

Рис. 2.15. Пространственно-временная динамика (а) и зависимость амплитуды сигнала от времени в точке $L = 10$ (б), иллюстрирующие распространение сигнала в случае абсолютной неустойчивости ($v_g = 1.4$, $A_0 = 0.6$)

Результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическими. Для определенности все представленные ниже результаты приведены для случая $\gamma = 1$, $\omega_0''/2 = 1$, $\omega = 0$, остальные значения указаны в подписях. При малых значениях амплитуды входного сигнала реализуется режим конвективной МН. В этом случае возмущения, возникшие на переднем фронте, сносятся вправо и покидают систему через правую границу.

При этом в фиксированной точке пространства осцилляции амплитуды постепенно затухают, и в итоге после окончания переходного процесса устанавливаются одночастотные колебания с постоянной амплитудой A_0 и частотой ω . На рис. 2.14 приведены примеры пространственно–временной динамики огибающей сигнала и зависимость от времени в фиксированной точке с координатой $L = 10$. Справа от этой точки вводились поглощающие слои.

С ростом амплитуды входного сигнала длительность переходного процесса увеличивается, и когда A_0 превышает критическое значение, определяемое формулой (2.49), неустойчивость становится абсолютной. В этом случае (рис. 2.15) нарастающие возмущения непрерывно генерируются вдоль всей длины системы, в результате чего возникает автомодуляция в виде бегущих волн, распространяющихся вдоль системы. Амплитуда волны в фиксированной точке испытывает периодические осцилляции (рис. 2.15,б). С ростом A_0 растет глубина модуляции амплитуды, а спектр обогащается новыми гармониками. Постепенно сигнал в точке $x = L$ приобретает вид последовательности солитоноподобных импульсов. Более того, с ростом A_0 наблюдается переход к пространственно-временным хаотическим колебаниям, т.е. к турбулентности. Поскольку НУШ является универсальной моделью для описания динамики огибающей волнового пакета в консервативных средах, такое поведение может носить достаточно общий характер. Одним из примеров является возникновение хаотической динамики магнитостатических волн в ферритовых пленках [34,35].

ГЛАВА 3. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛН С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

§ 3.1. Волны с положительной и отрицательной энергией.

Волны пространственного заряда в электронном потоке

Рассмотрим другой класс активных сред, в которых неустойчивость возникает за счет взаимодействия волн с положительной и отрицательной энергией. Это могут быть, например, электронные или гидродинамические потоки. Под *волной с отрицательной энергией* понимают такую волну, энергия которой уменьшается при увеличении её амплитуды [1,4]. В качестве примера рассмотрим волны пространственного заряда в электронном потоке. Используем гидродинамическое приближение, т.е. представим электронный поток в виде сплошной среды — заряженной жидкости. Считая движение электронов одномерным⁸, запишем гидродинамическое уравнение движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\eta E_{nz}, \quad (3.1)$$

и уравнение непрерывности, отражающее закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь v — скорость «электронной жидкости», ρ — плотность заряда, $\eta = e/m$ — удельный заряд электрона, E_{nz} — напряженность поля пространственного заряда, которая подчиняется уравнению Пуассона

$$\frac{\partial E_{nz}}{\partial x} = -\frac{\rho - \rho_0}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

⁸Это справедливо, если электронный поток сфокусирован сильным продольным магнитным полем.

При этом считается, что статический пространственный заряд скомпенсирован неподвижными положительными ионами, плотность которых ρ_0 по абсолютной величине равна средней плотности заряда электронов [1,4].

Представим скорость и плотность заряда в виде суммы постоянных и переменных составляющих

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \tilde{v}(x, t), \\ \rho &= \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

подставим эти выражения в уравнения (3.1)-(3.3) и линеаризуем, считая переменные составляющие малыми. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\eta E_{nz}, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E_{nz}}{\partial x} &= -\frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде бегущей гармонической волны, полагая, что все переменные зависят от координаты и времени как $\exp[i(kx - \omega t)]$. Уравнения (3.5) примут вид

$$i(\omega - kv_0)\tilde{v} = \eta E_{nz}, \quad (3.6)$$

$$i(\omega - kv_0)\tilde{\rho} = ik\rho_0\tilde{v}, \quad (3.7)$$

$$ikE_{nz} = -\tilde{\rho}/\epsilon_0 \quad (3.8)$$

Условие совместности этой системы приводит к дисперсионному соотношению

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2, \quad (3.9)$$

где $\omega_p = \sqrt{\eta\rho_0/\epsilon_0}$ — плазменная частота.

Из уравнения (3.9) следует, что в электронном потоке возбуждаются две волны, называемые *волнами пространственного заряда* (ВПЗ), дисперсионные характеристики которых задаются уравнениями

$$\omega = kv_0 \pm \omega_p.$$

Фазовые скорости этих волн равны

$$v_\phi = v_0 \pm \frac{\omega_p}{k}. \quad (3.10)$$

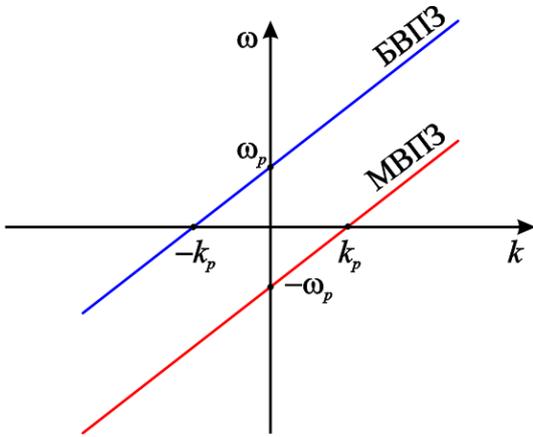


Рис. 3.1. Дисперсионные характеристики быстрой и медленной ВПЗ

Знак «+» соответствует *быстрой* ВПЗ, фазовая скорость которой превышает скорость электронного потока v_0 , знак «-» — *медленной*. Дисперсионные характеристики приведены на рис. 3.1, где введено обозначение $k_p = \omega_p/v_0$.

Для дальнейшего существенно, что быстрая ВПЗ является волной с положительной энергией, а медленная — с отрицательной.

Действительно, из уравнения (3.7) видно, что для быстрой волны

$$\tilde{v} = \frac{\omega_p}{k} \cdot \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0},$$

т.е. возмущения скорости и плотности заряда синфазны. Следовательно, с ростом амплитуды волны плотность кинетической энергии $\rho v^2/2\eta$ возрастает.

Напротив, для медленной ВПЗ

$$\tilde{v} = -\frac{\omega_p}{k} \cdot \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0},$$

следовательно, с ростом её амплитуды количество ускоренных электронов уменьшается, а замедленных — увеличивается. Таким образом, плотность энергии уменьшается [36].

Анализируя в общей постановке задачу о возбуждении волн в среде, движущейся со скоростью v_0 , Стэррок показал [37], что быстрые волны с $v_\phi > v_0$ имеют положительную энергию, а медленные с $v_\phi < v_0$ — отрицательную.

§ 3.2. Взаимодействие электронного потока с электромагнитной волной

Принцип действия различных приборов вакуумной, плазменной и квантовой электроники основан на неустойчивости, развивающейся при взаимодействии волн с положительной и отрицательной энергией. Типичным примером является взаимодействие электронного потока с бегущей электромагнитной волной (ЭМВ), распространяющейся в замедляющей системе [4,8,38,39]. В этом случае уравнение движения (3.1) модифицируется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\eta(E + E_{nz}), \quad (3.11)$$

где E — напряженность поля замедленной ЭМВ. Представим скорость и плотность заряда в виде (3.4) и линеаризуем уравнения аналогично тому, как это было сделано в § 3.1. Удобно ввести переменную составляющую тока $I = (v_0 \tilde{\rho} + \rho_0 \tilde{v})S$, где S — площадь поперечного сечения электронного потока.

Для величины I получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 I + \omega_p^2 I = -\eta \rho_0 S \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Считая, что I и E зависят от времени по гармоническому закону, $I, E \sim \exp(-i\omega t)$, приведем это уравнение к виду

$$\left(v_0 \frac{\partial}{\partial x} - i\omega \right)^2 I + \omega_p^2 I = \frac{i\omega v_0 I_0}{2V_0} E, \quad (3.13)$$

где $I_0 = \rho_0 v_0 S$ — постоянный ток, $V_0 = v_0^2 / (2\eta)$ — ускоряющее напряжение.

Также можно записать уравнение возбуждения замедляющей системы электронным током [4,38,39]

$$\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{i\omega}{v_\phi} E = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 KI, \quad (3.14)$$

Волны с положительной и отрицательной энергией

где v_ϕ — фазовая скорость волны в замедляющей системе, K — сопротивление связи. Отыскивая решение уравнений (3.13), (3.14) в виде $I, E \sim \exp(ikx)$, получим дисперсионное соотношение

$$(\omega - \omega_s(k)) \left[(\omega - kv_0)^2 - \omega_p^2 \right] = \omega^3 C^3. \quad (3.15)$$

Здесь $\omega_s(k) = kv_\phi(k)$ — «холодная» дисперсионная характеристика замедляющей системы, C — параметр усиления Пирса, который определяется формулой

$$C^3 = \frac{I_0 K}{4V_0} \left(\frac{v_0}{v_\phi} \right).$$

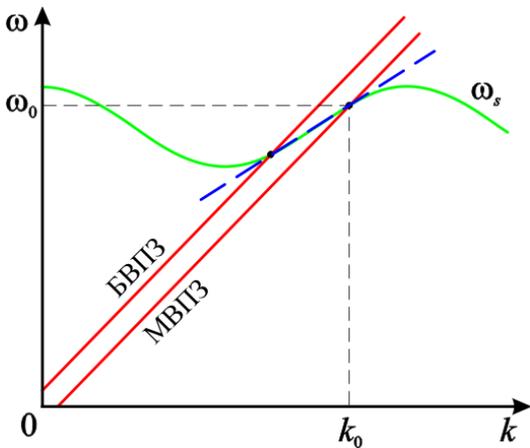


Рис. 3.2. Дисперсионные характеристики замедленной ЭМВ и быстрой и медленной ВПЗ. (ω_0, k_0) — точка синхронизма ЭМВ и медленной ВПЗ

На рис. 3.2 приведены дисперсионная характеристика ЭМВ в замедляющей структуре, а также дисперсионные характеристики быстрой и медленной ВПЗ. Наиболее интенсивное взаимодействие между этими волнами происходит в окрестности *точек синхронизма*, в которых эти характеристики пересекаются, т.е. фазовая скорость ЭМВ равна фазовой скорости одной из ВПЗ. В случае большого про-

странственного заряда, когда точки синхронизма лежат достаточно далеко друг от друга, взаимодействие с быстрой и медленной ВПЗ можно рассматривать по отдельности.

Итак, рассмотрим для определенности взаимодействие с медленной ВПЗ (соответствующая точка синхронизма показана на рис. 3.2). В этой точке

$$\omega_0 = \omega_s(k_0), \quad \omega_0 = k_0 v_0 - \omega_p. \quad (3.16)$$

Будем также считать, что параметр Пирса достаточно мал, что, как правило, имеет место на практике. Представим частоту и волновое число в виде

$$\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}, \quad k = k_0 + \tilde{k},$$

где $\tilde{\omega}$ и \tilde{k} — небольшие отстройки от точки синхронизма. С учетом (3.16) запишем с точностью до членов первого порядка малости по $\tilde{\omega}$, \tilde{k}

$$\omega - \omega_s(k) \approx \tilde{\omega} - v_g \tilde{k},$$

$$\omega - kv_0 + \omega_p = \tilde{\omega} - v_0 \tilde{k},$$

$$\omega - kv_0 - \omega_p = -2\omega_p + \tilde{\omega} - v_0 \tilde{k} \approx -2\omega_p.$$

Подставив эти выражения в (3.15), получим

$$(\tilde{\omega} - v_g \tilde{k})(\tilde{\omega} - v_0 \tilde{k}) \approx -\frac{\omega_0^3 C^3}{2\omega_p} \quad (3.17)$$

Здесь $v_g = d\omega_s/dk$ — групповая скорость ЭМВ. Фактически, дисперсионная характеристика замедляющей системы аппроксимируется касательной, которая показана на рис. 3.2 штриховой линией.

Аналогичные выкладки можно проделать в окрестности точки синхронизма с быстрой ВПЗ. Дисперсионное соотношение принимает вид

$$(\tilde{\omega} - v_g \tilde{k})(\tilde{\omega} - v_0 \tilde{k}) \approx \frac{\omega_0^3 C^3}{2\omega_p}, \quad (3.18)$$

отличаясь от (3.17) лишь знаком правой части.

Отметим, что правая часть дисперсионного соотношения, вообще говоря, зависит от ω и k (в частности, от них зависят фазовая скорость v_ϕ и сопротивление связи K). Однако, учитывая малость параметра C^3 , можно приближенно положить $\omega \approx \omega_0$, $k \approx k_0$ и считать его константой.

На рис. 3.2 показан случай синхронизма с прямой пространственной гармоникой. Взаимодействие такого типа осуществляется в *лампе бегущей волны* (ЛБВ). Однако можно подобрать скорость электронного потока таким образом, чтобы имел место синхронизм с обратной гармоникой, для которой групповая скорость направлена навстречу электронам. В этом случае вместо дисперсионных соотношений (3.17), (3.18) будем иметь

$$(\tilde{\omega} + v_g \tilde{k})(\tilde{\omega} - v_0 \tilde{k}) \approx \pm \frac{\omega_0^3 C^3}{2\omega_p}. \quad (3.19)$$

Взаимодействие с обратной гармоникой осуществляется в лампе обратной волны (ЛОВ) [38,39].

§ 3.3. Анализ дисперсионного соотношения в двухволновом приближении

Итак, при большом пространственном заряде в окрестности точки синхронизма достаточно учитывать взаимодействие только двух волн. Это позволяет записать универсальный вид дисперсионного соотношения связанных волн [1,4]:

$$(\omega \pm kv_1)(\omega \pm kv_2) = \pm \varepsilon^2. \quad (3.20)$$

Здесь ω и k — отстройки от точки синхронизма (знак «~» для краткости опускаем), $v_{1,2}$ — групповые скорости взаимодействующих волн (по абсолютной величине), знаки « \pm » отражают направление потока энергии. В правой части введен параметр связи ε , знак « $-$ » соответствует взаимодействию волн с энергиями разных знаков, знак « $+$ » — одного знака. Дисперсионное соотношение (3.20) представляет собой квадратное уравнение как относительно частоты, так и относительно волнового числа, поэтому его корни нетрудно найти. Всего можно выделить четыре характерные ситуации.

3.3.1. Взаимодействие попутных волн с энергией одного знака

В этом случае уравнение (3.20) принимает вид

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) = \varepsilon^2.$$

Его можно разрешить относительно ω

$$\omega(k) = \frac{v_1 + v_2}{2} k \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 - v_2)^2 k^2 + 4\varepsilon^2}$$

или относительно k

$$k(\omega) = \frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2} \omega \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2 \omega^2}{v_1^2 v_2^2} + \frac{4\varepsilon^2}{v_1 v_2}}.$$

Очевидно, что и $\omega(k)$, и $k(\omega)$ чисто вещественны, так что никакой неустойчивости нет. Соответствующая дисперсионная диаграмма приведена на рис. 3.3,а.

3.3.2. Взаимодействие встречных волн с энергией одного знака.

Теперь рассмотрим взаимодействие волн, групповые скорости которых направлены навстречу друг другу. Дисперсионное соотношение для этого случая имеет вид

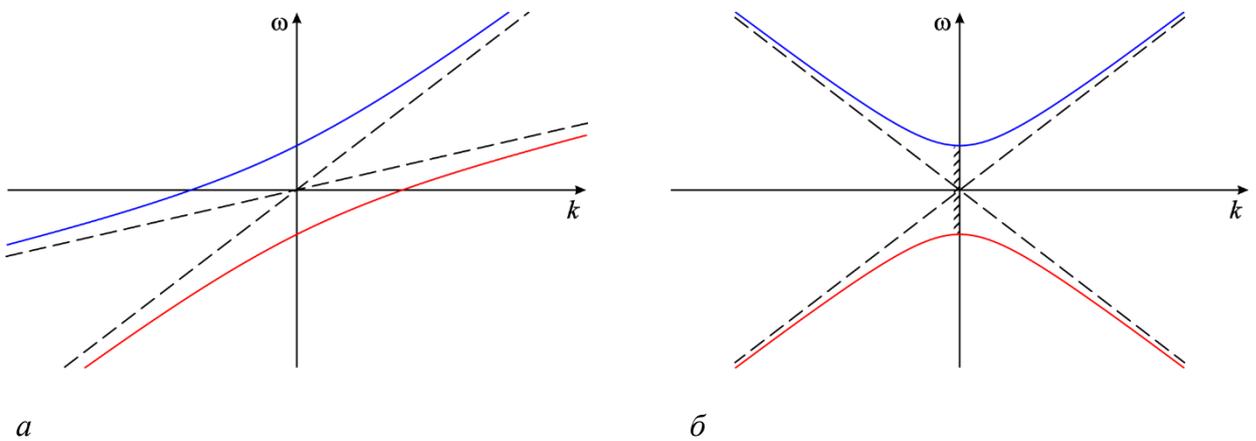


Рис. 3.3. Дисперсионные характеристики взаимодействующих попутных (а) и встречных (б) волн с энергией одного знака. Асимптоты — дисперсионные характеристики парциальных волн. Штриховкой показана полоса непропускания

$$(\omega - kv_1)(\omega + kv_2) = \varepsilon^2.$$

Запишем выражения для корней этого уравнения:

$$\omega(k) = \frac{v_1 - v_2}{2} k \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 + v_2)^2 k^2 + 4\varepsilon^2},$$

$$k(\omega) = -\frac{v_1 - v_2}{2v_1v_2} \omega \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(v_1 + v_2)^2 \omega^2}{v_1^2 v_2^2} - \frac{4\varepsilon^2}{v_1 v_2}}.$$

Вновь видим, что при вещественных k корни $\omega(k)$ также являются вещественными. Однако корни $k(\omega)$ являются комплексно сопряженными в области частот

$$\omega^2 < \omega_c^2 \equiv \frac{4\varepsilon^2 v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}.$$

Особенно простой вид приобретает дисперсионное соотношение в случае, когда групповые скорости одинаковы по абсолютной величине, $v_{1,2} = v$:

$$\omega^2 - k^2 v^2 = \varepsilon^2.$$

Очевидно, что в области частот $\omega^2 < \varepsilon^2$ волновые числа оказываются чисто мнимыми

$$k = \pm i \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}.$$

Соответствующая дисперсионная характеристика приведена на рис. 3.3,б.

Несмотря на то, что имеются комплексные k , неустойчивости нет, поскольку $\text{Im } \omega = 0$, т.е. нет нарастания во времени. Волны с комплексными k являются затухающими в пространстве; волновое число с $\text{Im } k > 0$ соответствует волне, распространяющейся вправо, волновое число с $\text{Im } k < 0$ — волне, распространяющейся влево. Область частот $\omega^2 < \omega_c^2$ называется *полосой непроникания*, а ω_c — *критической частотой* или *частотой отсечки*.

3.3.3. Взаимодействие попутных волн с энергиями разных знаков

Если взаимодействуют попутные волны с энергиями разных знаков, дисперсионное соотношение имеет вид

$$(\omega - kv_1)(\omega - kv_2) = -\varepsilon^2. \quad (3.21)$$

Находим корни этого уравнения:

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \frac{v_1 + v_2}{2} k \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 - v_2)^2 k^2 - 4\varepsilon^2}, \\ k(\omega) &= \frac{v_1 + v_2}{2v_1 v_2} \omega \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2 \omega^2}{v_1^2 v_2^2} - \frac{4\varepsilon^2}{v_1 v_2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В данном случае при вещественных k корни $\omega(k)$ являются комплексными в области

$$k^2 < k_c^2 \equiv \frac{4\varepsilon^2}{(v_1 - v_2)^2},$$

а при вещественных ω корни $k(\omega)$ являются комплексными в области

$$\omega^2 < \omega_c^2 \equiv \frac{4\varepsilon^2 v_1 v_2}{(v_1 - v_2)^2},$$

т.е. присутствует нарастание волн и во времени, и в пространстве. Инкремент неустойчивости

$$\text{Im} \omega(k) = \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 - (v_1 - v_2)^2 k^2}$$

принимает максимальное значение $\text{Im} \omega_{\max} = \varepsilon$ при $k = 0$, т.е. в точке синхронизма. На рис. 3.4,а приведены дисперсионные характеристики и инкремент неустойчивости для этого случая.

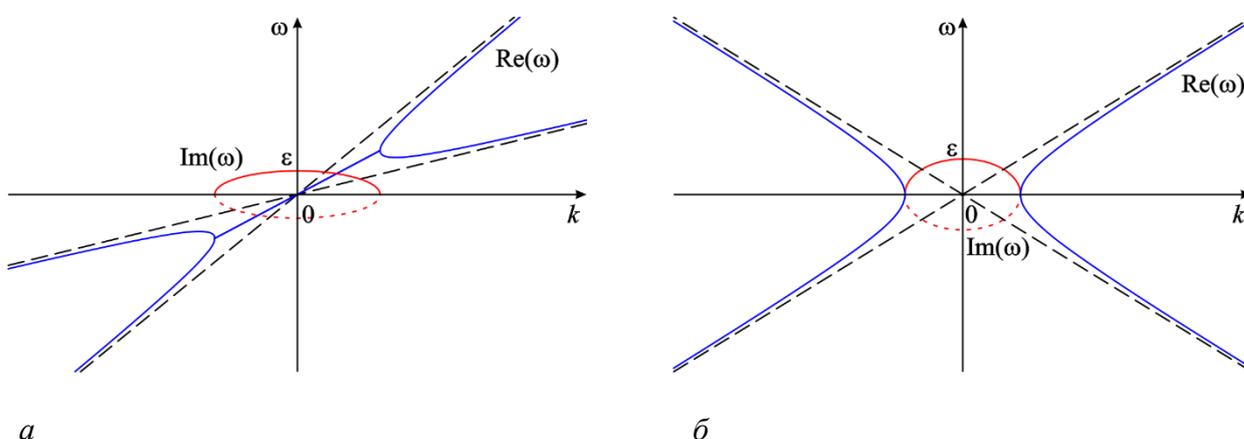


Рис. 3.4. Дисперсионные характеристики и инкремент неустойчивости взаимодействующих попутных (а) и встречных (б) волн с положительной и отрицательной энергией. Пунктиром показан декремент затухающей волны

Обратим внимание, что в полосе неустойчивости решение представляет собой суперпозицию двух волн: нарастающей ($\text{Im} \omega > 0$) и затухающей ($\text{Im} \omega < 0$).

3.3.4. Взаимодействие встречных волн с энергиями разных знаков

Наконец, рассмотрим взаимодействие встречных волн с энергиями разных знаков. Для этого случая дисперсионное соотношение имеет вид

$$(\omega - kv_1)(\omega + kv_2) = -\varepsilon^2. \quad (3.23)$$

Корни этого уравнения есть

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \frac{v_1 - v_2}{2} k \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 + v_2)^2 k^2 - 4\varepsilon^2}, \\ k(\omega) &= -\frac{v_1 - v_2}{2v_1v_2} \omega \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(v_1 + v_2)^2 \omega^2}{v_1^2 v_2^2} + \frac{4\varepsilon^2}{v_1 v_2}}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Теперь корни $k(\omega)$ являются вещественными при вещественных ω , тогда как корни $\omega(k)$ являются комплексными в области

$$k^2 < k_c^2 \equiv \frac{4\varepsilon^2}{(v_1 + v_2)^2}.$$

Таким образом, в данном случае нарастание поля во времени есть, а в пространстве — нет!

Как и при взаимодействии волн с энергией одного знака (§ 3.3.2), анализ существенно упрощается, если групповые скорости одинаковы по абсолютной величине, $v_{1,2} = v$. Дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 - k^2 v^2 = -\varepsilon^2.$$

В области $k^2 < \varepsilon^2/v^2$ корни этого уравнения чисто мнимые:

$$\omega = \pm i \sqrt{\varepsilon^2 - k^2 v^2}.$$

Максимальный инкремент $\text{Im}\omega_{\text{max}} = \varepsilon$ по-прежнему достигается при $k = 0$. Соответствующие дисперсионные характеристики и инкремент неустойчивости приведены на рис. 3.4,б.

3.3.5. Анализ характера неустойчивости

Определить характер неустойчивости взаимодействующих волн с положительной и отрицательной энергиями можно, не прибегая к критериям, изложенным в Главе 1. Действительно, рассмотрим, например, взаимодействие попутных волн. Нетрудно записать уравнения связанных волн, соответствующие дисперсионному соотношению (3.21) [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + v_1 \frac{\partial U}{\partial x} &= \varepsilon V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + v_2 \frac{\partial V}{\partial x} &= \varepsilon U.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Это система гиперболического типа, которую можно решить при помощи метода характеристик [1,3,4]. Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_1, \quad \frac{dx}{dt} = v_2.$$

Рассмотрим эволюцию начального возмущения, локализованного на отрезке $a < x < b$, и построим картину характеристик на плоскости x, t (рис. 3.5,а). Характеристики представляют собой два семейства параллельных прямых. Поскольку они наклонены в одну сторону, очевидно, что возмущение, расширяясь, в целом сносится вправо. Следовательно, в системе попутных волн неустойчивость конвективная.

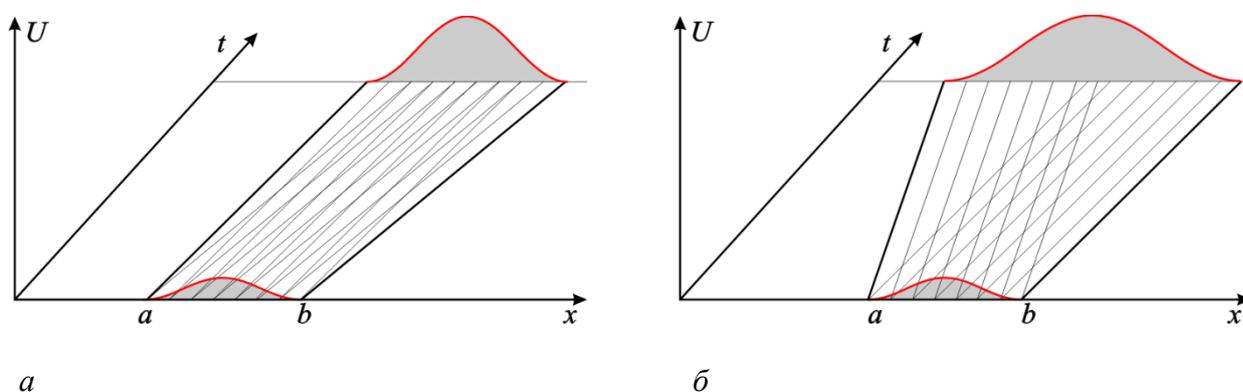


Рис. 3.4. Характеристики на плоскости x, t и эволюция начального возмущения для взаимодействия попутных (а) и встречных (б) волн с положительной и отрицательной энергией

Напротив, при взаимодействии встречных волн вместо (3.25) следует записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + v_1 \frac{\partial U}{\partial x} &= \varepsilon V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - v_2 \frac{\partial V}{\partial x} &= \varepsilon U. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Соответственно, уравнения характеристик есть

$$\frac{dx}{dt} = v_1, \quad \frac{dx}{dt} = -v_2.$$

Характеристики наклонены в разные стороны, следовательно, возмущение, нарастая, расширяется и постепенно занимает всю рассматриваемую область,

как показано на рис. 3.5,б. Таким образом, в системе встречных волн неустойчивость является абсолютной.

Итак, в случае двухволнового взаимодействия характер неустойчивости без труда определяется по наклону асимптот на дисперсионной диаграмме: если они наклонены в одну сторону, то неустойчивость конвективная, а если в разные — абсолютная.

Тем не менее, применим строгий критерий, основанный на слиянии полюсов (§ 1.2.2). Как видно из соотношений (3.22) и (3.24), два корня $k(\omega)$ сливаются в точке

$$k = \pm \frac{(v_1 \pm v_2)\omega}{2v_1v_2}. \quad (3.27)$$

Здесь знак «+» соответствует взаимодействию попутных волн, знак «-» — встречных. Однако критерий абсолютной неустойчивости требует, чтобы сливались два полюса, которые при $\text{Re } \omega \rightarrow -\infty$ находились в разных полуплоскостях. Для взаимодействия попутных волн корни $k(\omega)$ (3.22) в этом пределе принимают вид

$$k_1 \approx \frac{\omega}{v_1}, \quad k_2 \approx \frac{\omega}{v_2}.$$

Очевидно, что на ω -плоскости эти корни не могут лежать в разных полуплоскостях. Таким образом, неустойчивость является конвективной.

Напротив, для взаимодействия встречных волн из (3.24) находим

$$k_1 \approx \frac{\omega}{v_1}, \quad k_2 \approx -\frac{\omega}{v_2}.$$

Эти корни, очевидно, лежат в разных полуплоскостях. Подставив выражение (3.27) в дисперсионное соотношение (3.23), найдем точки ветвления

$$\omega_s^2 = -\frac{4\varepsilon^2 v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}. \quad (3.28)$$

Очевидно, что в одной из точек ветвления $\text{Im } \omega_s > 0$, следовательно, неустойчивость является абсолютной.

§ 3.4. Анализ дисперсионного соотношения в общем случае

Проведем анализ дисперсионного соотношения (3.15) в общем случае, не ограничиваясь двухволновым приближением, а учитывая взаимодействие всех трех волн: замедленной электромагнитной волны и двух волн пространственного заряда. Поскольку дисперсионное соотношение имеет третий порядок как по ω , так и по k , один из его корней всегда чисто вещественный, а два других могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными. Рассмотрим вначале взаимодействие с попутной волной. В этом случае в окрестности синхронизма с быстрой ВПЗ корни дисперсионного соотношения чисто вещественные, а в окрестности синхронизма с медленной ВПЗ лежит область конвективной неустойчивости, т.е. имеет место своего рода комбинация двух ситуаций, представленных на рис. 3.3,а и 3.4,а. Дисперсионные характеристики приведены на рис. 3.6,а.

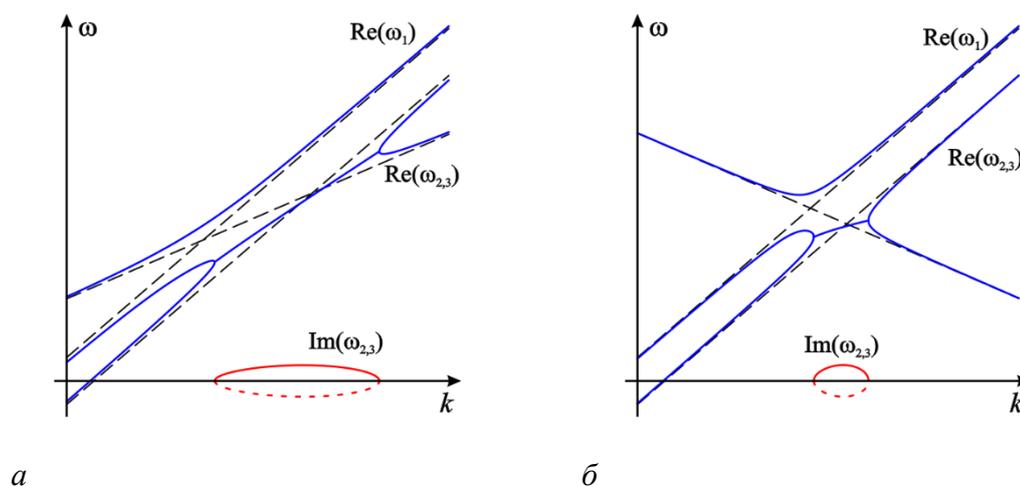


Рис. 3.6. Дисперсионные характеристики и инкремент неустойчивости для взаимодействия электронного потока с прямой (а) и обратной (б) гармоникой. Пунктиром показан декремент затухающей волны

При взаимодействии с обратной волной в окрестности синхронизма с быстрой ВПЗ имеет место непропускание, в окрестности синхронизма с медленной ВПЗ — абсолютная неустойчивость. На дисперсионной диаграмме, представленной на рис. 3.6,б, можно выделить области, напоминающие рис. 3.3,б и рис. 3.4,б.

По аналогии с § 3.3 дисперсионному соотношению ЛБВ или ЛОВ можно придать универсальный вид, удобный для дальнейшего анализа. Введем величины $\tilde{\omega}$ и \tilde{k} — отстройки от точки синхронизма, под которой теперь будем понимать точку, в которой фазовая скорость электромагнитной волны равна скорости электронного пучка v_0 :

$$\omega_0 = \omega_s(k_0), \quad \omega_0 = k_0 v_0. \quad (3.29)$$

Тогда из уравнения (3.15) получим

$$(\tilde{\omega} - v_g \tilde{k}) \left[(\tilde{\omega} - v_0 \tilde{k})^2 - \omega_p^2 \right] \approx \varepsilon^3, \quad (3.30)$$

где $\varepsilon = \omega_0 C$. Вводя нормированные частоту Ω , волновое число K и параметр пространственного заряда q

$$\Omega = \frac{\tilde{\omega} - v_0 \tilde{k}}{\varepsilon}, \quad K = \frac{(v_0 - v_g) \tilde{k}}{\varepsilon}, \quad q = \frac{\omega_p^2}{\varepsilon^2},$$

приведем (3.30) к виду

$$(\Omega + K)(\Omega^2 - q) = 1. \quad (3.31)$$

Используя известные формулы для корней кубического уравнения, можно выразить корни уравнения (3.31) в аналитическом виде (см., например, [40]):

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{K}{3} + \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}}, \\ \Omega_2 &= -\frac{K}{3} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{R + \sqrt{D}}, \\ \Omega_3 &= -\frac{K}{3} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{R + \sqrt{D}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

где

$$\begin{aligned} D &= Q^3 + R^2, \\ Q &= -\frac{K^2 + 3q^2}{9}, \\ R &= -\frac{2K^3 - 18q^2K - 27}{54}. \end{aligned}$$

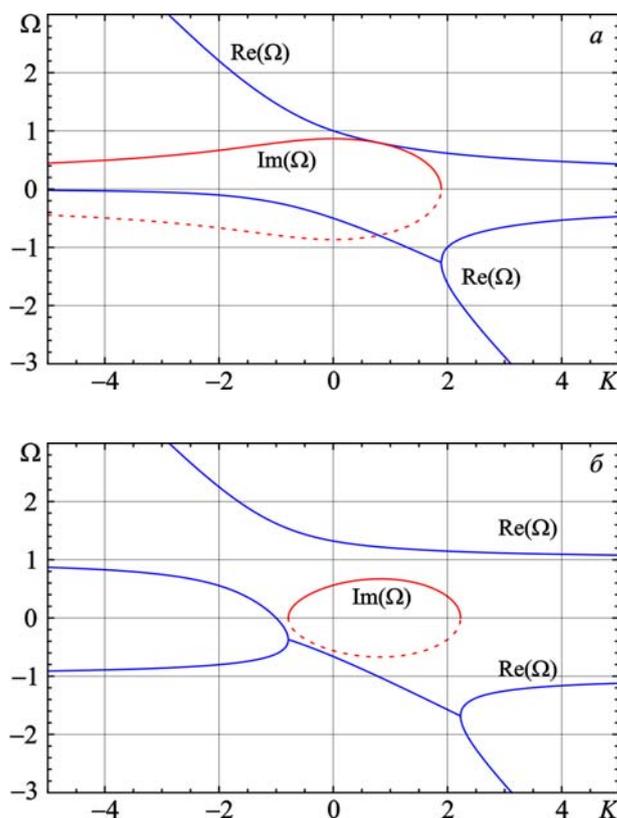


Рис. 3.7. Корни дисперсионного уравнения (3.31) при $q = 0$ (а) и $q = 1$ (б). Пунктиром показан декремент затухающей волны

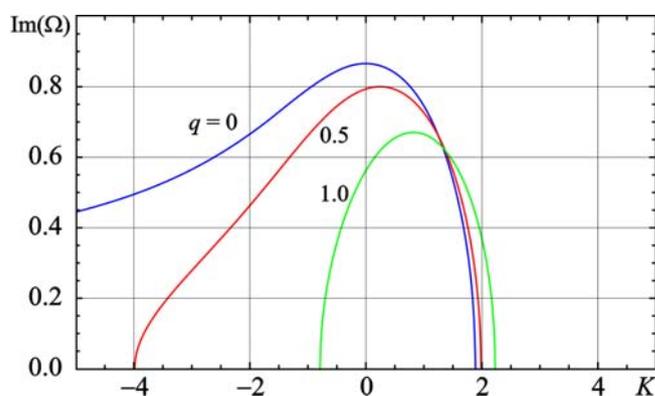


Рис. 3.8. Зависимости инкремента неустойчивости от волнового числа при различных значениях параметра пространственного заряда

q диапазон волновых чисел, в котором имеет место неустойчивость, ограничен (рис. 3.7,б).

На рис. 3.8 приведены зависимости инкремента неустойчивости от K при различных значениях параметра пространственного заряда. Видно, что с

Рассмотрим вначале случай пренебрежимо малого пространственного заряда $q \rightarrow 0$. Один из корней (3.32) всегда является вещественным, а два других могут быть комплексно сопряженными при

$$K < \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.89.$$

Зависимости $\Omega(K)$ приведены на рис. 3.7,а. Максимальный инкремент неустойчивости достигается при $K = 0$, т.е. в точке синхронизма. При этом корни дисперсионного уравнения равны $\Omega_1 = 1$,

$$\Omega_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Случай нулевого пространственного заряда является в некотором роде вырожденным поскольку область неустойчивости формально простирается вплоть до $K \rightarrow -\infty$ (хотя инкремент неустойчивости в этом пределе стремится к нулю). При конечных

ростом q инкремент неустойчивости и ширина полосы усиления уменьшаются, а значение K , при котором достигается максимальный инкремент, смещается вправо, т.е. к точке синхронизма с медленной ВПЗ. При $q=1$ форма кривой $\text{Im}\Omega(K)$ имеет практически тот же вид, что и в двухволновом приближении (рис. 3.4,а).

§ 3.5. Двухпучковая неустойчивость

В качестве еще одного важного примера рассмотрим взаимодействие двух электронных пучков. Запишем гидродинамические уравнения движения и непрерывности, аналогичные (3.1), (3.2)

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = -\eta E_{nz}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_j v_j)}{\partial x} = 0, \quad (3.34)$$

где $j = 1, 2$, а также уравнение Пуассона

$$\frac{\partial E_{nz}}{\partial x} = -\frac{\rho_1 + \rho_2 - \rho_{01} - \rho_{02}}{\epsilon_0} \quad (3.35)$$

Линеаризуем эти уравнения, полагая $v_j = v_{0j} + \tilde{v}_j(x, t)$, $\rho_j = \rho_{0j} + \tilde{\rho}_j(x, t)$

$$\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t} + v_{0j} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x} = -\eta E_{nz}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial t} + v_{0j} \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial x} + \rho_{0j} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x} = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial E_{nz}}{\partial x} = -\frac{\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2}{\epsilon_0} \quad (3.38)$$

Полагая, что все переменные величины зависят от координаты и времени как $\exp[i(kx - \omega t)]$, приходим к дисперсионному соотношению

$$\left[(\omega - kv_{01})^2 - \omega_{p1}^2 \right] \cdot \left[(\omega - kv_{02})^2 - \omega_{p2}^2 \right] = \omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2, \quad (3.39)$$

где $\omega_{pj} = \sqrt{\eta\rho_{0j}/\epsilon_0}$ — соответствующие плазменные частоты. Дисперсионное соотношение (3.39) является уравнением четвертого порядка как относительно ω , так и относительно k . Оно отражает связь четырех ВПЗ — двух быстрых и двух медленных.

Рассмотрим далее случай, когда пучки имеют одинаковую плотность, так что $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$. При этом условии уравнение (3.39) становится биквадратным. Введем среднюю скорость

$$\bar{v} = \frac{v_{01} + v_{02}}{2}$$

и расстройку скоростей

$$\delta v = \frac{v_{01} - v_{02}}{2}.$$

Без ограничения общности считаем, что $v_{01} > v_{02}$. Уравнение (3.39) примет вид

$$\left[(\Omega - k\delta v)^2 - \omega_p^2 \right] \cdot \left[(\Omega + k\delta v)^2 - \omega_p^2 \right] = \omega_p^4, \quad (3.40)$$

где $\Omega = \omega - k\bar{v}$. Корни этого уравнения находятся без труда:

$$\Omega^2 = k^2\delta v^2 + \omega_p^2 \pm \sqrt{\omega_p^4 + 4\omega_p^2 k^2\delta v^2}. \quad (3.41)$$

Очевидно, что из четырех корней два, которым соответствует знак «+» в (3.41), всегда вещественны. Два других являются комплексными в области волновых чисел

$$k^2 < \frac{2\omega_p^2}{\delta v^2}.$$

При этом решение представляет собой суперпозицию четырех волн, одна из которых является нарастающей, другая — затухающей, и еще две имеют постоянную амплитуду. Обратим внимание, что неустойчивость развивается в области длинных волн. Максимальный инкремент неустойчивости

$$\text{Im } \omega_{\max} = \omega_p \sqrt{\sqrt{1 + 2\sqrt{3}} - 1 - \sqrt{3}}/2 \approx \omega_p/2$$

достигается при

$$k^2 = \frac{\sqrt{3}\omega_p^2}{2\delta v^2}.$$

Аналогично можно найти и проанализировать корни $k(\omega)$.

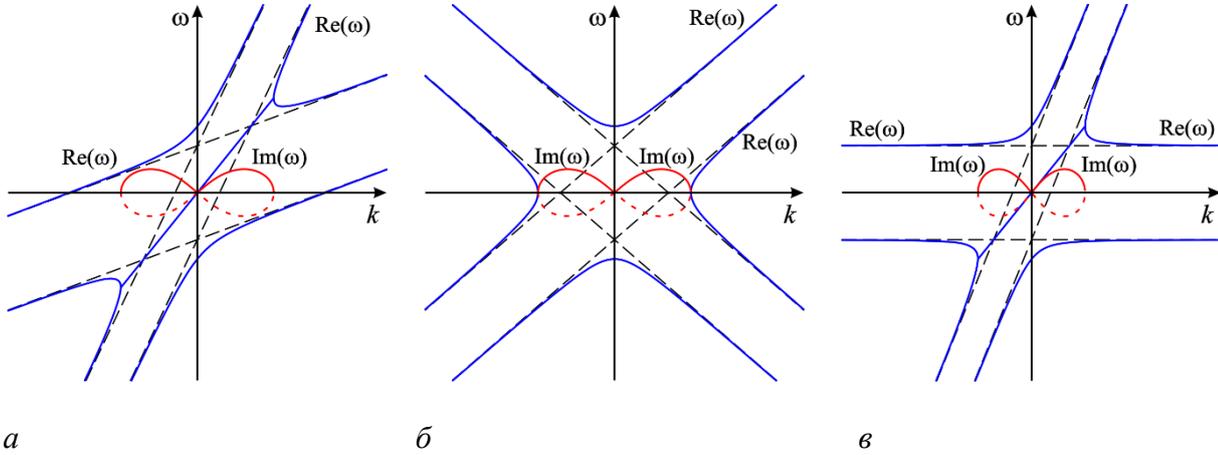


Рис. 3.9. Дисперсионные характеристики и инкремент неустойчивости взаимодействующих попутных (а) и встречных (б) электронных пучков, а также пучка, взаимодействующего с плазмой. Пунктиром показан декремент затухающей волны

На рис. 3.9 приведены дисперсионные характеристики для взаимодействия попутных ($v_{01}, v_{02} > 0$) и встречных пучков ($v_{01} > 0, v_{02} < 0$, для определенности представлен случай, когда скорости одинаковы по абсолютной величине). Привлекая аргументацию, развитую в § 3.3.5, можно сделать вывод о том, что в первом случае неустойчивость является конвективной, во втором — абсолютной. Неустойчивость является следствием взаимодействия быстрой ВПЗ в более медленном пучке с медленной ВПЗ в более быстром. Взаимодействие двух попутных пучков лежит в основе принципа действия *двухлучевого усилителя* или *электронно-волновой лампы* [36,41]. В свое время подобные приборы привлекли интерес как широкополосные усилители миллиметрового диапазона, поскольку они не требуют изготовления мелкоструктурных замедляющих систем. Однако широкого развития эта идея не получила. Одним из основных недостатков является высокая чувствительность к скоростному разбросу. Действительно, очевидно, что полоса неустойчивости тем шире, чем меньше расстройка скоростей δv . Выше мы предполагали, что оба электрон-

ных пучка являются моноэнергетическими, т.е. все электроны влетают в пространство взаимодействия со скоростями v_{01} или v_{02} . Однако неизбежно присутствующий в реальных пучках разброс дрейфовых скоростей существенно снижает коэффициент усиления и уменьшает ширину полосы частот.

Также на рис. 3.9,в приведена дисперсионная характеристика при нулевой скорости одного из потоков, что соответствует взаимодействию электронного пучка с неподвижной плазмой. Это пограничный случай между абсолютной и конвективной неустойчивостью, который заслуживает отдельного рассмотрения.

Неустойчивость электронного пучка в плазме была предсказана в 1949 г. А.И. Ахиезером и Я.Б. Файнбергом в СССР и независимо от них — Д. Бомом и Е. Гроссом в США. В настоящее время основной интерес представляют мощные пучково-плазменные усилители и генераторы СВЧ, основанные на сильнооточных релятивистских электронных пучках [42].

§ 3.6. Переход абсолютной неустойчивости в конвективную при наличии диссипации

В §§ 3.3-3.5 анализировались сравнительно простые примеры гиперболических систем, когда можно воспользоваться методом характеристик, и характер неустойчивости полностью определяется направлением групповых скоростей взаимодействующих волн. Однако существуют и более сложные ситуации, в которых этого недостаточно. Ряд примеров обсудим в этом и последующих разделах.

Рассмотрим взаимодействие встречных волн с энергиями разных знаков, когда одна из волн является затухающей. Дисперсионное соотношение (3.23) при наличии затухания модифицируется следующим образом:

$$(\omega - kv_1)(\omega + kv_2 + iv) = -\varepsilon^2, \quad (3.42)$$

Волны с положительной и отрицательной энергией

где ν — параметр диссипации. Применим второй критерий характера неустойчивости, основанный на слиянии полюсов. Разрешив (3.42) относительно k , получим

$$k = \frac{\omega(\nu_2 - \nu_1) - i\nu\nu_1 \pm \sqrt{(\omega(\nu_2 - \nu_1) - i\nu\nu_1)^2 + 4\nu_1\nu_2(\varepsilon^2 + \omega^2 + i\omega\nu)}}{2\nu_1\nu_2}. \quad (3.43)$$

При $\nu \rightarrow 0$ это соотношение, очевидно, переходит в (3.24).

Слияние двух корней (3.43) происходит при

$$(\omega(\nu_2 - \nu_1) - i\nu\nu_1)^2 + 4\nu_1\nu_2(\varepsilon^2 + \omega^2 + i\omega\nu) = 0.$$

Разрешим это уравнение относительно ω и найдем точки ветвления

$$\omega_s = -\frac{i(\nu \pm 2\varepsilon\sqrt{\nu_2/\nu_1})\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} \quad (3.44)$$

В отсутствие диссипации одна из этих точек всегда лежит в верхней полуплоскости, следовательно, неустойчивость является абсолютной (§ 3.3.5). Однако при

$$\nu > 2\varepsilon\sqrt{\nu_2/\nu_1}$$

обе точки ветвления лежат в нижней полуплоскости, т.е. неустойчивость становится конвективной. Влияние диссипации может сказываться, например, в твердотельных аналогах ЛОВ и ЛБВ. Подобные приборы, в которых миниатюрная замедляющая система наносилась непосредственно на поверхность полупроводникового кристалла, привлекали интерес в 1960-70-х гг. (см., например, [43-45]), однако широкого распространения не получили.

§ 3.7. Характер неустойчивости при нулевой групповой скорости одной из волн

Примером, когда групповая скорость одной из волн равна нулю, может служить взаимодействие электронного пучка с неподвижной плазмой (см. § 3.5). Дисперсионное соотношение для этого случая имеет вид (ср. (3.39))

$$\left[(\omega - kv_0)^2 - \omega_b^2 \right] \cdot \left[\omega^2 - \omega_p^2 \right] = \omega_p^2 \omega_b^2. \quad (3.45)$$

Здесь символами ω_b и ω_p обозначены плазменные частоты пучка и неподвижной плазмы, соответственно. Обратим внимание, что относительно ω это уравнение имеет четвертый порядок, а относительно k — второй. Поэтому критерии, развитые в § 1.2, здесь неприменимы. Действительно, если разрешить (3.45) относительно k , получим

$$k = \frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\omega \omega_b}{v_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Неустойчивость имеет место при $\omega^2 < \omega_p^2$; при этом волновые числа являются комплексно сопряженными:

$$k = \frac{\omega}{v_0} \pm \frac{i\omega \omega_b}{v_0 \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}.$$

Ясно, что не может произойти слияние двух корней, которые при $\text{Re } \omega \rightarrow -\infty$ находились в различных полуплоскостях, т.е. критерий абсолютной неустойчивости выполняться не может. Но это ещё не означает, что неустойчивость является конвективной.

Для анализа этой ситуации воспользуемся методом, развитым в [46]. Рассмотрим вначале взаимодействие двух встречных волн, полагая, что их скорости одинаковы по абсолютной величине. Дисперсионное соотношение (3.23) принимает вид

$$\omega^2 - k^2 v^2 = -\epsilon^2. \quad (3.46)$$

Для этого случая функцию Грина

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx-\omega t)}}{D(\omega, k)} dk \quad (3.47)$$

удается вычислить точно. Разрешая уравнение (3.46) относительно k , видим, что во внутреннем интеграле подынтегральное выражение имеет два полюса в точках

$$k_{\pm} = \pm \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}. \quad (3.48)$$

Оставим корень k_+ , который определяет поведение функции Грина в области $x > 0$. Получим

$$G(x, t) = \frac{iv}{4\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{e^{i(x\sqrt{\omega^2+\varepsilon^2}/v-\omega t)}}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}} d\omega. \quad (3.49)$$

Следовательно, имеются две точки ветвления $\omega = \pm i\varepsilon$. Контур интегрирования в плоскости ω сдвинем далеко вниз, обходя точки ветвления, как показано на рис. 3.10.

Введем новую переменную θ , для которой

$$\text{ch } \theta = \frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2/v^2}}, \quad \text{sh } \theta = \frac{x/v}{\sqrt{t^2 - x^2/v^2}},$$

а также положим $\omega = \varepsilon \text{sh } \xi$. Тогда выражение (3.49) примет вид

$$G(x, t) = \frac{iv}{4\pi} \int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} e^{i\varepsilon\sqrt{t^2-x^2/v^2} \text{sh}(\theta-\xi)} d\xi. \quad (3.50)$$

Наконец, обозначив $\xi - \theta = i\varphi$, получим

$$G(x, t) = -\frac{v}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\varepsilon\sqrt{t^2-x^2/v^2} \sin \varphi} d\varphi. \quad (3.51)$$

Интеграл (3.51) можно вычислить с помощью интегрального представления для модифицированной функции Бесселя:

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{z \sin \varphi} d\varphi.$$

Таким образом, получаем

$$G(x, t) \sim \begin{cases} I_0(\varepsilon\sqrt{t^2 - x^2/v^2}), & x^2 < v^2 t^2 \\ 0, & x^2 > v^2 t^2 \end{cases} \quad (3.52)$$

Как известно, при больших значениях аргумента модифицированная функция Бесселя имеет асимптотику $I_0(z) \approx e^z / \sqrt{2\pi z}$. Следовательно, в фиксированной точке $x = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$

$$G(x, t) \sim I_0(\varepsilon t) \sim \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{2\pi\varepsilon t}}, \quad (3.53)$$

т.е. неустойчивость абсолютная.

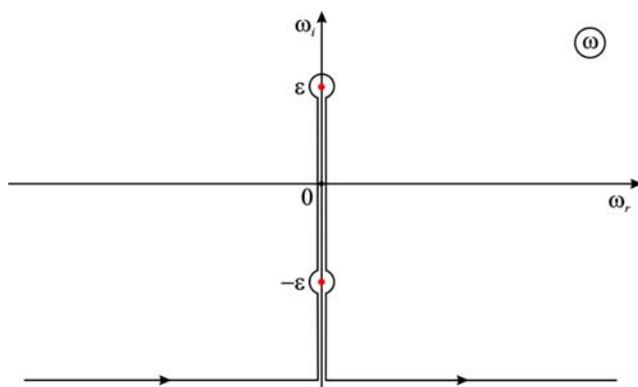


Рис. 3.10. Контур интегрирования в ω -плоскости

Теперь сделаем замену

$$x \rightarrow x - vt, \quad V = 2v,$$

что эквивалентно переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью v . Дисперсионное соотношение (3.46) принимает вид⁹

$$\omega(\omega + kV) = -\varepsilon^2,$$

а выражение в аргументе функции Бесселя преобразуется следующим

образом:

$$t^2 - \frac{x^2}{v^2} \rightarrow t^2 - \frac{(x - vt)^2}{v^2} = \frac{4(Vt - x)x}{V^2}.$$

В итоге функция Грина (3.52) принимает вид

$$G(x, t) = I_0\left(\frac{2\varepsilon}{V}\sqrt{x(Vt - x)}\right) \text{ при } 0 < x < Vt.$$

В фиксированной точке x при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$G(x, t) \sim I_0\left(\frac{2\varepsilon}{V}\sqrt{Vxt}\right) \sim \frac{e^{2\varepsilon\sqrt{xt/V}}}{t^{1/4}}.$$

Таким образом, возмущение нарастает, хотя и по более медленному закону, чем при абсолютной неустойчивости (3.53). Это своего рода пограничный случай между абсолютной и конвективной неустойчивостью.

⁹ Дисперсионное соотношение такого вида возникает, например, в теории квантового усилителя, где электромагнитная волна распространяется в среде из неподвижных квантовых осцилляторов, находящихся в возбужденном состоянии (глава 4), а также при взаимодействии электронного потока с цепочкой несвязанных осцилляторов (резонаторов) [46].

§ 3.8. Неустойчивость при взаимодействии электронного потока с электромагнитной волной вблизи границы полосы пропускания

В §§ 3.2, 3.3 было получено дисперсионное соотношение (3.15) для электронного потока, взаимодействующего с электромагнитной волной, и проанализированы дисперсионные характеристики в окрестности точек синхронизма с одной из волн пространственного заряда. Очевидно, что отдельного рассмотрения заслуживает случай синхронизма в окрестности критической частоты (границы полосы пропускания), где групповая скорость обращается в нуль. Пусть ω_0, k_0 — критические частота и волновое число. Дисперсионная характеристика периодической замедляющей системы в окрестности этой точки имеет вид

$$\omega_s(k) \approx \omega_0 \pm \frac{\omega_s''(k-k_0)^2}{2} + \dots, \quad (3.54)$$

где $\omega_s'' = d^2\omega_s(k_0)/dk^2$, знаки « \pm » соответствуют нижней/верхней границе. Саму величину ω_s'' будем считать положительной.

Повторяя выкладки, описанные в § 3.2, запишем приближенное дисперсионное соотношение для синхронизма с медленной ВПЗ (ср. (3.17))

$$(\omega - kv_0 + \omega_p) \left(\omega - \omega_0 \pm \frac{\omega_s''(k-k_0)^2}{2} \right) = -\frac{\omega_0^3 C^3}{2\omega_p} = -\varepsilon^2 \quad (3.55)$$

Введем нормированные переменные

$$\Omega = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon^{4/3}} \sqrt[3]{\frac{2v_0^2}{\omega_s''}}, \quad K = \frac{k - k_0}{\varepsilon^{2/3}} \sqrt[3]{\frac{\omega_s'' v_0}{2}}$$

и безразмерный параметр

$$B = \frac{k_0 v_0 - \omega_0 - \omega_p}{\varepsilon^{2/3}} \sqrt[3]{\frac{\omega_s''}{2v_0^2}}.$$

В этих обозначениях уравнение (3.55) примет вид

$$\left(\left(\frac{\varepsilon \omega_s''}{2v_0^2} \right)^{2/3} \Omega - K - B \right) (\Omega \pm K^2) = -1. \quad (3.56)$$

Поскольку параметр ε полагается малым, членом порядка $\varepsilon^{2/3}\Omega$ можно пренебречь. В итоге получаем универсальный вид дисперсионного соотношения для взаимодействия волн вблизи границы полосы пропускания

$$(\Omega \pm K^2)(K + B) = 1. \quad (3.57)$$

Далее для определенности будем рассматривать взаимодействие вблизи верхней границы полосы пропускания (знак «+»). На рис. 3.11 показано расположение дисперсионных характеристик ЭМВ и медленной ВПЗ при различных значениях параметра B .¹⁰

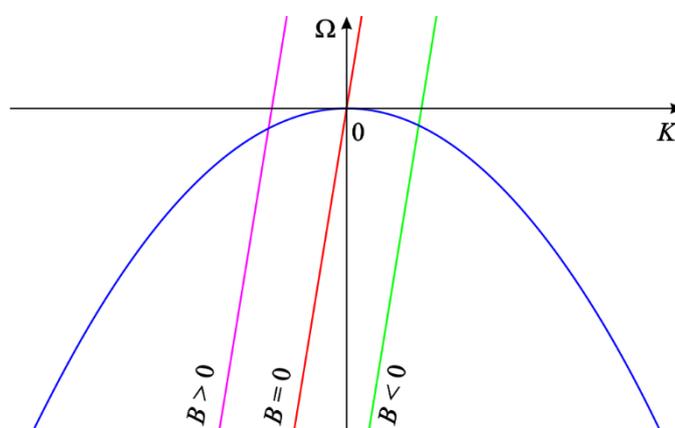


Рис. 3.11. Дисперсионные характеристики электромагнитной волны и электронного пучка при различных значениях параметра B (качественно).

Для выяснения характера неустойчивости применим критерий, основанный на методе перевала (§ 1.2.1). Разрешив уравнение (3.57) относительно Ω и продифференцировав полученное соотношение, находим

$$\frac{d\Omega}{dK} = -2K - \frac{1}{(K + B)^2} \quad (3.58)$$

Следовательно, точка перевала удовлетворяет уравнению

$$2K_s(K_s + B)^2 = -1. \quad (3.59)$$

Легко убедиться, что это уравнение имеет комплексно сопряженные корни при $B < 3/2$. При уменьшении B точки K_s на комплексной плоскости движутся,

¹⁰ Строго говоря, в рамках сделанных приближений характеристики ВПЗ должны представлять собой вертикальные прямые $K = -B$. Однако для наглядности на рис. 3.11 они несколько наклонены вправо, как если бы мы сохранили член $\sim \varepsilon^{2/3}\Omega$ в (3.56).

как показано на рис. 3.12,а. Имеются две точки перевала, одна из которых лежит в верхней полуплоскости, другая — в нижней. Контур интегрирования должен проходить через точку, лежащую в нижней полуплоскости (так как для этой точки $\text{Im}\Omega > 0$), по линии наискорейшего спуска, обходя при этом особую точку $K = -B$, как показано на рис. 3.12,б.

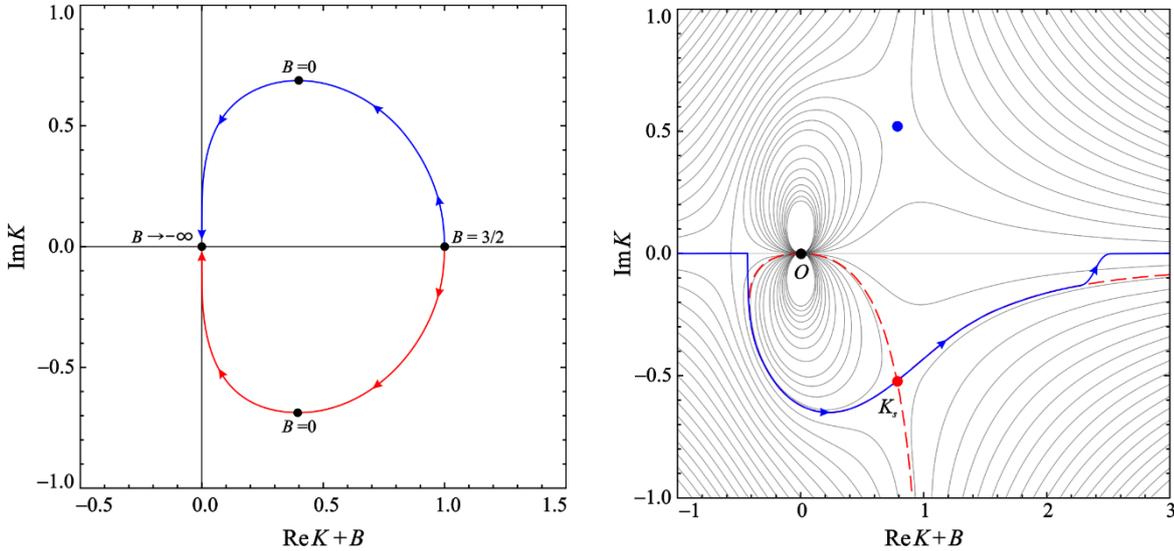


Рис. 3.12. а — положение точек перевала в комплексной K -плоскости; б — линии уровня функции $\text{Im}\Omega(K)$ и контур интегрирования при $B=1$. O — особая точка. Пунктиром показана линия $\text{Im}\Omega(K) = \text{Im}\Omega(K_s)$

Итак, при $B < 3/2$ имеется точка перевала, в которой $\text{Im}\Omega(K_s) > 0$. Следовательно, неустойчивость является абсолютной. При $B > 3/2$ неустойчивость становится конвективной. Обратим внимание, что абсолютная неустойчивость возникает при положительных B , когда точка синхронизма ещё лежит на ветви дисперсионной характеристики, отвечающей попутной волне (см. рис. 3.11).

При взаимодействии в окрестности низкочастотной границы ситуация является полностью аналогичной (с точностью до смены знака). Неустойчивость будет абсолютной при $B > -3/2$.

Более сложная ситуация реализуется при конечном пространственном заряде, когда двухволновое приближение уже не справедливо. Дисперсионное соотношение для этого случая имеет вид (ср. (3.31))

$$(\Omega \pm K^2) \left[(K + B)^2 - q \right] = 1, \quad (3.60)$$

где q — параметр пространственного заряда. Анализ этого дисперсионного соотношения при пренебрежимо малом пространственном заряде был дан в работе [47], а при конечном q — в [48]. Отметим, что эквивалентность поведения вблизи высоко- и низкочастотной границ нарушается. В частности, при $q = 0$ условие абсолютной неустойчивости имеет вид $B < 4/\sqrt[4]{27}$ для синхронизма вблизи высокочастотной границы и $B > 0$ — для низкочастотной.

§ 3.9. Разделение усиления и непропускания. Критерий Бриггса

В заключение рассмотрим вопрос о том, как различить случаи непропускания и пространственного усиления при конвективной неустойчивости. Как было отмечено в § 3.3, и в том, и в другом случае дисперсионное соотношение имеет комплексно сопряженные корни $k(\omega)$ при вещественных ω . Для систем гиперболического типа для отличить усиление от непропускания можно по направлению групповых скоростей. Однако в более сложных ситуациях этого недостаточно.

Рассмотрим случай, когда имеется конвективная неустойчивость. Если поместить в точку $x = 0$ источник сигнала с частотой ω , то волна, распространяющаяся от источника в положительном направлении, очевидно, будет нарастать как $\exp(-\text{Im } k(\omega)x)$. Однако необходимо рассмотреть, как происходит установление колебаний с течением времени. Качественно эту ситуацию иллюстрирует рис. 3.13. Видно, что в точке $x > 0$, расположенной достаточно далеко от источника, поле нарастает во времени, но затухает в пространстве! Если же рассмотреть случай непропускания, когда волна от источника затухает, распространяясь справа налево, будем наблюдать противоположную картину. Поле в фиксированной точке $x < 0$ будет нарастать как во времени, так и в положительном направлении x .

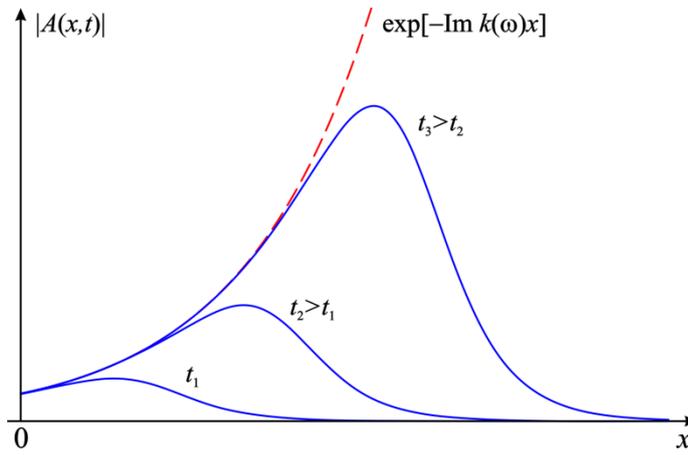


Рис. 3.13. Установление усиливающейся волны при конвективной неустойчивости

Основываясь на этом наблюдении, можно сформулировать достаточно простой критерий разделения усиления и непропускания, предложенный Бриггсом (более строгое обоснование можно найти в [5]). Пусть при вещественном ω дисперсионное соотношение имеет комплексный корень $k(\omega)$. Если при изменении $\text{Im } \omega$ от ∞ до 0 пространственный инкремент $\text{Im } k$ меняет знак, то имеет место конвективная неустойчивость, а в противном случае — непропускание.

Проверим этот критерий на примерах, рассмотренных в § 3.3. При взаимодействии попутных волн с энергиями разных знаков корень дисперсионного соотношения определяется выражением (3.22)

$$k(\omega) = \frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2} \omega - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{4\varepsilon^2}{v_1v_2} - \frac{(v_1 - v_2)^2 \omega^2}{v_1^2v_2^2}}. \quad (3.61)$$

Из двух комплексно сопряженных корней мы оставили тот, который соответствует волне, нарастающей в положительном направлении. Без ограничения общности будем считать, что $v_1 > v_2$.

Для простоты возьмем $\text{Re } \omega = 0$, так как пространственный инкремент при этом максимален. Тогда из соотношения (3.61) при $\text{Im } \omega = 0$ имеем

$$\text{Im } k = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{v_1v_2}} < 0. \quad (3.62)$$

Напротив, при $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ имеем

$$\operatorname{Im} k \approx \frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2} \operatorname{Im} \omega - \frac{v_1 - v_2}{2v_1v_2} \operatorname{Im} \omega = \frac{\operatorname{Im} \omega}{v_1} > 0.$$

Происходит смена знака, следовательно, это конвективная неустойчивость.

Теперь рассмотрим взаимодействие встречных волн с энергией одного знака. Соответствующий корень дисперсионного соотношения есть

$$k(\omega) = \frac{v_2 - v_1}{2v_1v_2} \omega - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{4\varepsilon^2}{v_1v_2} - \frac{(v_1 + v_2)^2 \omega^2}{v_1^2 v_2^2}}. \quad (3.63)$$

При $\operatorname{Im} \omega = 0$ снова получим выражение (3.62), тогда как при $\operatorname{Im} \omega \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\operatorname{Im} k \approx \frac{v_2 - v_1}{2v_1v_2} \operatorname{Im} \omega - \frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2} \operatorname{Im} \omega = -\frac{\operatorname{Im} \omega}{v_2} < 0.$$

Поскольку знак $\operatorname{Im} k$ не меняется, в данном случае имеет место непропускание.

ГЛАВА 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ СО СРЕДОЙ ИЗ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЧАСТИЦ

4.1. Двухуровневая среда

В квантовой электронике активная среда представляет собой ансамбль квантовых частиц, в котором создается инверсная населённость одной или нескольких пар энергетических уровней, между которыми разрешён квантовый переход. В этом случае процессы вынужденного излучения преобладают над процессами поглощения и падающая на среду электромагнитная волна с частотой, равной частоте квантового перехода, усиливается. Простейшей моделью такой среды является среда из двухуровневых частиц. Прежде всего, отметим, что такая среда является сильно нелинейной. Действительно, из квантовой механики известно [49], что спектр энергетических уровней гармонического осциллятора является эквидистантным: частоты переходов между любыми соседними уровнями одинаковы. У нелинейного (ангармонического) осциллятора спектр, как правило, неэквидистантный. В случае, когда частоты переходов отличаются столь сильно, что частота падающей на среду электромагнитной волны находится в резонансе лишь с одной из частот (рис. 4.1), можно ограничиться приближением двухуровневой системы.

Пусть частота когерентного электромагнитного излучения близка к частоте перехода между уровнями 1 и 2: $\omega \approx \omega_1 - \omega_2 = (E_1 - E_2)/\hbar$, где \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π , и пусть $\psi_{1,2}(\mathbf{r})$ — волновые функции, соответствующие стационарным состояниям с энергиями $E_{1,2}$. Они удовлетворяют стационарному уравнению Шрёдингера

$$\hat{H}_0 \psi_i = E_i \psi_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан атома. Зависящую от времени волновую функцию можно представить в виде суперпозиции этих состояний как

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a_1(t)\psi_1(\mathbf{r})e^{-i\omega_1 t} + a_2(t)\psi_2(\mathbf{r})e^{-i\omega_2 t}, \quad (4.2)$$

где $a_{1,2}$ — заселенности уровней. Они удовлетворяют условию нормировки

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1.$$

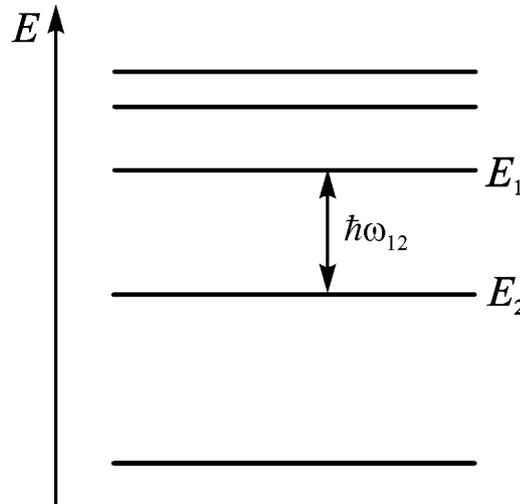


Рис. 4.1. Энергетический спектр ангармонического квантового осциллятора. Частота падающего электромагнитного излучения близка к частоте перехода ω_{12} .

Волновая функция (4.2) подчиняется нестационарному уравнению Шрёдингера

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (4.3)$$

где $\hat{H} = \hat{H}_0 - \mathbf{d}\mathbf{E}$ — гамильтониан атома, взаимодействующего с электромагнитным полем, \mathbf{E} — напряженность поля, $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ — дипольный момент атома. Далее будем предполагать векторы \mathbf{E} и \mathbf{d} параллельными.

Подставляя волновую функцию (4.2) в уравнение (4.3) с учетом соотношений (4.1), будем иметь

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} \psi_1 e^{-i\omega_1 t} + i\hbar \frac{da_2}{dt} \psi_2 e^{-i\omega_2 t} = -a_1 dE \psi_1 e^{-i\omega_1 t} - a_2 dE \psi_2 e^{-i\omega_2 t}.$$

Умножая это уравнение на $\psi_1^* \exp(i\omega_1 t)$ и интегрируя по всему пространству с использованием свойства ортогональности собственных функций стационарного уравнения Шрёдингера

$$\int \psi_i \psi_j^* dV = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

получим

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = ea_1 \int \psi_1 r E \psi_1^* dV + ea_2 e^{i\omega_{12}t} \int \psi_2 r E \psi_1^* dV,$$

где $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$.

Поле E в этом выражении, вообще говоря, зависит от координат. Однако на столь малых масштабах, как размеры одного атома, этой зависимостью можно пренебречь и вынести E за знак интеграла. Получим

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -a_1 d_{11} E - a_2 d_{12} E e^{i\omega_{12}t}, \quad (4.4)$$

где

$$d_{ij} = -e \int \psi_j r \psi_i^* dV$$

— матричные элементы оператора дипольного момента.

Считаем, что у атома отсутствует постоянный дипольный момент, т.е.

$d_{11} = d_{22} = 0$, и что $d_{12} = d_{21}^*$. Уравнение (4.4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{id_{12}a_2 E}{\hbar} e^{i\omega_{12}t}. \quad (4.5)$$

Аналогично можно получить уравнение для a_2 в следующем виде:

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{id_{21}a_1 E}{\hbar} e^{-i\omega_{12}t}. \quad (4.6)$$

Будем считать, что поле E меняется во времени гармонически

$$E = \frac{E_0 e^{-i\omega t} + \text{к.с.}}{2},$$

причем его частота близка к частоте перехода, $\Delta\omega = \omega_{12} - \omega \ll \omega_{12}$. Величину

E_0 без ограничения общности можно считать вещественной. Тогда уравнение

(4.5) принимает вид

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{id_{12}a_2}{2\hbar} \left(E_0 e^{i\Delta\omega t} + E_0 e^{i(2\omega_{12} - \Delta\omega)t} \right).$$

Опуская в этом уравнении быстро меняющееся слагаемое и проделывая аналогичные преобразования с уравнением (4.6), получим

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dt} &= \frac{id_{12}E_0}{2\hbar} a_2 e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{da_2}{dt} &= \frac{id_{12}^*E_0}{2\hbar} a_1 e^{-i\Delta\omega t}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Введем вместо $a_{1,2}$ новые переменные $c_{1,2}$ такие, что $a_1 = c_1 e^{i\Delta\omega t/2}$, $a_2 = c_2 e^{-i\Delta\omega t/2}$, и придем к системе уравнений, в которых отсутствует явная зависимость от времени:

$$\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt} + i\frac{\Delta\omega}{2}c_1 &= \frac{id_{12}E_0}{2\hbar}c_2, \\ \frac{dc_2}{dt} - i\frac{\Delta\omega}{2}c_2 &= \frac{id_{12}^*E_0}{2\hbar}c_1.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Если искать решение (4.8) в виде $c_{1,2} \sim \exp(-i\delta\omega t)$, придем к характеристическому уравнению

$$\delta\omega^2 = \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \frac{|d_{12}|^2 E_0^2}{4\hbar^2},$$

откуда находим собственные частоты

$$\delta\omega = \pm \frac{\sqrt{\Delta\omega^2 + \Omega^2}}{2},$$

где

$$\Omega^2 = \frac{|d_{12}|^2 E_0^2}{\hbar^2}.$$

Пусть, например, в начальный момент времени $c_2(0) = 1$, $c_1(0) = 0$, т.е. заселен только нижний уровень. Соответствующим решениям уравнений (4.8) можно придать вид

$$\begin{aligned}|c_1|^2 &= \frac{\Omega^2}{\Delta\omega^2 + \Omega^2} \sin^2\left(\sqrt{\Delta\omega^2 + \Omega^2} t/2\right), \\ |c_2|^2 &= \frac{\Delta\omega^2 + \Omega^2 \cos^2\left(\sqrt{\Delta\omega^2 + \Omega^2} t/2\right)}{\Delta\omega^2 + \Omega^2},\end{aligned}\tag{4.9}$$

Таким образом, населенности уровней гармонически осциллируют (так называемые *осцилляции Раби*), величина Ω называется частотой Раби. Как видно из соотношений (4.9), населенность верхнего уровня может достигать заметных величин только если $\Delta\omega \ll \Omega$, т.е. частота падающего излучения достаточно близка к резонансной.

4.2. Уравнения Максвелла–Блоха

Преобразуем уравнения, полученные в предыдущем разделе, к виду, более удобному для дальнейшего исследования. Подсчитаем поляризацию атома

$$p = -e \int \psi r \psi^* dV.$$

Подставляя сюда выражение для волновой функции (4.2), после несложных вычислений находим, что

$$p = p_0 \left(c_1 c_2^* e^{-i(\omega_{12}t + \phi)} + c_1^* c_2 e^{i(\omega_{12}t + \phi)} \right), \quad (4.10)$$

где $p_0 = |d_{12}|$, $\phi = \arg(d_{12})$. Введем *огibaющие поляризации*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= c_1 c_2^* e^{-i\phi} + c_1^* c_2 e^{i\phi}, \\ \mathcal{J} &= i \left(c_1 c_2^* e^{-i\phi} - c_1^* c_2 e^{i\phi} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

В этих обозначениях выражение для поляризации (4.10) принимает вид

$$p = p_0 \left(\mathcal{I} \cos \omega_{12}t + \mathcal{J} \sin \omega_{12}t \right), \quad (4.12)$$

а из уравнений (4.8) можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{I}} &= -\Delta\omega \mathcal{J}, \\ \dot{\mathcal{J}} &= \Delta\omega \mathcal{I} + \frac{p_0 E_0}{\hbar} \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\mathcal{N} = |c_1|^2 - |c_2|^2$ — разность населенностей. Также нетрудно найти, что

$$\dot{\mathcal{N}} = -\frac{p_0 E_0}{\hbar} \mathcal{J}. \quad (4.14)$$

Уравнения (4.13), (4.14) носят название *уравнений Блоха*.

Умножим первое из уравнений (4.13) на \mathcal{I} , второе на \mathcal{J} и сложим, что дает

$$\mathcal{I}\dot{\mathcal{I}} + \mathcal{J}\dot{\mathcal{J}} = \frac{p_0 E_0}{\hbar} \mathcal{J}\mathcal{N}. \quad (4.15)$$

Умножим теперь (4.14) на \mathcal{N} и сложим полученное уравнение с (4.15). Получим

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{I}^2 + \mathcal{J}^2 + \mathcal{N}^2) = 0$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия нормировки волновой функции $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, получаем закон сохранения

$$\mathcal{I}^2 + \mathcal{J}^2 + \mathcal{N}^2 = 1. \quad (4.16)$$

Более строго, в уравнения (4.13), (4.14) следует добавить слагаемые, ответственные за релаксацию, т.е. за спонтанные переходы системы из верхнего энергетического состояния в нижнее:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{I}} &= -\mathcal{I}/\tau_1 - \Delta\omega\mathcal{J}, \\ \dot{\mathcal{J}} &= -\mathcal{J}/\tau_1 + \Delta\omega\mathcal{I} + \frac{p_0 E_0}{\hbar} \mathcal{N}, \\ \dot{\mathcal{N}} &= -\frac{\mathcal{N} - \mathcal{N}_0}{\tau_2} - \frac{p_0 E_0}{\hbar} \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\tau_{1,2}$ — характерные времена релаксации, \mathcal{N}_0 — равновесное значение разности населенностей (если считать, что в равновесном состоянии заселен только нижний уровень, то $\mathcal{N}_0 = -1$). При этом закон сохранения (4.16) уже не выполняется. Однако далее будем рассматривать ситуацию, когда оптическое излучение представляет собой ультракороткий импульс, характерная длительность которого много меньше времен $\tau_{1,2}$, так что релаксацией можно пренебречь. Это приближение справедливо, если продолжительность импульса порядка 1 нс и менее. С другой стороны, длительность такого импульса всё еще значительно больше периода оптической волны, так что волну вполне можно считать квазигармонической.

Итак, рассмотрим распространение ультракороткого оптического импульса в двухуровневой среде. Считая задачу одномерной, запишем для электромагнитного поля волновое уравнение Максвелла

$$E_{tt} - c^2 E_{xx} = -\epsilon_0^{-1} P_{tt}, \quad (4.18)$$

где P — макроскопическая поляризация. Такое описание, когда среда описывается квантово-механическими уравнениями, а поле — уравнениями классической электродинамики, называется полуклассическим или квазиклассическим.

Рассмотрим поле E в виде квазигармонической волны с медленно меняющимися амплитудой \mathcal{E} и фазой φ , т.е.

$$E = \mathcal{E}(x, t) \cos(kx - \omega t + \varphi(x, t)), \quad (4.19)$$

причем $k = \omega/c$, а частота равна частоте перехода $\omega = \omega_{12}$.

Частицы (атомы), из которых состоит среда, вообще говоря, совершают случайные тепловые движения. Если атом движется с некоторой скоростью v , то за счет эффекта Доплера резонансная частота приобретает сдвиг на величину $\Delta\omega = kv$. Будем характеризовать скоростной разброс частиц функцией распределения $g(\Delta\omega)$, на которую наложим условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = 1.$$

Тогда для макроскопической поляризации можно записать следующее выражение:

$$P(x, t) = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) p(\Delta\omega, x, t) d(\Delta\omega), \quad (4.20)$$

где n_0 — среднее число атомов в единице объема, а p — поляризация отдельных атомов. Таким образом, несмотря на то, что частоты перехода всех атомов

одинаковы, спектральная линия излучения будет иметь конечную ширину. Это явление называется *неоднородным уширением*.¹¹

В системе отсчета, связанной с атомом, выражение для поля (4.19) принимает вид

$$E = \mathcal{E}(x, t) \cos [k(x + vt) - \omega_{12}t + \varphi(x, t)] = \mathcal{E}(x, t) \cos [\Phi(x, t) + \Delta\omega t], \quad (4.21)$$

где $\Phi(x, t) = kx - \omega_{12}t + \varphi(x, t)$. Здесь мы пренебрегли сдвигом частоты у медленно меняющихся величин \mathcal{E} и φ . Выражение (4.12), которое определяет поляризацию атома, переписывается в виде

$$p(\Delta\omega, x, t) = p_0 (\mathcal{I}(\Delta\omega, x, t) \cos \Phi(x, t) + \mathcal{J}(\Delta\omega, x, t) \sin \Phi(x, t)). \quad (4.22)$$

Огибающие поляризации подчиняются уравнениям Блоха (4.13), (4.14), которые с учетом введенных обозначений примут вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t &= -(\Delta\omega + \varphi_t) \mathcal{J}, \\ \mathcal{J}_t &= (\Delta\omega + \varphi_t) \mathcal{I} + \frac{P_0}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}, \\ \mathcal{N}_t &= -\frac{P_0}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Подставим выражения (4.19), (4.20) и (4.22) в уравнение Максвелла (4.18). Пренебрегая вторыми производными от медленно меняющихся величин \mathcal{E} и φ , а также произведениями $\mathcal{E}_t \varphi_t$ и т.д., получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t + c\mathcal{E}_x &= \frac{\omega_{12}n_0P_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) \mathcal{J}(\Delta\omega, x, t) d(\Delta\omega), \\ (\varphi_t + c\varphi_x) \mathcal{E} &= \frac{\omega_{12}n_0P_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) \mathcal{I}(\Delta\omega, x, t) d(\Delta\omega). \end{aligned} \quad (4.24)$$

При этом мы также пренебрегли производными от медленно меняющихся функций \mathcal{I}, \mathcal{J} в правой части. Систему (4.24) можно также переписать в виде одного комплексного уравнения

¹¹ В отличие от однородного уширения, которое обусловлено конечным временем жизни возбужденного состояния (релаксационные слагаемые в уравнениях (4.17)).

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)(\mathcal{E}e^{i\varphi}) = \frac{\omega_{12}n_0P_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) [\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t) + i\mathcal{I}(\Delta\omega, x, t)] e^{i\varphi} d(\Delta\omega).$$

Итак, мы получили полуклассическую систему *уравнений Максвелла–Блоха* (4.23), (4.24), которая описывает взаимодействие ультракороткого импульса с двухуровневой средой. Более строгий вывод этих уравнений при помощи метода многих масштабов можно найти в [50]. Отметим, что они интегрируются при помощи метода обратной задачи рассеяния и имеют точные решения в виде солитонов [50-53], которые будут рассмотрены в следующем разделе.

4.3. Самоиндуцированная прозрачность

Явление *самоиндуцированной прозрачности* (self-induced transparency), открытое в 1967 г. С. МакКоллом и Э. Ханом [54,55], заключается в следующем. Рассмотрим ультракороткий оптический импульс, распространяющийся в среде из двухуровневых частиц, находящихся в нижнем (невозбужденном) энергетическом состоянии. В случае резонанса, когда несущая частота электромагнитной волны близка к частоте перехода, частицы начинают поглощать энергию поля и переходят в верхнее состояние. Передний фронт импульса при этом ослабляется. Однако задний фронт распространяется в среде, которая уже находится в возбужденном состоянии. Взаимодействие импульса с частицами среды вызывает переходы с верхнего уровня на нижний, сопровождающиеся излучением (рис. 4.2). Соответствующие участки профиля волны начинают усиливаться. В результате импульс принимает равновесную солитоноподобную форму и распространяется с постоянной скоростью.

Заметим, что полученные в предыдущем разделе уравнения Максвелла–Блоха можно существенно упростить в случае, когда функция распределения g является симметричной, а огибающая поляризации \mathcal{I} — антисимметричной функцией $\Delta\omega$ [54,55]. При этом интеграл в правой части второго уравнения

(4.24) равен нулю и фазу φ можно считать постоянной. В итоге уравнения (4.23), (4.24) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t &= -\Delta\omega\mathcal{J}, \\ \mathcal{J}_t &= \Delta\omega\mathcal{I} + \frac{P_0}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{N}, \\ \mathcal{N}_t &= -\frac{P_0}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{J}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{E}_t + c\mathcal{E}_x = \frac{\omega_{12}n_0P_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega)\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t)d(\Delta\omega). \quad (4.26)$$

Это так называемые *редуцированные* уравнения Максвелла–Блоха.

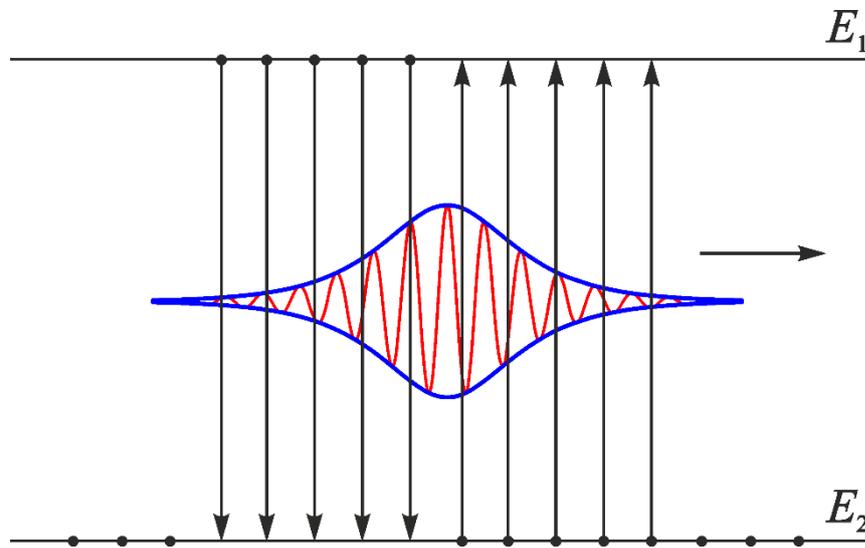


Рис. 4.2. К объяснению эффекта самоиндуцированной прозрачности

Проинтегрировав уравнение (4.26) по времени, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) - \mathcal{E}(x, -\infty) + c\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(x, t')dt' &= \\ = \frac{\omega_{12}n_0P_0}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t g(\Delta\omega)\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t')dt'd(\Delta\omega). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Исключим из уравнений (4.25) функцию \mathcal{I} , что дает

$$\mathcal{J}_{tt} + \Delta\omega^2\mathcal{J} = \frac{P_0}{\hbar}(\mathcal{E}\mathcal{N})_t.$$

Решение этого уравнения можно выразить с помощью функции Грина (см., например, [1]):

$$\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t) = \frac{p_0}{\hbar} \int_{-\infty}^t \frac{\partial(\mathcal{E}(x, t') \mathcal{N}(\Delta\omega, x, t'))}{\partial t'} \cdot \frac{\sin(\Delta\omega(t-t'))}{\Delta\omega} \cdot dt'.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t) = \frac{p_0}{\hbar} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(x, t') \mathcal{N}(\Delta\omega, x, t') \cos(\Delta\omega(t-t')) dt'.$$

Здесь учтено, что, поскольку мы рассматриваем распространение короткого импульса, можно положить $\mathcal{E}(x, \pm\infty) = 0$. Подставляя это выражение в (4.27) и

меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) + c \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(x, t') dt' = \\ = -\frac{\omega_{12} n_0 p_0^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \left(\int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} \mathcal{E}(x, t') \mathcal{N}(\Delta\omega, x, t') \cos(\Delta\omega\tau) d\tau dt' \right). \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\tau = t - t'$. С учетом того, что

$$\int_0^{\infty} \cos \Delta\omega\tau d\tau = \pi\delta(\Delta\omega),$$

где $\delta(\Delta\omega)$ — дельта-функция Дирака, получим

$$\mathcal{E}(x, t) + c \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(x, t') dt' = -\frac{\pi\omega_{12} n_0 p_0^2 g(0)}{2\varepsilon_0 \hbar} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(x, t') \mathcal{N}(0, x, t') dt'.$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $t \rightarrow \infty$, что дает

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\pi\omega_{12} n_0 p_0^3}{2\varepsilon_0 c \hbar^2} g(0) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) \mathcal{N}(0, x, t) dt, \quad (4.28)$$

где

$$\theta(x) = \frac{p_0}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) dt \quad (4.29)$$

— так называемая площадь импульса.

Обратим внимание, что в случае точного резонанса ($\Delta\omega = 0$) из уравнений (4.25) следует закон сохранения (ср. (4.16))

$$\mathcal{J}^2 + \mathcal{N}^2 = 1. \quad (4.30)$$

Тогда можно ввести такую функцию $\sigma(x, t)$, что

$$\mathcal{J} = \pm \sin \sigma(x, t), \quad \mathcal{N} = \pm \cos \sigma(x, t). \quad (4.31)$$

Здесь верхний знак соответствует усиливающей (инвертированной), а нижний — поглощающей (неинвертированной) среде. Также из третьего уравнения (4.25) имеем

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{p_0} \sigma_t(x, t) \quad (4.32)$$

или

$$\sigma(x, t) = \frac{p_0}{\hbar} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(x, t') dt'. \quad (4.33)$$

С учетом формул (4.31), (4.32) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) \mathcal{N}(0, x, t) dt = \pm \frac{\hbar}{p_0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_t \cos \sigma dt = \pm \frac{\hbar}{p_0} \sin \theta.$$

Таким образом, уравнение (4.28) окончательно принимает вид

$$\frac{d\theta}{dx} = \pm \frac{\alpha}{2} \sin \theta, \quad (4.34)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi \omega_{12} n_0 p_0^2 g(0)}{\varepsilon_0 c \hbar}.$$

Знак «+» в (4.34) соответствует усиливающей среде, знак «−» — поглощающей. Поскольку в линейном пределе (4.34) переходит в $d\theta/dx = \pm(\alpha/2)\theta$, видно, что α представляет собой коэффициент поглощения (или усиления) импульса малой площади.

Пусть импульс имеет некоторую начальную площадь $\theta(x = x_0) = \theta_0$. Тогда уравнение (4.34) легко интегрируется:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \exp\left(\pm \frac{\alpha}{2}(x - x_0)\right). \quad (4.35)$$

Отсюда видно, что в поглощающей среде площадь импульса всегда стремится к $2\pi n$, а в усиливающей — к $2\pi n + \pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. МакКолл и Хан назвали этот результат *теоремой площадей* [54,55].

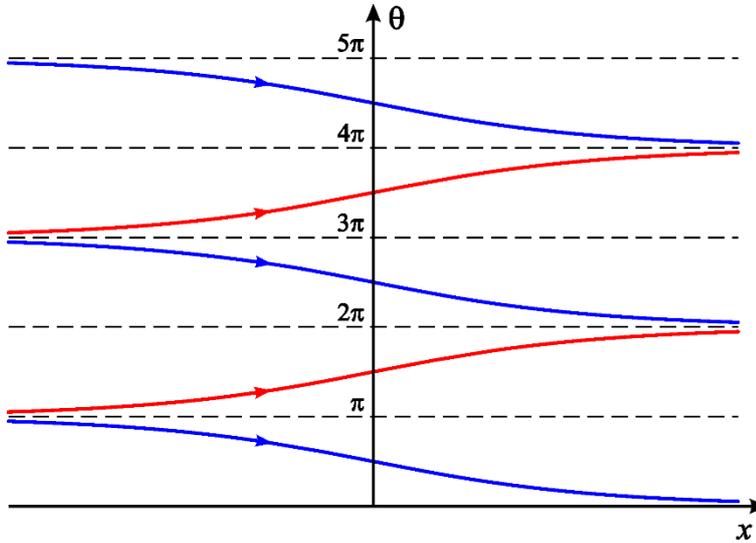


Рис. 4.3. Зависимость площади импульса от координаты в поглощающей среде.

Схематически решение уравнения (4.35) для случая поглощающей среды показано на рис. 4.3. Как видно из этого рисунка, если $\theta_0 < \pi$, площадь импульса стремится к нулю. Однако, если начальная площадь импульса несколько больше π , в процессе распространения она нарастает, стремясь к 2π . Можно показать (см., например, [50-55]), что импульс при этом превращается в солитон.

Решение в виде солитона проще всего найти, если рассмотреть редуцированные уравнения Максвелла–Блоха (4.25), (4.26), пренебрегая неоднородным уширением, для чего выберем функцию распределения в виде δ -функции Дирака, $g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega)$. При этом уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_t &= \tilde{\mathcal{E}}\mathcal{N}, \\ \mathcal{N}_t &= -\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{J}, \\ \tilde{\mathcal{E}}_t + c\tilde{\mathcal{E}}_x &= \Omega^2 \mathcal{J}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

где введены обозначения $\tilde{\mathcal{E}} = p_0 \mathcal{E} / \hbar$, $\Omega^2 = (\omega_{12} n_0 p_0^2) / (2 \varepsilon_0 \hbar)$. В этом случае можно, воспользовавшись соотношениями (4.30)-(4.32), привести систему (4.36) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma = \pm \Omega^2 \sin \sigma. \quad (4.37)$$

Мы получили так называемое уравнение Sin-Гордона — одно из наиболее известных уравнений теории нелинейных волн [3,8,32,50,51]. Его солитонные решения хорошо изучены.

Выберем в уравнении (4.37) знак « \leftarrow », что соответствует неинвертированной среде, и будем искать решения в виде стационарных волн, зависящих от бегущей координаты $\sigma(x, t) = \sigma(\tau)$, где $\tau = t - x/V$. Тогда уравнение (4.37) принимает вид

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{\Omega^2}{c/V - 1} \sin \sigma, \quad (4.38)$$

совпадающий с уравнением математического маятника [1,3,4,18]. Отсюда находим решение в виде солитона, которое соответствует движению маятника по сепаратрисе:

$$\sigma = 4 \arctan \left[\exp(\tau/\tau_p) \right], \quad (4.39)$$

где τ_p — характерная длительность импульса.

Соответственно, для амплитуды поля получаем

$$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_{\max} \operatorname{sech}(\tau/\tau_p), \quad (4.40)$$

причем амплитуда солитона $\tilde{\mathcal{E}}_{\max}$ обратно пропорциональна его длительности, $\tilde{\mathcal{E}}_{\max} = 2/\tau_p$, а скорость распространения определяется выражением

$$\frac{c}{V} = 1 + \Omega^2 \tau_p^2. \quad (4.41)$$

Таким образом, скорость солитона увеличивается с ростом его амплитуды, но всегда остается досветовой. Отметим, что уравнение (4.38) можно переписать в виде

$$\sigma_{\tau\tau} = \tau_p^{-2} \sin \sigma. \quad (4.42)$$

Нетрудно обобщить полученное решение, учитывая неоднородное уширение. Для этого в уравнениях (4.25) будем искать $\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t)$ в виде

$$\mathcal{J}(\Delta\omega, x, t) = \mathcal{J}(x, t) f(\Delta\omega),$$

где f — четная функция $\Delta\omega$, которая введена таким образом, что $f(0) = 1$.

Поскольку мы ищем решение в виде солитона, можно переписать это выражение как $\mathcal{J} = -f(\Delta\omega) \sin \sigma$. Тогда третье уравнение системы (4.25) принимает вид $\mathcal{N}_t = f(\Delta\omega) \sigma_\tau \sin \sigma$. Проинтегрировав его, получим

$$\mathcal{N} = -1 - f(\Delta\omega)(\cos \sigma - 1).$$

Теперь от системы (4.25) остаются уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\tau &= \Delta\omega f(\Delta\omega) \sin \sigma, \\ \Delta\omega \mathcal{I} &= (1 - f(\Delta\omega)) \sigma_\tau. \end{aligned}$$

Исключая из этих соотношений \mathcal{I} , найдем что

$$\frac{1 - f(\Delta\omega)}{\Delta\omega^2 f(\Delta\omega)} = \frac{\sin \sigma}{\sigma_{\tau\tau}} = \tau_p^2,$$

следовательно, $f(\Delta\omega) = 1 / (1 + \Delta\omega^2 \tau_p^2)$.

Подставив полученные результаты в уравнение (4.26), окончательно получаем

$$\frac{c}{V} = 1 + \Omega^2 \tau_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)}{1 + \Delta\omega^2 \tau_p^2}. \quad (4.43)$$

Таким образом, неоднородное уширение сказывается только на скорости солитона, но его форма не меняется. Если импульс настолько короткий, что ширина его спектра намного превышает характерную ширину функции распределения $g(\Delta\omega)$, можно считать, что $\Delta\omega^2 \tau_p^2 \ll 1$ и формула (4.43) переходит в (4.41).

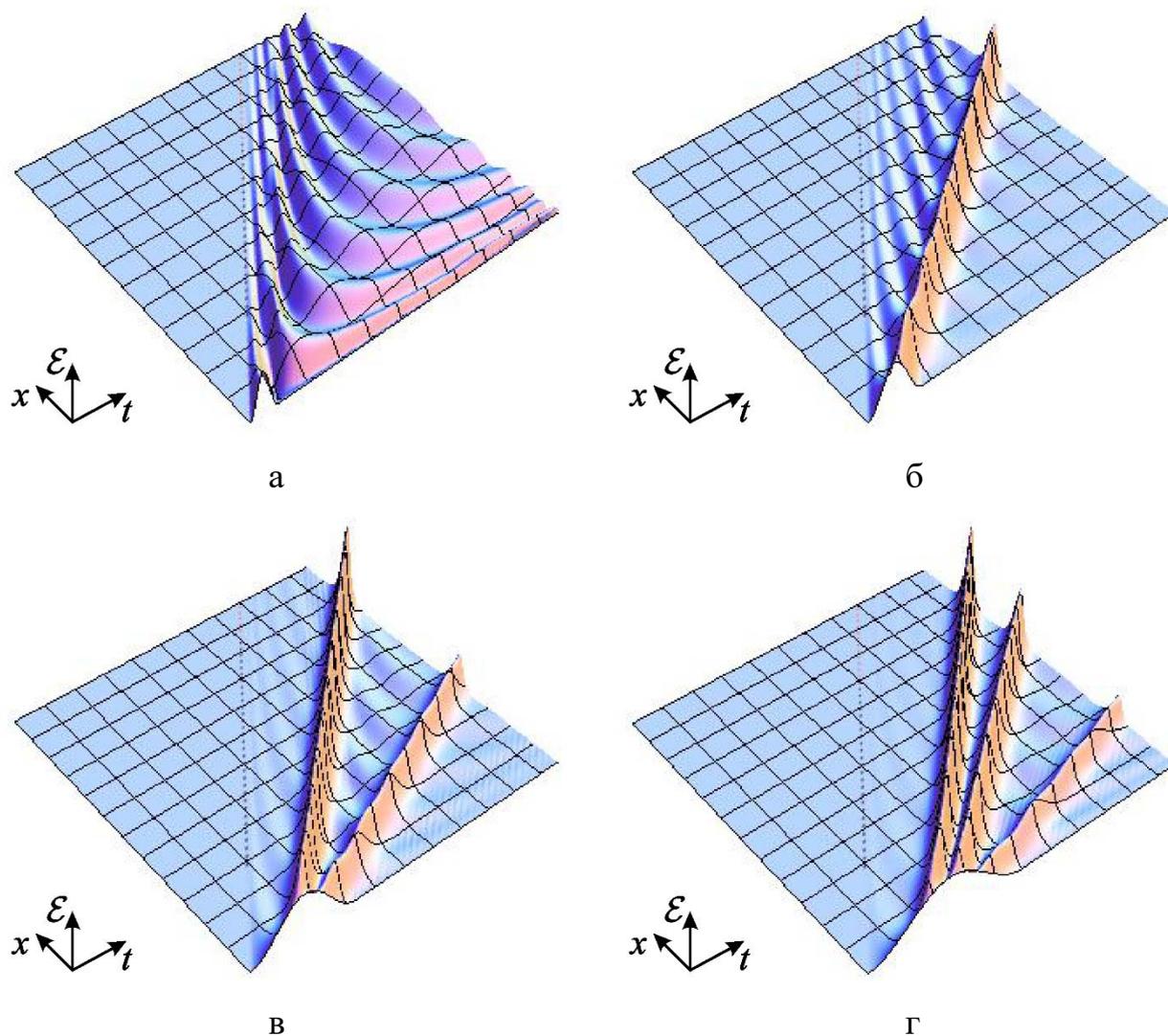


Рис. 4.4. Распространение импульсов с различной начальной площадью, иллюстрирующее затухание импульса (а) и образование одного (б), двух (в) и трех (г) солитонов.

Рис. 4.4 иллюстрирует различные режимы распространения импульса вида $\mathcal{E}(x=0, t) = \mathcal{E}_{\max} \sin^2(\pi t / \tau_p)$, $0 < t < \tau_p$. Если начальная площадь импульса $\theta_0 < \pi$, он расплывается и затухает (рис. 4.4,а). Если длительность импульса увеличивается так, что его площадь начинает превышать π , происходит образование солитона (рис. 4.4,б). Соответственно, если начальная площадь лежит в пределах $3\pi < \theta_0 < 5\pi$, образуется два солитона и т.д. (рис. 4.4,в,г).

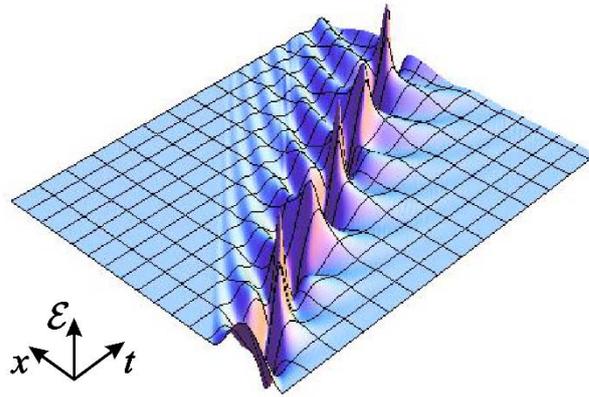


Рис. 4.5. Распространение 0-π импульса.

Заметим, что если $\theta \rightarrow 0$, это еще не означает, что импульс полностью затухает. Существуют решения в виде знакопеременных импульсов, называемые 0π-импульсами или бризерами. Бризер представляет собой связанное состояние из двух солитонов противоположной полярности, которые осциллируют друг относительно друга [3,50,51]. Распространение такого импульса иллюстрирует рис 4.5.

4.4. Распространение импульса в усилителе. Автомоделные решения

Рассматривая распространение импульса в активной (инвертированной) среде, ограничимся случаем, когда неоднородное уширение не учитывается и можно воспользоваться уравнениями (4.36). С помощью подстановки (4.31), (4.32) (при этом в (4.31) следует выбирать знак «+»), получим уравнение Син-Гордона

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma = \Omega^2 \sin \sigma. \quad (4.44)$$

Поведение импульса в усилителе можно качественно проанализировать, опираясь на теорему площадей (4.34). Для этой цели воспользуемся диаграммой, представленной на рис. 4.3, которую теперь следует читать справа налево. Как следует из этого рисунка, импульс с малой начальной площадью будет усиливаться, а его площадь будет стремиться к π . В то же время, соли-

тоны ($2\pi n$ -импульсы), которые обсуждались в предыдущем разделе, оказываются неустойчивыми (отметим, что их скорости в усилителе превышают скорость света).

Более глубокого понимания можно добиться, если заметить, что уравнение (4.44) имеет еще один важный класс точных решений, называемых *автомоделными*. Этот термин означает, что решение зависит от координаты и времени в определенной комбинации $\eta = \eta(x, t)$ [3,56-58]. Подобные решения широко изучаются в математической физике, поскольку асимптотическое поведение решения на больших временах очень часто носит автомоделный характер.

Для уравнения (4.44) автомоделную переменную можно ввести следующим образом:

$$\eta = \frac{\Omega^2 x}{c} \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (4.45)$$

При этом из (4.44) следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta \sigma'' + \sigma' - \sin \sigma = 0, \quad (4.46)$$

где штрихи означают дифференцирование по η . Любопытно, что заменой $y = \exp(i\sigma)$ оно приводится к виду

$$y'' - \frac{(y')^2}{y} + \frac{2y' - y + 1}{2\eta} = 0.$$

Это частный случай так называемого третьего уравнения Пенлеве [58], а его решение известно как третья трансцендентная функция Пенлеве.

Тем не менее, более удобно проанализировать решение уравнения (4.46) численно. Чтобы избежать сингулярности в точке $\eta = 0$, необходимо выбрать граничное условие так, чтобы $\sigma'(0) = \sin \sigma(0)$. Пример автомоделного решения приведен на рис. 4.6.

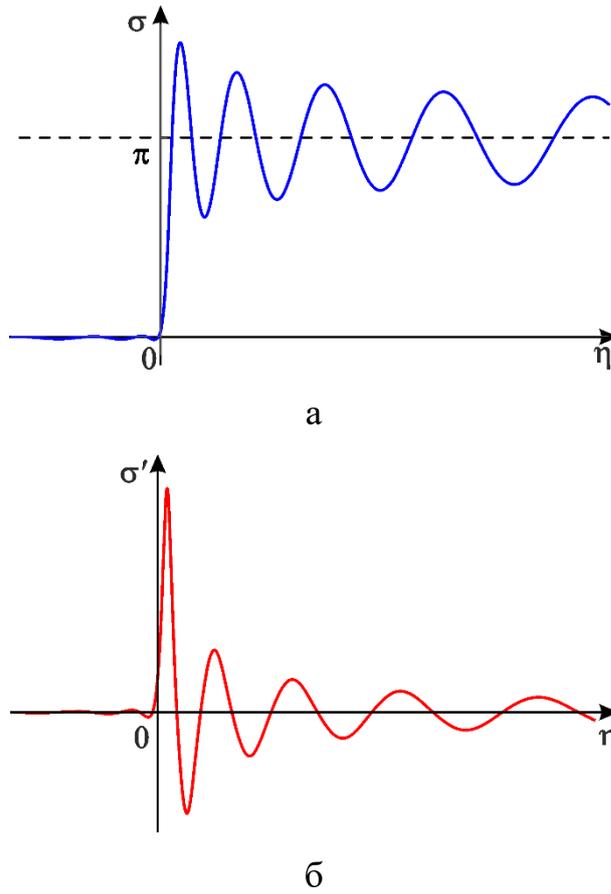


Рис. 4.6. Автомоделное решение (а) и его производная (б).

Для амплитуды электромагнитного поля, пользуясь соотношением (4.32), находим

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sigma_t = \frac{\partial \eta}{\partial t} \sigma' = \frac{\Omega^2 x}{c} \sigma'. \quad (4.47)$$

Отсюда следует, что пиковая амплитуда электромагнитного импульса линейно растет с координатой. В то же время, как видно из определения автомоделной переменной (4.45), протяженность импульса линейно сокращается. На рис. 4.7 показаны зависимости $\mathcal{E}(x)$ в различные последовательные моменты времени, полученные в результате численного решения уравнений (4.36). Импульс демонстрирует поведение, хорошо согласующееся с автомоделным решением. Также наглядно иллюстрирует распространение импульса пространственно-временная диаграмма, представлена на рис. 4.8.

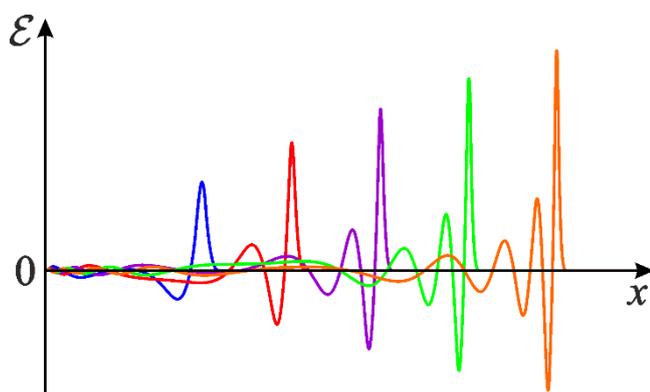


Рис. 4.7. Автомоделное усиление импульса, сопровождающееся его компрессией.

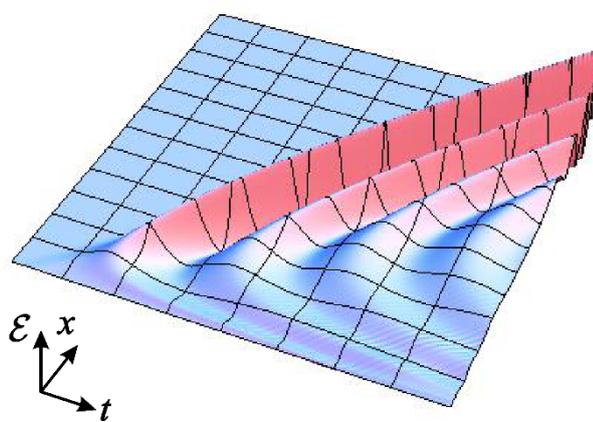


Рис. 4.8. Пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая распространение π -импульса.

Анализ усиления импульса на основе метода обратной задачи рассеяния [52] также подтверждает, что на больших временах асимптотическая форма возмущения носит автомоделный характер. Эффекты неоднородного уширения при этом становятся несущественными.

ГЛАВА 5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

§ 5.1. Понятие о междолинном переносе электронов. Эффект Ганна

Как известно [4,18], радиотехнический элемент с отрицательной дифференциальной проводимостью (ОДП) является *активным*, и его включение в цепь может приводить к усилению и генерации колебаний. ОДП в полупроводниках может быть обусловлена различными механизмами [59]. Рассмотрим ОДП, вызванную *междолинным переносом* электронов.

Движение электрона в поле кристаллической решетки подчиняется квантово-механическим закономерностям. Электрон можно представить как волновой пакет (волну де Бройля), частота и волновой вектор которого определяют энергию и импульс частицы: $\mathcal{E} = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Запишем уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

Очевидно, что закон дисперсии волн де Бройля является параболическим

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow \mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}.$$

Для электрона, движущегося в поле кристаллической решетки, уравнение (5.1) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi. \quad (5.2)$$

Если потенциал $V(x)$ — периодическая функция, закон дисперсии приобретает вид, показанный на рис. 5.1. Энергетический спектр состоит из разрешенных и запрещенных зон. Участки $\pi^2 n^2 < k^2 a^2 < \pi^2 (n+1)^2$, в пределах которых дисперсионная характеристика непрерывна, называются *зонами Бриллюэна*.

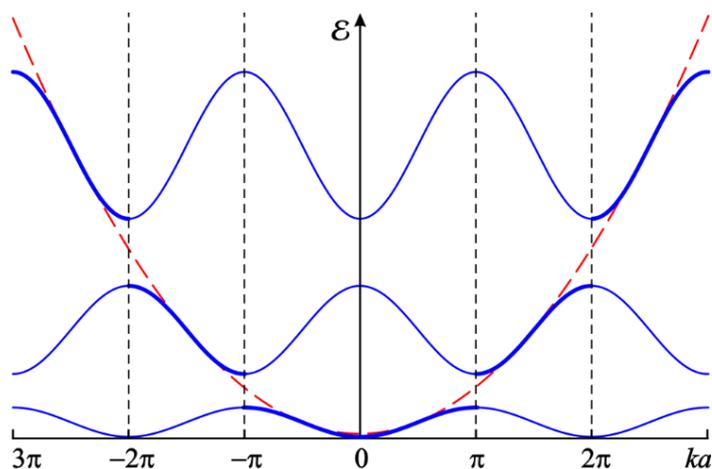


Рис. 5.1. Дисперсионная характеристика электрона в поле периодической кристаллической решетки (a — период решетки). Штриховой линией показан закон дисперсии для свободной частицы

Вблизи минимума зависимость $\mathcal{E}(k)$ можно аппроксимировать параболой

$$\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_{\min} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial k^2} (k - k_{\min})^2. \quad (5.3)$$

По аналогии со случаем свободного движения вводят *эффективную массу*

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\partial^2 \mathcal{E} / \partial k^2},$$

так что уравнение (5.3) принимает вид

$$\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_{\min} + \frac{\hbar^2}{2m^*} (k - k_{\min})^2. \quad (5.4)$$

Если к полупроводнику n - или p -типа приложить внешнее электрическое поле, возникает электрический ток. Такой ток называется *дрейфовым*. В полупроводнике n -типа он создается движением электронов проводимости, в полупроводнике p -типа — движением электронов в валентной зоне. В последнем случае удобно представить его в виде противоположно направленного движения положительных зарядов (дырок).

Для полупроводника n -типа можно записать выражение для тока проводимости

$$j_n = env_e,$$

Неустойчивость в полупроводнике с ОДП

где n — концентрация электронов, v_e — их скорость. Также можно ввести коэффициент проводимости

$$\sigma_n = \frac{j_n}{E} = en \frac{v_e}{E},$$

где E — напряженность электрического поля. Величину

$$\mu_n = \frac{v_e}{E}$$

называют *подвижностью* электронов. Таким образом,

$$\sigma_n = en\mu_n, \quad j_n = en\mu_n E. \quad (5.5)$$

Аналогичные выражения можно записать и для дырочной проводимости:

$$\sigma_p = ep\mu_p, \quad j_p = ep\mu_p E. \quad (5.6)$$

Здесь p — концентрация дырок.

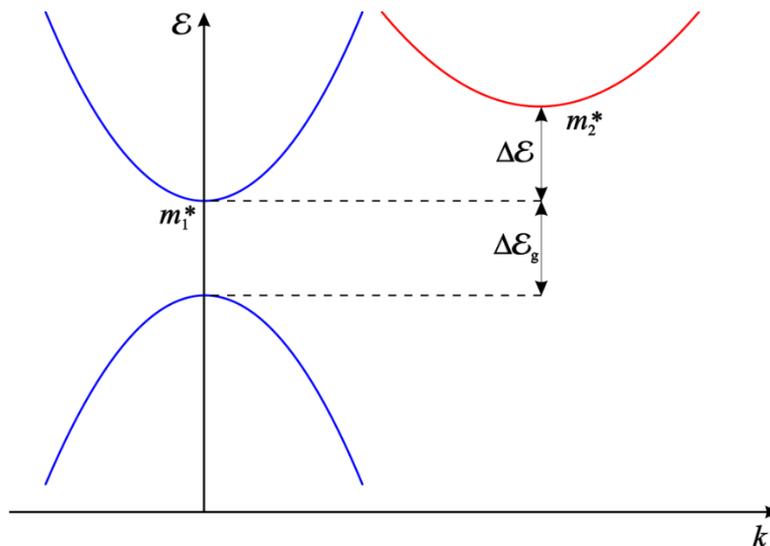


Рис. 5.2. Качественная структура энергетических зон в полупроводнике $A^{III}B^V$

В реальных полупроводниках энергетические зоны имеют более сложную структуру. В частности, в полупроводниках типа $A^{III}B^V$ (соединения элементов III и V группы, например, GaAs, InSb, InP) зависимость $\mathcal{E}(k)$ в зоне проводимости имеет несколько минимумов, называемых *долинами* (рис. 5.2), которые характеризуются различной эффективной массой ($m_1^* \ll m_2^*$) и подвижностью ($\mu_{n1} \gg \mu_{n2}$). Например, в GaAs $\Delta\mathcal{E} \approx 0.36$ эВ, $m_1^* \approx 0.067m_e$,

$m_2^* \approx 1.2m_e$, $\mu_{n1} \approx 2400 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, $\mu_{n2} \approx 100 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, ширина запрещенной зоны $\Delta\mathcal{E}_g \approx 1.43 \text{ эВ}$.

Таким образом, зависимость плотности тока от приложенного поля можно записать в следующем виде:

$$j = e(n_1\mu_1 + n_2\mu_2)E. \quad (5.7)$$

Здесь $n_{1,2}$ — концентрация электронов в соответствующей долине; полная концентрация $n = n_1 + n_2$.

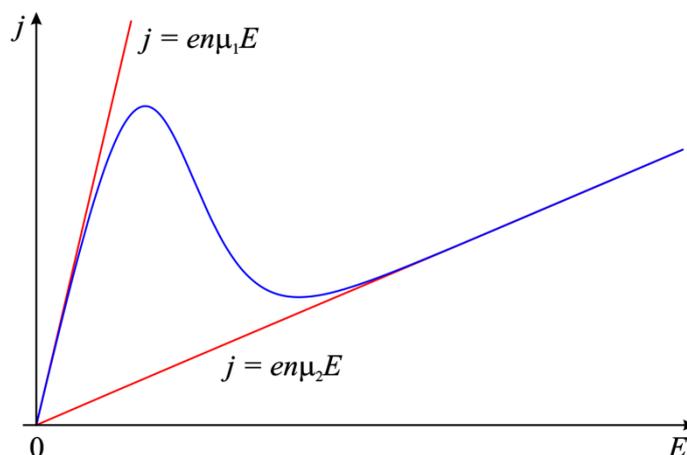


Рис. 5.3. Вольтамперная характеристика с падающим участком, образующимся за счет междолинного переноса электронов

Когда приложенное электрическое поле мало, практически все электроны проводимости сосредоточены в нижней долине. Электрический ток линейно растет с ростом поля. Однако при увеличении энергии электроны начинают переходить в верхнюю долину, в которой их подвижность резко падает. В результате на вольтамперной характеристике (ВАХ) образуется падающий участок (рис. 5.3), на котором дифференциальная проводимость отрицательна. Этот эффект предсказали Б. Ридли и Т. Уоткинс (1961) и независимо от них — С. Хилсум (1962).

Генерацию колебаний СВЧ диапазона в образце GaAs впервые наблюдал Дж. Ганн (1963). Подавая на образец прямоугольные импульсы напряжения, Ганн обнаружил на вершине импульса тока, протекающего через образец, СВЧ колебания с частотой f порядка нескольких ГГц. Ганн установил, что

$f \sim v/l$, где l — длина образца, $v \approx 10^7$ см/с, что порядка скорости дрейфового движения электронов. Ганн произвел измерения распределения поля внутри образца и обнаружил области повышенного электрического поля, названные им *доменами*. Домены распространяются по образцу с постоянной скоростью.

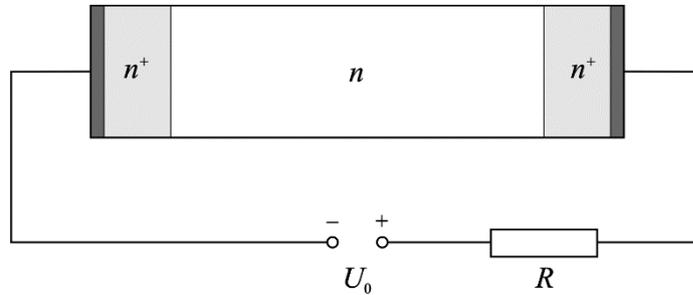


Рис. 5.4. Простейшая схема генератора на диоде Ганна

Физическую картину образования доменов качественно можно представить следующим образом [60]. Пусть в какой-то точке (вблизи катода) поле $E > E_c$, где E_c — напряженность поля, при котором начинается переход в верхнюю долину, где скорость электронов значительно меньше. Электроны внутри домена движутся со скоростью $v_{dom} \approx \mu_2 E_{dom}$, а вне домена — со скоростью $v_{dr} \approx \mu_1 E_{вн}$ (E_{dom} — поле внутри домена, $E_{вн}$ — поле вне домена). Впереди домена образуется область положительного заряда (так как электроны убегают от него), позади — область отрицательного заряда. В результате поле E_{dom} возрастает до тех пор, пока v_{dom} не сравняется с v_{dr} . После этого домен начинает двигаться вдоль образца, сохраняя свою форму.

Эффект Ганна широко используется для усиления и генерации СВЧ колебаний. Диоды Ганна изготавливают из GaAs, реже — InP, GaN. Простейшая схема диода Ганна приведена на рис. 5.4. Активная область представляет собой полупроводник n -типа ($n \sim 10^{15} \div 10^{16}$ см $^{-3}$). Низкоомные контакты, которые служат переходными прослойками к металлическим электродам, создаются при помощи слоев высоколегированного полупроводника $n^+ \sim 10^{18} \div 10^{19}$ см $^{-3}$). Генераторы на диодах Ганна работают в диапазоне $1 \div 100$ ГГц и

имеют выходную мощность до 10 Вт с КПД до 10% в непрерывном режиме и до нескольких кВт с КПД порядка 30% — в импульсном.

§ 5.2. Линейная теория неустойчивости Ганна

Теоретическое описание динамики носителей заряда в полупроводниках и металлах возможно на языке физики плазмы. Сформировался такой термин, как *плазма твердого тела* (см., например, [59]). Считая задачу одномерной, запишем для электронов уравнение Пуассона

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial x} = e(n - n_0), \quad (5.8)$$

где n_0 — концентрация ионов примеси, и уравнение непрерывности

$$e \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (5.9)$$

Плотность тока проводимости j представим в виде суммы двух составляющих — дрейфовой и диффузионной:

$$j = j_{dr} + j_{dif}.$$

Выражение для плотности дрейфового тока, очевидно, имеет вид $j_{dr} = env(E)$.

Типичный вид зависимости $v(E)$ приведен на рис. 5.5. Плотность диффузионного тока определяется выражением $j_{dif} = -eD\partial n/\partial x$, где D — коэффициент диффузии. С учетом этих соотношений уравнение непрерывности (5.9) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv(E))}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (5.10)$$

Получим для системы (5.8), (5.10) дисперсионное соотношение. Ищем решение в виде

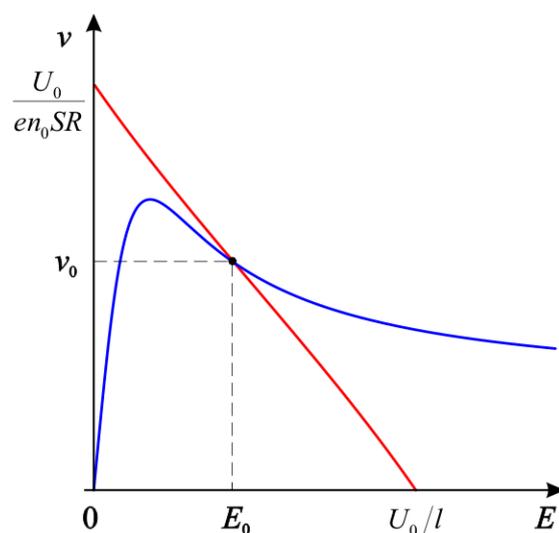


Рис. 5.5. Зависимость дрейфовой скорости от приложенного поля и нагрузочная прямая

Неустойчивость в полупроводнике с ОДП

$$E = E_0 + \tilde{E}(x, t),$$

$$n = n_0 + \tilde{n}(x, t).$$

При этом для дрейфовой скорости $v(E)$ имеем

$$v(E) \approx v(E_0) + \frac{dv(E_0)}{dE} \tilde{E} = v_0 + \mu_d \tilde{E},$$

где $\mu_d = dv(E_0)/dE$ — дифференциальная подвижность. Подставим эти выражения в уравнения (5.8), (5.10) и линеаризуем

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} = e \tilde{n}, \quad (5.11)$$

$$-\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = v_0 \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} + n_0 \mu_d \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}. \quad (5.12)$$

Отыскивая решение уравнений (5.11), (5.12) в виде

$$\tilde{E}, \tilde{n} \sim e^{i(kx - \omega t)},$$

получаем

$$i \varepsilon k \tilde{E} = e \tilde{n}, \quad (5.13)$$

$$i \omega \tilde{n} = ik \left(v_0 \tilde{n} + n_0 \mu_d \tilde{E} - ik D \tilde{n} \right). \quad (5.14)$$

Отсюда следует дисперсионное соотношение

$$\omega = kv_0 - ik^2 D - \frac{ien_0 \mu_d}{\varepsilon}. \quad (5.15)$$

Как видно из уравнения (5.15), при $\mu_d < 0$ инкремент неустойчивости

$$\text{Im } \omega(k) = -\frac{en_0 \mu_d}{\varepsilon} - k^2 D$$

положителен в диапазоне волновых чисел

$$k^2 < k_0^2 \equiv -\frac{en_0 \mu_d}{\varepsilon D}, \quad (5.16)$$

следовательно, имеет место неустойчивость.

Очевидно, что параметры системы следует выбирать таким образом, чтобы $\mu_d < 0$. Запишем для схемы, представленной на рис. 5.4, закон Ома

$$U_0 = JSR + \int_0^l E dx, \quad (5.17)$$

где J — плотность полного тока, т.е. суммы тока проводимости и тока смещения:

$$J = j + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (5.18)$$

S — площадь поперечного сечения кристалла, R — сопротивление нагрузки.

В статическом режиме

$$U_0 = en_0 v_0 SR + E_0 l,$$

откуда

$$v_0 = v(E_0) = \frac{U_0 - E_0 l}{en_0 SR}.$$

Эта зависимость, представленная на рис. 5.5 прямой линией, носит название *нагрузочной прямой*. Напряжение питания и сопротивление нагрузки надо выбирать таким образом, чтобы нагрузочная прямая пересекала зависимость $v(E)$ на участке с отрицательной крутизной.

Выясним, при каких условиях неустойчивость является абсолютной. Дисперсионное соотношение (5.15) имеет ту же структуру, что и соотношение (1.3), поэтому применим критерий характера неустойчивости, полученный в § 1.2.1. Дифференцируя (5.15), находим точку перевала

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_s} = v_0 - 2ik_s D = 0,$$

откуда $k_s = -iv_0/(2D)$. Далее находим $\omega_s = \omega(k_s)$:

$$\omega_s = -\frac{iv_0^2}{4D} - \frac{ien_0\mu_d}{\varepsilon} \quad (5.19)$$

Таким образом, неустойчивость будет абсолютной, если

$$v_0^2 < -\frac{4en_0\mu_d D}{\varepsilon}. \quad (5.20)$$

Поучительно также проанализировать корни дисперсионного уравнения $k(\omega)$. Уравнение (5.15) является квадратным относительно k , так что его корни нетрудно найти:

$$k_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4iD(\omega + ien_0\mu_d/\varepsilon)}}{2iD}. \quad (5.21)$$

Здесь частоту ω мы считаем вещественной. Если выполняется условие $|4en_0\mu_d D/\varepsilon| \ll v_0^2$, то

$$\sqrt{v_0^2 - 4iD(\omega + ien_0\mu_d/\varepsilon)} \approx v_0 - \frac{2iD}{v_0}(\omega + ien_0\mu_d/\varepsilon)$$

и выражения для корней (5.21) можно приближенно записать в виде

$$k_1 \approx -\frac{\omega}{v_0} - i\frac{v_0}{D},$$

$$k_2 \approx \frac{\omega}{v_0} + \frac{ien_0\mu_d}{\varepsilon v_0}.$$

Корень k_1 отвечает встречной волне, которая является быстро затухающей. Корень k_2 отвечает попутной волне. При $\mu_d < 0$, $\text{Im} k_2 < 0$ эта волна нарастает, распространяясь слева направо. Пренебрегая встречной волной, можно оценить коэффициент усиления в режиме бегущей волны

$$G \sim \exp\left(-\frac{en_0\mu_d l}{\varepsilon v_0}\right).$$

Для кристалла GaAs с параметрами $n_0 l \sim 10^{15} \text{ м}^{-2}$, $\mu_d \sim -0.2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, $v_0 \sim 10^5 \text{ м/с}$, $\varepsilon = 12.5\varepsilon_0$ находим, что коэффициент усиления $G_{\text{дБ}} = 20 \lg G$ составляет порядка 25 дБ.

Условие абсолютной неустойчивости (5.20) было получено для безграничной системы. Если мы хотим получить условие самовозбуждения автоколебаний генератора на диоде Ганна, следует уточнить его для системы конечной длины l . Для этого следует дополнить уравнения граничными условиями. Возможна различная постановка граничных условий (см., например, [59,60]). Обычно используют соотношения

$$\tilde{n}(0) = \tilde{n}(l) = 0, \quad (5.22)$$

что соответствует омическому контакту, или же

$$\tilde{E}(0) = \tilde{E}(l) = 0, \quad (5.23)$$

что соответствует антизапорному контакту. Рассмотрим для определенности граничное условие (5.22). Запишем $\tilde{n}(x, t)$ в виде

$$\tilde{n} = (n_1 e^{ik_1 x} + n_2 e^{ik_2 x}) e^{-i\omega t}. \quad (5.24)$$

Из условия $\tilde{n}(0) = 0$ следует, что $n_2 = -n_1$, так что (5.24) принимает вид

$$\tilde{n} = n_1 (e^{ik_1 x} - e^{ik_2 x}) e^{-i\omega t}. \quad (5.25)$$

Тогда из условия $\tilde{n}(l) = 0$ получаем, что

$$(k_1 - k_2)l = 2\pi m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

С учетом выражений (5.21) это условие дает

$$\frac{\sqrt{v_0^2 - 4iD(\omega + ien_0\mu_d/\varepsilon)}}{iD} = \frac{2\pi m}{l}.$$

Если выразить из этого соотношения ω , получим уравнение

$$\omega = -\frac{iv_0^2}{4D} - \frac{ien_0\mu_d}{\varepsilon} - \frac{i\pi^2 m^2 D}{l^2}, \quad (5.26)$$

которое представляет собой модификацию выражения (5.19) для седловой точки с учетом конечной длины системы. Следовательно, условие самовозбуждения автоколебаний будет иметь вид

$$-\frac{en_0\mu_d}{\varepsilon} > \frac{v_0^2}{4D} + \frac{\pi^2 m^2 D}{l^2} \quad (5.27)$$

В первую очередь будет возбуждаться низшая мода с $m = 1$.

§ 5.3. Нелинейные стационарные волны

С точки зрения теории нелинейных волн домен Ганна представляет собой нелинейную уединенную волну — *автосолитон*. В отличие от солитонов в консервативных средах, которые возникают за счет конкуренции эффектов нелинейности и дисперсии [3,4], автосолитон возникает за счет конкуренции

эффектов неустойчивости и диссипации. Можно выяснить ряд важных свойств домена, используя методы теории нелинейных волн (см., например, [61]).

Запишем еще раз уравнения, которыми описывается полупроводник и отрицательной дифференциальной проводимостью

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial E}{\partial x} &= e(n - n_0), \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv(E))}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Будем искать решение этих уравнений в виде стационарных бегущих волн, зависящих от бегущей координаты $\xi = x - Ut$ [3]. Здесь $U = \text{const}$ — скорость, с которой распространяется стационарная волна. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \frac{dE}{d\xi} = e(n - n_0), \quad (5.28)$$

$$-U \frac{dn}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(nv(E) - D \frac{dn}{d\xi} \right) = 0. \quad (5.29)$$

Уравнение (5.29) можно проинтегрировать. Для этого необходимо наложить граничные условия. Потребуем чтобы при $\xi \rightarrow \pm\infty$ полупроводник находился в невозмущенном состоянии, т.е. $n=n_0$, $E=E_0$. Получим уравнение

$$-Un + nv(E) - D \frac{dn}{d\xi} = -Un_0 + n_0v_0,$$

которое можно привести к виду

$$D \frac{dn}{d\xi} = n(v(E) - U) - (v_0 - U)n_0. \quad (5.30)$$

Таким образом, мы получили динамическую систему второго порядка (5.28), (5.30), которую можно проанализировать на фазовой плоскости (E, n) .

Для начала определим особые точки:

$$\begin{aligned}n &= n_0, \\ v(E) &= v_0.\end{aligned}$$

Сколько будет особых точек, определяется видом зависимости $v(E)$. Возможны две ситуации. В случае зависимости с насыщением, т.е. когда $v(E) \rightarrow v_s$ при $E \rightarrow \infty$ (см. рис. 5.6,а) имеются две особые точки, в случае зависимости без насыщения (рис. 5.6,б) — три.

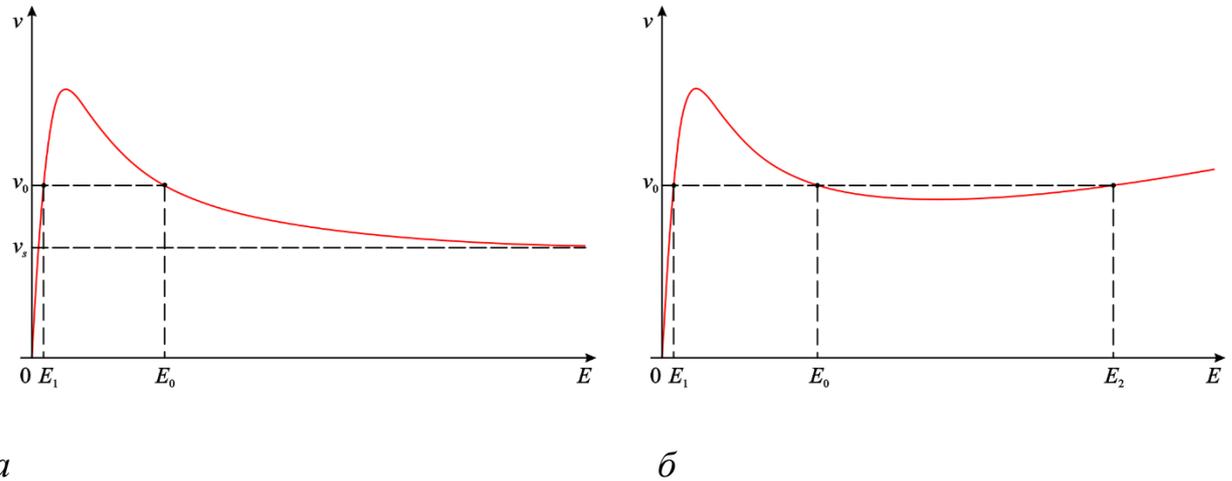


Рис. 5.6. Зависимость $v(E)$ с насыщением (а) и без насыщения (б)

Рассмотрим для начала первый случай. Определим тип особых точек, для чего зададим малые возмущения

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \tilde{n}(\xi), \\ E &= E_{0,1} + \tilde{E}(\xi), \end{aligned}$$

подставим в уравнения (5.28), (5.30) и линеаризуем их. Получим

$$\varepsilon \frac{d\tilde{E}}{d\xi} = e\tilde{n}, \quad (5.31)$$

$$D \frac{d\tilde{n}}{d\xi} = (v_0 - U)\tilde{n} + n_0 \frac{dv}{dE} \tilde{E}. \quad (5.32)$$

Производная dv/dE в (5.32), очевидно, вычисляется в точках $E = E_{0,1}$. Продифференцируем уравнение (5.32) и подставим $d\tilde{E}/d\xi$ из (5.31). Получим

$$D \frac{d^2\tilde{n}}{d\xi^2} - (v_0 - U) \frac{d\tilde{n}}{d\xi} - \frac{en_0}{\varepsilon} \frac{dv}{dE} \tilde{n} = 0. \quad (5.33)$$

Отсюда сразу видно, что точка E_1 , для которой $dv/dE > 0$, является седлом (см. [1]). Точка E_0 , для которой $dv/dE < 0$, может быть как устойчивой (при $U > v_0$), так и неустойчивой ($U < v_0$). Однако для того, чтобы существовало решение в виде уединенной волны, необходимо, чтобы на фазовой плоскости имелась гомоклиническая траектория (петля сепаратрисы). Это возможно только при $U = v_0$. Таким образом, в отличие от солитонов в консервативных средах, автосолитон движется с совершенно определенной скоростью. При $U = v_0$ точка (E_0, n_0) на фазовой плоскости является центром, а фазовый портрет имеет вид, представленный на рис. 5.7.

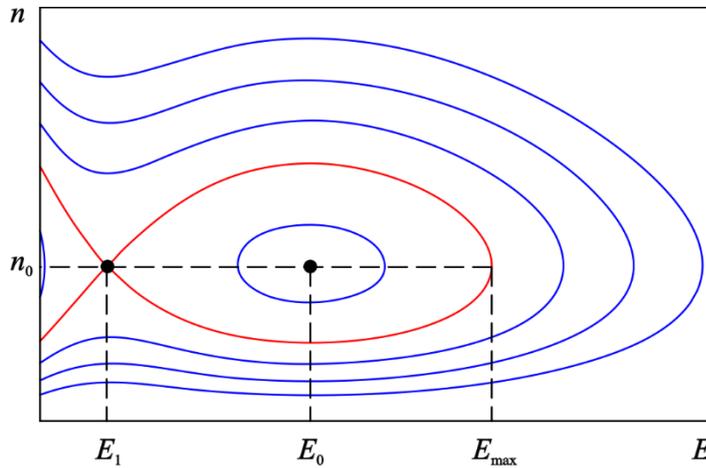


Рис. 5.7. Фазовый портрет системы (5.34) при зависимости $v(E)$ с насыщением

Теперь вернемся к нелинейным уравнениям (5.28), (5.30), которые при условии $U=v_0$ упрощаются:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dE}{d\xi} &= e(n - n_0), \\ D \frac{dn}{d\xi} &= (v(E) - v_0)n. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Разделив одно из этих уравнений на другое, найдем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{eD}{\varepsilon} \frac{dn}{dE} = \frac{(v(E) - v_0)n}{n - n_0}.$$

Переменные в этом уравнении разделяются:

$$\frac{eD}{\varepsilon} \left(\frac{n - n_0}{n} \right) dn = (v(E) - v_0) dE. \quad (5.35)$$

Как уже отмечалось, домен соответствует движению по сепаратрисе системы (5.34). Как видно из фазового портрета (рис. 5.7), при этом поле вначале нарастает от минимального значения E_1 до максимального E_{\max} , а затем возвращается к минимальному значению. Интегрируя уравнение (5.35) с учетом граничного условия $n = n_0$ при $E = E_1$, получаем

$$eD \left(n - n_0 - n_0 \ln \left(\frac{n}{n_0} \right) \right) = \varepsilon \int_{E_1}^E (v(E) - v_0) dE. \quad (5.36)$$

Поскольку $n(E_{\max}) = n_0$ (см. рис. 5.7), из уравнения (5.36) следует, что

$$\int_{E_1}^{E_{\max}} (v(E) - v_0) dE = 0. \quad (5.37)$$

Это соотношение представляет собой правило равных площадей [39,60]. Из него легко определить графически максимальную величину электрического поля домена. Заштрихованные площади на рис. 5.8 должны быть одинаковы. Видно, что E_{\max} растет по мере того, как v_0 приближается к скорости насыщения v_s (зависимость $E_{\max}(v_0)$ показана на рис. 5.8 штриховой линией).

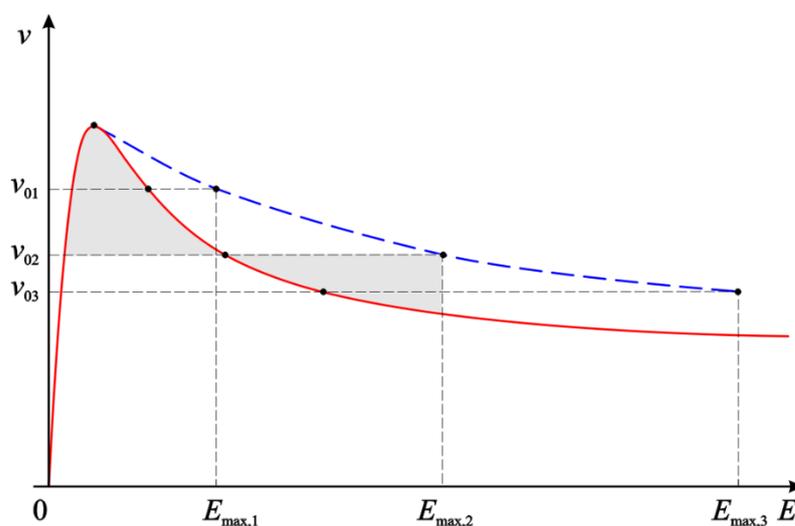


Рис. 5.8. К определению максимального электрического поля домена

На рис. 5.9 приведены типичные зависимости поля и концентрации электронов от координаты. С ростом E_0 амплитуда поля возрастает, а форма домена становится всё более асимметричной. Зависимость $n(\xi)$ представляет собой так называемую дипольную волну. Концентрация превышает равновесную там, где $dE/d\xi > 0$, т.е. при $\xi < \xi_{\max}$, и наоборот, $n(\xi) < n_0$ при $\xi > \xi_{\max}$.

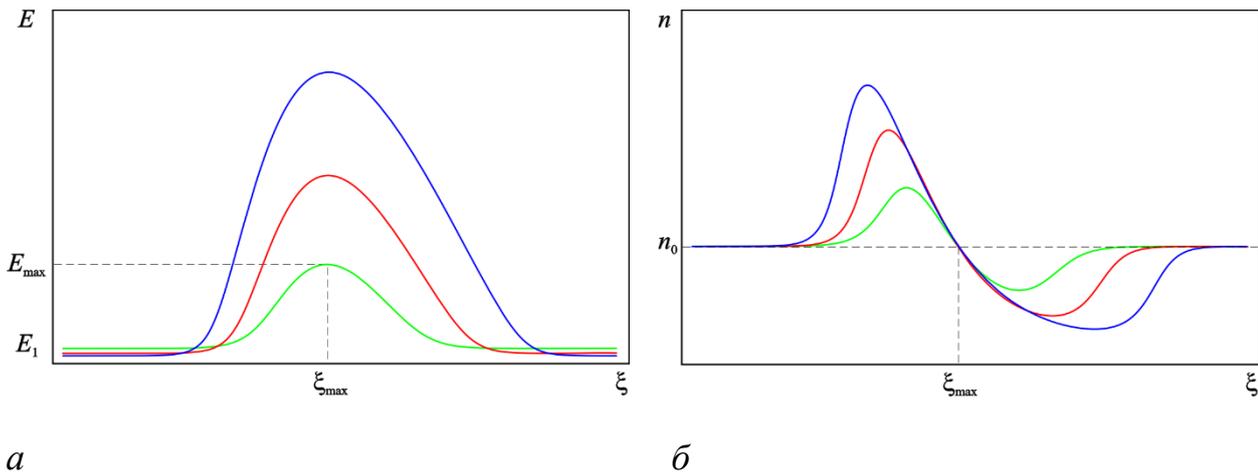


Рис. 5.9. Зависимости поля и концентрации от координаты при различных значениях E_0

Теперь рассмотрим случай, когда зависимость $v(E)$ не имеет насыщения (рис. 5.6,б). На фазовой плоскости имеются три особые точки: два седла и центр. Типичный фазовый портрет приведен на рис. 5.10.

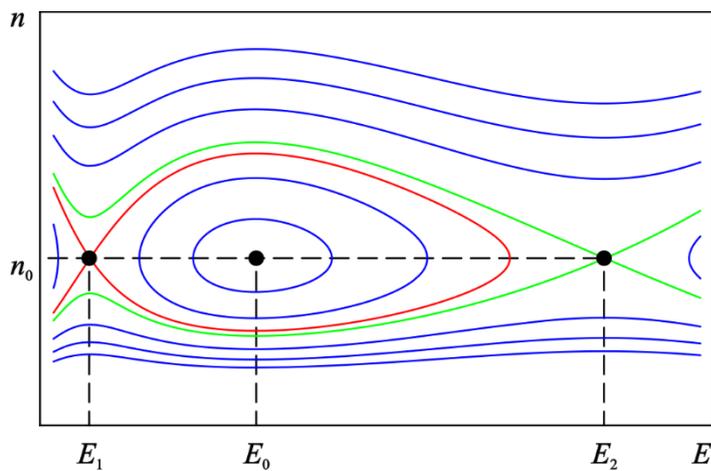


Рис. 5.10. Фазовый портрет системы (5.34) при зависимости $v(E)$ без насыщения ($V_0 > V_{\min}$)

Обсудим, как в этом случае работает правило равных площадей. На рис. 5.11 приведены примеры графического определения максимального электрического поля домена. Видно, что при уменьшении v_0 значение E_{\max} возрастает, однако, в отличие от зависимости с насыщением (рис. 5.8), когда v_0 становится меньше некоторого минимального значения v_{\min} , выполнение правила равных площадей уже невозможно.

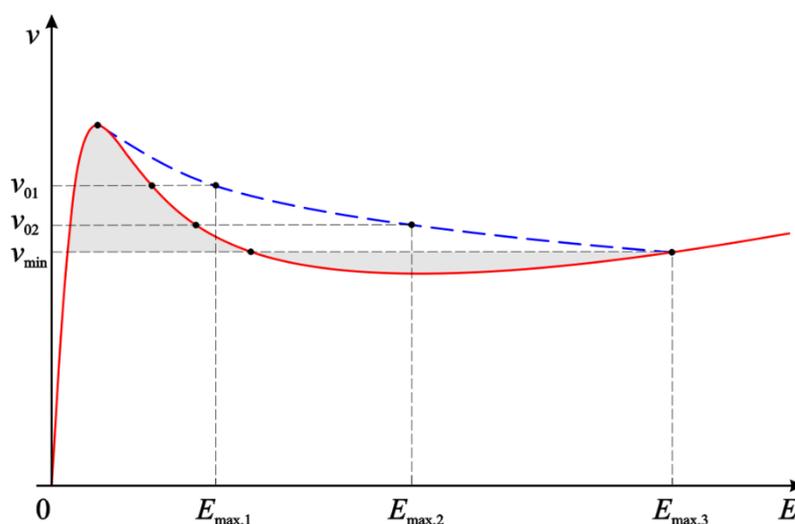


Рис. 5.11. Определение максимального электрического поля домена при зависимости $v(E)$ без насыщения

При $v_0 > v_{\min}$ по-прежнему на фазовой плоскости (рис. 5.10) существует гомоклиническая траектория, аналогичная случаю с насыщением (рис. 5.7). При $v_0 = v_{\min}$ происходит пере замыкание сепаратрис. Появляются гетероклинические траектории, идущие из седла в седло.

Наконец, при $v_0 < v_{\min}$ фазовый портрет приобретает вид, представленный на рис. 5.12. В этом случае существуют решения в виде «темного» солитона, напоминающие перевернутый домен (рис. 5.13,а). Правило равных площадей в этом случае формулируется как

$$\int_{E_{\min}}^{E_2} (v(E) - v_0) dE = 0, \quad (5.38)$$

что иллюстрирует рис. 5.13,б.

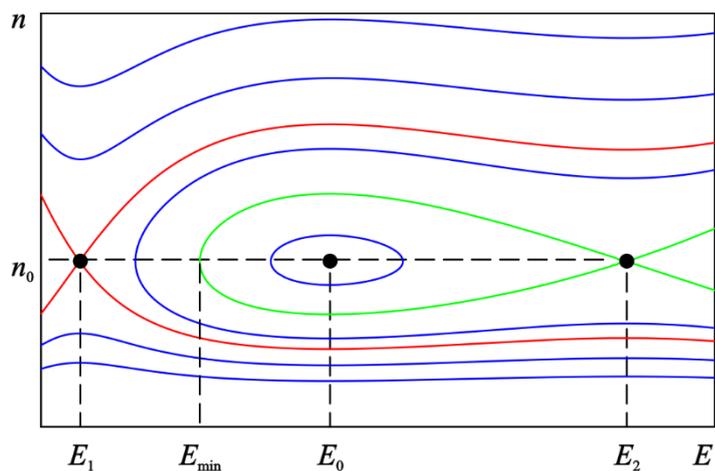


Рис. 5.12. Фазовый портрет системы (5.34) при зависимости $v(E)$ без насыщения ($v_0 > v_{\min}$)

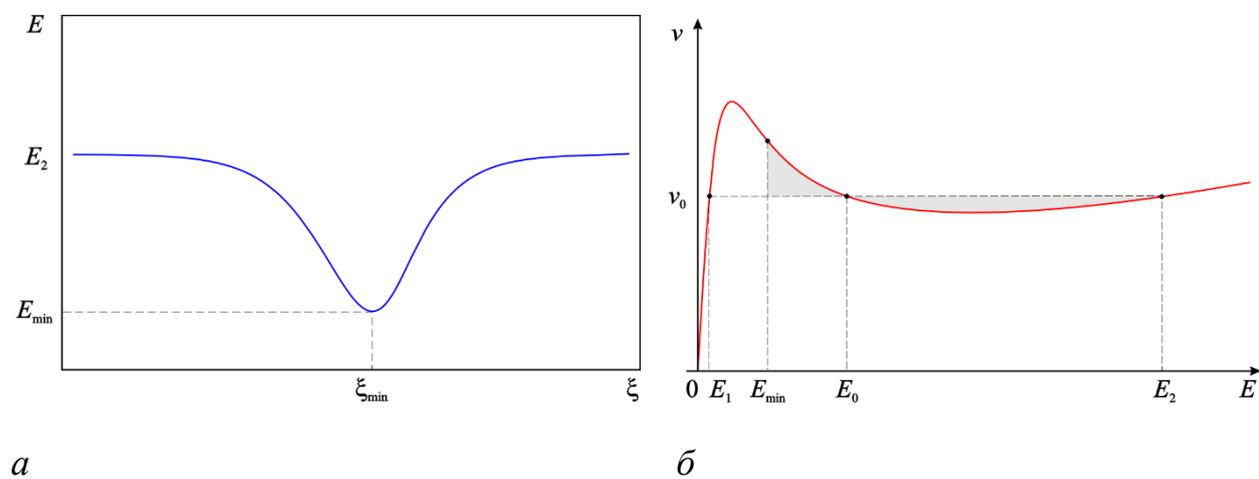


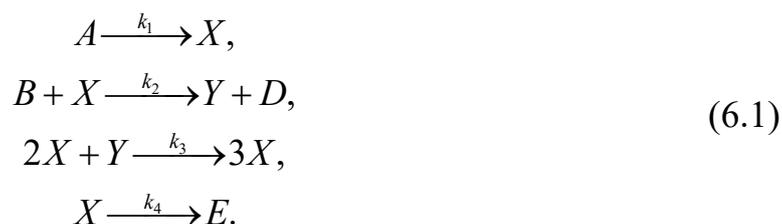
Рис. 5.13. Зависимость поля от координаты, соответствующая «темному» автосолитону (а) и иллюстрация правила равных площадей (б).

ГЛАВА 6. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ТИПА «РЕАКЦИЯ — ДИФФУЗИЯ»

§ 6.1. Брюсселятор — простая модель колебательной химической реакции

Хорошо известны колебательные химические реакции, которые служат важным и нетривиальным примером автоколебательных процессов [62]. Химические колебания — это колебания концентраций реагирующих веществ. К настоящему времени известно достаточно много колебательных реакций. Наиболее знаменитая них была открыта Б.П. Белоусовым в 1950 г. и позднее детально изучена А.М. Жаботинским. Реакция Белоусова — Жаботинского (БЖ) представляет собой процесс окисления малоновой кислоты при взаимодействии с BrO_3^- в присутствии ионов Ce_4^+ в качестве катализатора. В ходе реакции раствор периодически изменяет свой цвет: голубой — красный — голубой — красный и т.д. Кроме простых периодических колебаний реакция БЖ демонстрирует (в зависимости от условий эксперимента) множество различных типов пространственно-временной динамики, которые окончательно еще не исследованы. Предложены различные математические модели реакции БЖ (например, модель Филда, Кереса и Нойеса — «орегонатор» [62]), однако ни одна из них не описывает полностью все детали, наблюдаемые в эксперименте.

Рассмотрим более простой модельный пример химической реакции, предложенный И. Пригожиным и Р. Лефевром в 1968 г. и получивший название *брюсселятор* [63]. Уравнения этой реакции имеют вид



Предполагается, что реагенты A и B имеются в избытке, так что их концентрации можно считать постоянными, а D и E ни в какие реакции не вступают.

Составим *кинетические уравнения*, соответствующие реакции (6.1), которые описывают динамику концентраций реагирующих веществ. Поскольку число актов химической реакции в единицу времени определяется вероятностью столкновения молекул реагентов, скорости изменения концентраций продуктов реакции пропорциональны произведению концентраций соответствующих реагентов с коэффициентами пропорциональности k_n , называемыми *константами скоростей реакций*. Тогда кинетические уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= k_1 A - k_2 BX + k_3 X^2 Y - k_4 X, \\ \frac{dY}{dt} &= k_2 BX - k_3 X^2 Y.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Символами X, Y, \dots будем теперь обозначать соответствующие концентрации. Отметим, что из третьего уравнения системы (6.1) следует, что скорость образования вещества X зависит от его концентрации, т.е. эта стадия реакции носит *автокаталитический* характер. Принято считать брюсселятор Пригожина–Лефевра чисто гипотетической моделью, однако можно привести примеры некоторых реальных химических реакций, которые описываются по сути аналогичными уравнениями [64].

Приведем уравнения (6.2) к безразмерному виду, содержащему минимальное число управляющих параметров. Для этого перейдем к новым переменным $\tau = k_4 t$, $u = (k_3/k_4)^{1/2} X$, $v = (k_3/k_4)^{1/2} Y$. Тогда уравнения (6.2) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= a - (b+1)u + u^2 v, \\ \frac{dv}{dt} &= bu - u^2 v,\end{aligned}\tag{6.3}$$

где $a = (k_1^2 k_3 / k_4^3)^{1/2} A$, $b = (k_2 / k_4) B$. Отметим, что по смыслу задачи переменные u, v и параметры a, b могут принимать только положительные значения.

Итак, мы имеем динамическую систему второго порядка с двумя управляющими параметрами a и b . Состояние равновесия

$$u_0 = a, \quad v_0 = b/a \quad (6.4)$$

отвечает стационарному протеканию химической реакции, когда концентрации реагирующих веществ постоянны. Определим условия его неустойчивости, т.е. условия самовозбуждения автоколебаний. Зададим малые возмущения состояния равновесия (6.4)

$$u = a + \xi(t), \quad v = b/a + \eta(t)$$

и линеаризуем систему (6.3). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= (b-1)\xi + a^2\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b\xi - a^2\eta. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Полагая в (6.5) $\xi, \eta \sim \exp(pt)$, находим характеристическое уравнение

$$(p-b+1)(p+a^2) = -a^2b.$$

которое нетрудно привести к виду

$$p^2 + p(a^2 + 1 - b) + a^2 = 0. \quad (6.6)$$

Применяя известные результаты анализа устойчивости для системы второго порядка [1,4], получаем что при

$$b > b_H = 1 + a^2. \quad (6.7)$$

состояние равновесия на фазовой плоскости из устойчивого фокуса превращается в неустойчивый.

Продвинуться дальше и выяснить, как ведет себя система в нелинейном режиме, можно, решая уравнения (6.3) численно. Решение показывает, что при $b > b_H$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа. Состояние равновесия те-

ряет устойчивость и на фазовой плоскости появляется предельный цикл, причем частота колебаний, как видно из (6.6), равна a . Примеры фазовых портретов приведены на рис. 6.1. При b , слегка превышающих критическое значение, колебания являются квазигармоническими; с ростом b они становятся релаксационными. Таким образом, химический осциллятор демонстрирует поведение, типичное для автоколебательных систем и вполне аналогичное, например, осциллятору Ван дер Поля [18].

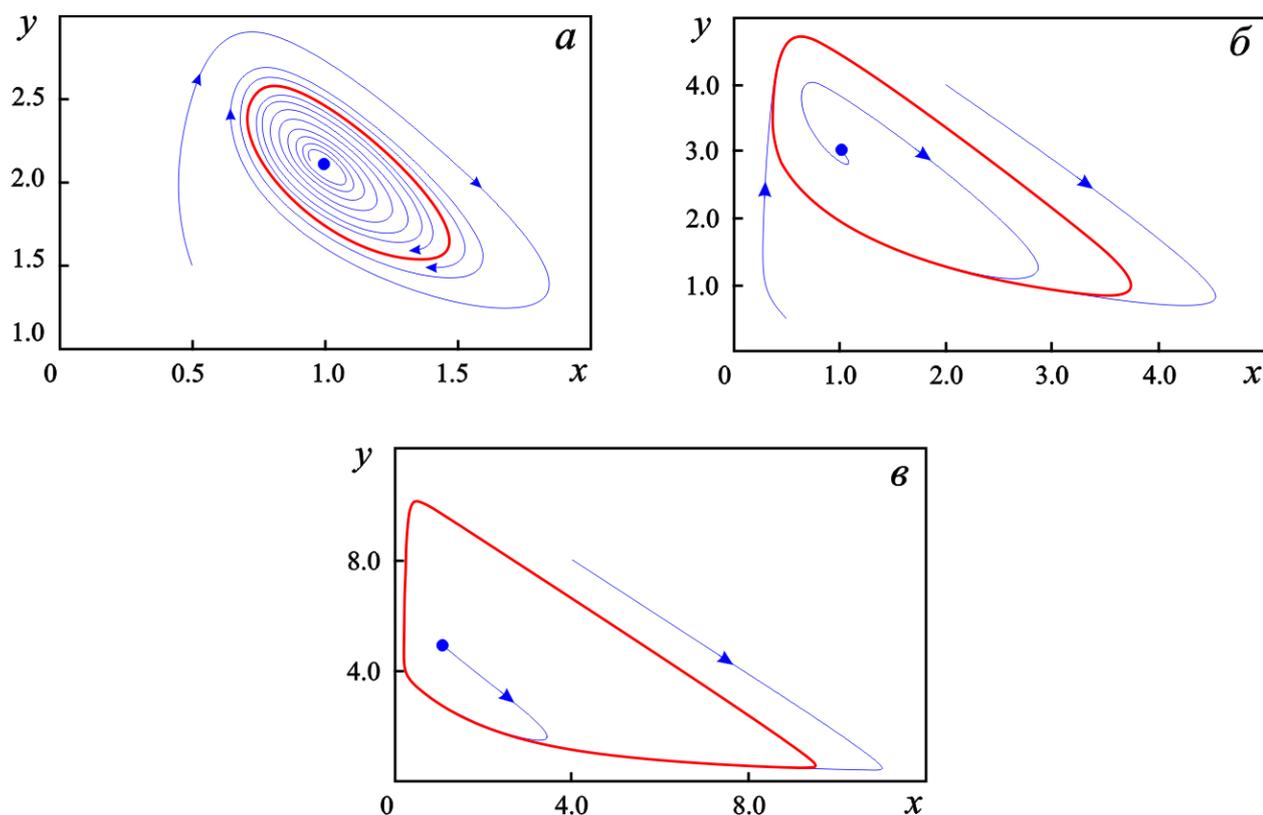


Рис. 6.1. Примеры фазовых портретов брюсселятора при $a = 1.0$, $b = 2.1$ (а); $b = 3.0$ (б); $b = 5.0$ (в)

§ 6.2. Распределенный брюсселятор. Неустойчивость Тьюринга

Брюсселятор является точечной моделью, которая описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (6.3). Однако в действительности химическая реакция протекает в пространственно-распределенном реакторе. Уравнения (6.3) соответствуют пространственно-однородному случаю, что

справедливо, например, в случае полного перемешивания. В отсутствие перемешивания следует учесть члены, отвечающие за диффузию. Рассмотрим для простоты одномерный случай. Уравнения (6.3) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a - (b+1)u + u^2v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= bu - u^2v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{6.8}$$

где D_u , D_v — коэффициенты диффузии. Системы типа «реакция — диффузия» занимают важное место в нелинейной динамике, так как демонстрируют разнообразные нелинейные феномены, такие как пространственно-временной хаос (турбулентность) и образование диссипативных структур [4,65].

Естественно поставить вопрос: как будет сказываться диффузия? В частности, может ли она привести к неустойчивости даже в том случае, когда пространственно-однородная система устойчива, т.е. условие (6.7) не выполняется. Этим вопросом занялся А. Тьюринг, который в 1952 г. доказал возможность возникновения неустойчивости, вызванной диффузией, и показал, что она приводит к появлению пространственно-неоднородных структур [66]. Тьюринг предположил, что диффузионная неустойчивость является механизмом *морфогенеза*, т.е. образования неоднородной структуры живых организмов.

Проанализируем условия появления неустойчивости Тьюринга. Зададим малое возмущение стационарного пространственно-однородного решения (6.4)

$$u = a + \xi(x, t), \quad v = b/a + \eta(x, t),$$

подставим в систему (6.8) и линеаризуем её. Получим

$$\begin{aligned}\xi_t &= (b-1)\xi + a^2\eta + D_u \xi_{xx}, \\ \eta_t &= -b\xi - a^2\eta + D_v \eta_{xx}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Здесь нижние индексы x , t обозначают соответствующие частные производные. Отыскивая решение (6.9) в виде $\xi, \eta \sim \exp(pt + ikx)$, получим дисперсионное соотношение

$$(p - b + 1 + D_u k^2)(p + a^2 + D_v k^2) = -a^2 b.$$

Ему можно придать вид

$$p^2 + p(a^2 + 1 - b + (D_u + D_v)k^2) + \Delta(k) = 0, \quad (6.10)$$

где

$$\Delta(k) = D_u D_v k^4 + (a^2 D_u + (1 - b) D_v) k^2 + a^2. \quad (6.11)$$

Нетрудно ответить на вопрос, когда корни уравнения (6.10) имеют положительную вещественную часть, т.е. возникает неустойчивость. Согласно критерию Рауса–Гурвица [1,4], это возможно в двух случаях. Первый тип неустойчивости имеет место при $a^2 + 1 - b + (D_u + D_v)k^2 < 0$, т.е. при

$$b > 1 + a^2 + (D_u + D_v)k^2 = b_H + (D_u + D_v)k^2 \quad (6.12)$$

Очевидно, что это есть неустойчивость Хопфа, аналогичная случаю точечной модели, рассмотренному в § 6.1. Минимальный порог неустойчивости (6.7) имеет пространственно-однородная мода, для которой $k = 0$. При превышении порога неустойчивости будут возникать автоколебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\Delta(k=0)} = a.$$

Второй тип неустойчивости возможен при $\Delta(k) < 0$, т.е. при

$$D_u D_v k^4 + (a^2 D_u + (1 - b) D_v) k^2 + a^2 < 0. \quad (6.13)$$

Проанализируем это выражение подробнее. Корни уравнения $\Delta(k) = 0$ есть

$$k^2 = \frac{(b-1)D_v - a^2 D_u \pm \sqrt{((b-1)D_v - a^2 D_u)^2 - 4a^2 D_u D_v}}{2D_u D_v} \quad (6.14)$$

Критический случай соответствует слиянию двух вещественных корней уравнения (6.14), что имеет место при

$$((b-1)D_v - a^2 D_u)^2 - 4a^2 D_u D_v = 0. \quad (6.15)$$

Отсюда находим

$$b = b_T \equiv \left(1 + a \sqrt{\frac{D_u}{D_v}} \right)^2. \quad (6.16)$$

На рис. 6.2 приведены характерные зависимости $\Delta(k)$ при различных значениях параметра b . При $b < b_T$ в любой точке $\Delta(k) > 0$, т.е. неустойчивости нет. При $b = b_T$ $\Delta(k)$ обращается в нуль в точке $k = k_c$, где

$$k_c^2 = \frac{(b_T - 1)D_v - a^2 D_u}{2D_u D_v} = \frac{a}{\sqrt{D_u D_v}}. \quad (6.17)$$

При $b > b_T$ имеется диапазон волновых чисел, в котором $\Delta(k) < 0$, т.е. соответствующие возмущения неустойчивы. Будем называть эту неустойчивость *неустойчивостью Тьюринга* или *диффузионной неустойчивостью*.

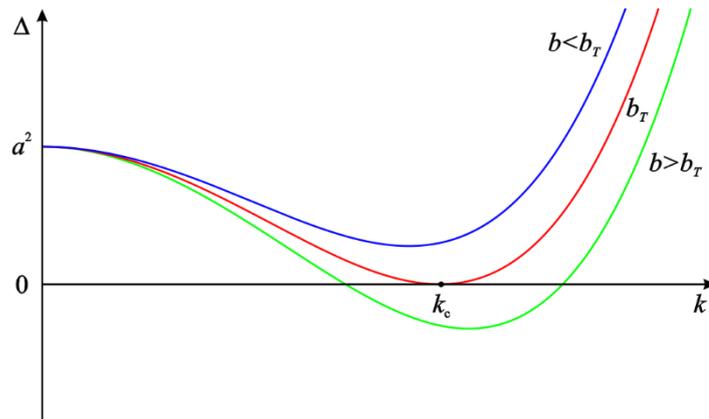


Рис. 6.2. Зависимость $\Delta(k)$ при различных значениях параметра b

Отметим, что при $D_v > D_u$, а точнее, при

$$a \left(1 - \frac{D_u}{D_v} \right) > 2 \sqrt{\frac{D_u}{D_v}}, \quad (6.18)$$

порог неустойчивости Тьюринга ниже порога неустойчивости Хопфа (6.7). Следовательно, в диапазоне $b_T < b < b_H$ есть диффузионная неустойчивость, но нет автоколебаний. При этом будут образовываться стационарные пространственно-периодические структуры, период которых приближенно определяется критическим значением волнового числа k_c (6.17).

Выберем для примера следующие значения параметров: $D_u = 0.25$, $D_v = 1.0$, $a = 2.0$, так что неравенство (6.18) выполняется. Согласно формулам (6.16), (6.17) порог неустойчивости Тьюринга $b_T = 4.0$, а критическое волновое число $k_c = 2.0$. Пространственно-однородное возмущение ($k = 0$) имеет минимальный порог неустойчивости Хопфа $b_H = 5.0$.

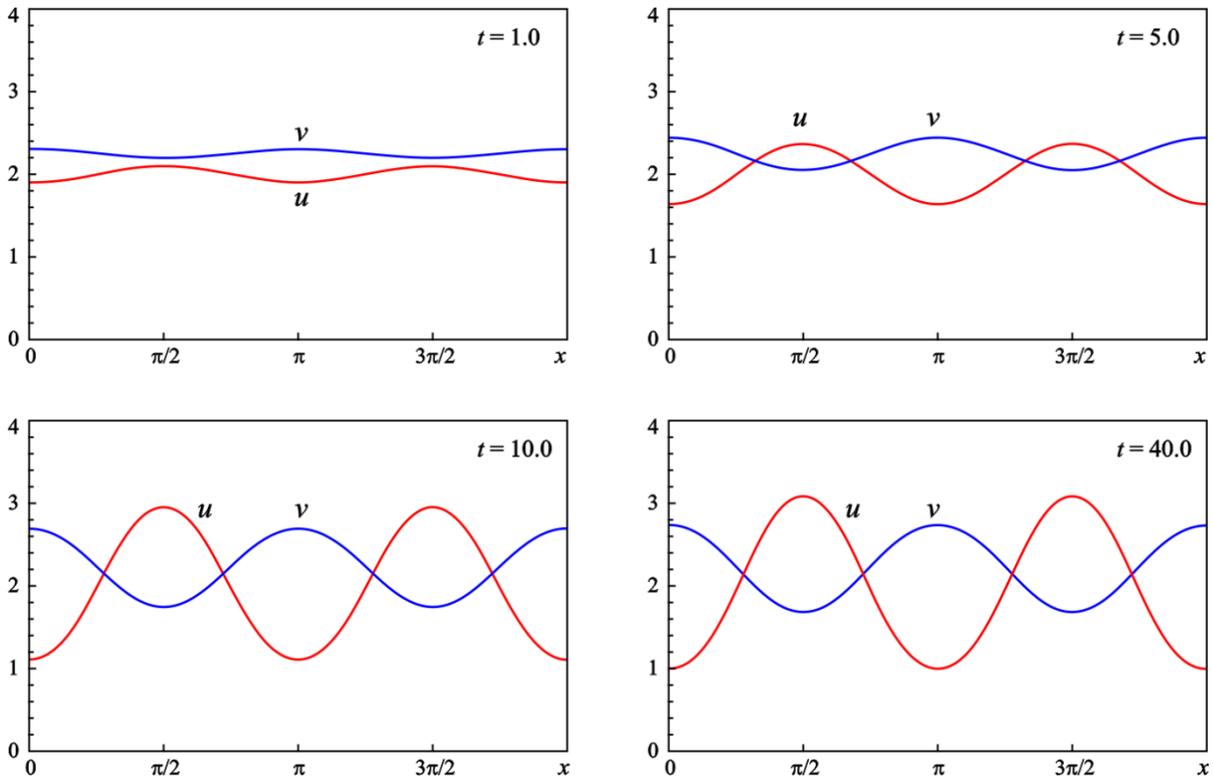


Рис. 6.3. Зависимости $u(x)$ и $v(x)$ в разные моменты времени, иллюстрирующие образование стационарной диссипативной структуры. Значения параметров $D_u = 0.25$, $D_v = 1.0$, $a = 2.0$, $b = 4.5$

На рис. 6.3 приведен результат численного моделирования уравнений распределенного брюсселятора (6.8) с периодическими граничными условиями $u(0,t) = u(2\pi,t)$, $v(0,t) = v(2\pi,t)$ при $b = 4.5$. Начальные условия задавались в виде малых возмущений равновесного состояния $u_0 = 2.0$, $v_0 = 2.25$. По окончании переходного процесса устанавливается стационарная периодическая диссипативная структура с пространственным периодом π , т.е. с волновым числом, равным критическому. При $b > b_H$ по-прежнему образуется пери-

одическая структура, однако переходный процесс начинает носить осциллирующий характер. Если же условие (6.18) не выполняется, доминирующей оказывается неустойчивость Хопфа. Возмущения с $k \neq 0$ подавляются и устанавливается режим пространственно-однородных периодических автоколебаний.

Покажем, что неустойчивости Хопфа и Тьюринга являются абсолютными. Запишем выражения для корней характеристического уравнения (6.10)

$$p = \frac{b-1-a^2 - (D_u + D_v)k^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1-b-a^2 - (D_v - D_u)k^2\right)^2 - 4a^2b}. \quad (6.19)$$

Применим критерий абсолютной неустойчивости, основанный на методе передела (§ 1.2.1). Дифференцируем выражение (6.19) и приравняем его к нулю:

$$\frac{dp}{dk} = -(D_u + D_v)k \pm \frac{\left(1-b-a^2 - (D_v - D_u)k^2\right)(D_v - D_u)k}{\sqrt{\left(1-b-a^2 - (D_v - D_u)k^2\right)^2 - 4a^2b}} = 0. \quad (6.20)$$

Отсюда видим, что имеется, во-первых, седловая точка $k_s = 0$, которая соответствует неустойчивости Хопфа. Очевидно, что

$$p_s = p(k_s = 0) = \frac{b-1-a^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1-b-a^2\right)^2 - 4a^2b}.$$

Нетрудно показать, что при $b > b_H$ корень, которому соответствует знак «+», положительный, следовательно, неустойчивость абсолютная.

Теперь рассмотрим ненулевые корни уравнения (6.20). Для них имеем

$$\begin{aligned} (D_u + D_v)^2 \left[\left(1-b-a^2 - (D_v - D_u)k^2\right)^2 - 4a^2b \right] = \\ = \left(1-b-a^2 - (D_v - D_u)k^2\right)^2 (D_v - D_u)^2. \end{aligned}$$

Разрешая это уравнение относительно k , находим

$$k_s^2 = \frac{1-b-a^2 + a\sqrt{b}(D_u + D_v)/\sqrt{D_u D_v}}{D_v - D_u} \quad (6.21)$$

Подставим (6.21) в (6.19) и вычислим p_s . После ряда преобразований получим

$$p_s = p(k_s) = \frac{D_v(b-1) + D_u a^2}{D_v - D_u} - \frac{(D_u + D_v)^2 a}{2(D_v - D_u)} \sqrt{\frac{b}{D_u D_v}} \pm \frac{a\sqrt{b}(D_v - D_u)}{2\sqrt{D_u D_v}}.$$

Оставляем только корень со знаком «+», так как именно он определяет характер неустойчивости:

$$p_s = \frac{D_v(b-1) + D_u a^2}{D_v - D_u} - \frac{2a\sqrt{bD_u D_v}}{D_v - D_u} = \frac{D_v}{D_v - D_u} \left[\left(\sqrt{b} - a\sqrt{\frac{D_u}{D_v}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.22)$$

Таким образом, видно, что $p_s > 0$ при $b > b_T$, т.е. неустойчивость Тьюринга также является абсолютной.

§ 6.3. Неустойчивость в системе «брюсселятор с потоком»

То, что неустойчивость в неподвижной среде является абсолютной, — достаточно очевидный результат. Рассмотрим теперь нетривиальную ситуацию, когда реагенты поступают в реактор в виде потока, движущегося с постоянной скоростью c . В этом случае уравнения (6.8) модифицируются следующим образом [67]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= a - (b+1)u + u^2 v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} &= bu - u^2 v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Будем считать, что на левой границе (в точке $x = 0$) концентрации равны равновесным, т.е. $u(x=0) = a$, $v(x=0) = b/a$.

Дисперсионное соотношение для системы (6.23) нетрудно получить, сделав в (6.10) замену $p \rightarrow p + ick$, что можно интерпретировать как доплеровский сдвиг частоты на величину $\Delta\omega = ck$. Получим

$$(p + ick)^2 + (p + ick)(a^2 + 1 - b + (D_u + D_v)k^2) + \Delta(k) = 0, \quad (6.24)$$

где $\Delta(k)$ определяется выражением (6.11). Корни уравнения (6.24) можно записать в виде, аналогичном (6.19)

$$p = -ick + \frac{b-1-a^2-(D_u+D_v)k^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1-b-a^2-(D_v-D_u)k^2\right)^2 - 4a^2b}. \quad (6.25)$$

Получить критерий абсолютной/конвективной неустойчивости в явном виде теперь не удастся. Границы неустойчивости в пространстве параметров можно найти численно [67]. С другой стороны, можно получить приближенное выражение для критерия неустойчивости при слабой надкритичности. Рассмотрим по отдельности поведение в окрестности порогов неустойчивости Хопфа и Тьюринга.

6.3.1. Неустойчивость Тьюринга

Итак, рассмотрим случай, когда

$$b = b_T + \varepsilon^2, \quad (6.26)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Также будем считать, что порог неустойчивости Тьюринга ниже, чем порог неустойчивости Хопфа, $b_T < b_H$. Поскольку в первую очередь теряют устойчивость возмущения, волновые числа которых лежат в окрестности критического волнового числа k_c , будем считать, что

$$k = k_c + \varepsilon \kappa. \quad (6.27)$$

Разложим выражение (6.11) для $\Delta(k)$ в ряд по степеням ε в окрестности точки $b = b_T, k = k_c$:

$$\Delta(k, b) \approx \Delta(k_c, b_T) + \varepsilon \kappa \frac{\partial \Delta}{\partial k} + \frac{\varepsilon^2 \kappa^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial k^2} + \dots + \varepsilon^2 \frac{\partial \Delta}{\partial b} + \dots \quad (6.28)$$

Все производные вычисляются в точке (b_T, k_c) , причем $\Delta(k_c, b_T) = 0$, $\partial \Delta(k_c, b_T) / \partial k = 0$ (см. рис. 6.2). Также нетрудно найти, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(b_T, k_c)}{\partial k^2} = 6D_u D_v k_c^2 + a^2 D_u + (1 - b_T) D_v = 4a \sqrt{D_u D_v},$$

$$\frac{\partial \Delta(b_T, k_c)}{\partial b} = -D_v k_c^2 = -a \sqrt{\frac{D_v}{D_u}}.$$

В итоге из (6.28) получаем следующее выражение

$$\Delta(k, b) \approx -\varepsilon^2 a \sqrt{\frac{D_v}{D_u}} + 4a \sqrt{D_u D_v} \varepsilon^2 \kappa^2. \quad (6.29)$$

Соответственно, характеристическое уравнение (6.24) принимает вид

$$\begin{aligned} (p + ic(k_c + \varepsilon \kappa))^2 + (p + ic(k_c + \varepsilon \kappa))(a^2 + 1 - b_T + (D_u + D_v)(k_c + \varepsilon \kappa)^2) = \\ = \varepsilon^2 a \sqrt{\frac{D_v}{D_u}} (1 - 4D_u \kappa^2). \end{aligned} \quad (6.30)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем следующие выражения для корней этого уравнения:

$$p + ick_c = 0, \quad (6.31)$$

$$p + ick_c = b_T - 1 - a^2 - (D_u + D_v)k_c^2 = -\frac{a\sqrt{b_T}(D_v - D_u)}{\sqrt{D_u D_v}}. \quad (6.32)$$

Поскольку мы считаем, что $D_u < D_v$, очевидно, что правая часть выражения (6.32) отрицательна. Следовательно, при $\varepsilon \neq 0$ характер неустойчивости определяется корнем (6.31), для которого вещественная часть $\text{Re } p$ становится положительной.

Чтобы удобнее было проводить сопоставление с результатами Главы 1, введем комплексную частоту $\omega = ip$, для которой нетрудно из (6.30) получить приближенное выражение с точностью до членов порядка ε^2

$$\omega \approx ck_c + \varepsilon \kappa + i\varepsilon^2 \frac{D_v(1 - 4D_u \kappa^2)}{(D_v - D_u)\sqrt{b_T}}. \quad (6.33)$$

Приближения, в рамках которых получено соотношение (6.33), по сути аналогичны сделанным в § 1.1 при выводе линеаризованного уравнения Гинзбурга–Ландау (1.7). Действительно, в § 1.1 рассматривалась универсальная ситуация при слабом превышении порога неустойчивости в среде с отрицательным поглощением. Соответственно, (6.33) имеет вид, который с точностью до обозначений аналогичен уравнению (1.3). Поэтому можно получить критерий абсолютной/конвективной неустойчивости из формул § 1.2. Тем не менее, проделаем вычисления полностью. Продифференцируем (6.33) и приравняем полученное выражение к нулю

$$\frac{d\omega}{d\kappa} = \varepsilon c - \frac{8i\varepsilon^2 D_u D_v \kappa}{(D_v - D_u)\sqrt{b_T}} = 0,$$

откуда найдем точку перевала

$$\kappa_s = -\frac{i(D_v - D_u)c\sqrt{b_T}}{8\varepsilon D_u D_v} \quad (6.34)$$

Теперь подставим (6.34) в (6.33) и после некоторых вычислений получим

$$\omega_s = \omega(\kappa_s) = c\kappa_c + \frac{i\varepsilon^2 D_v}{(D_v - D_u)\sqrt{b_T}} - \frac{i(D_v - D_u)c^2\sqrt{b_T}}{16D_u D_v}.$$

Таким образом, инкремент неустойчивости есть

$$\text{Im } \omega_s = \frac{\varepsilon^2 D_v}{(D_v - D_u)\sqrt{b_T}} - \frac{(D_v - D_u)c^2\sqrt{b_T}}{16D_u D_v}. \quad (6.35)$$

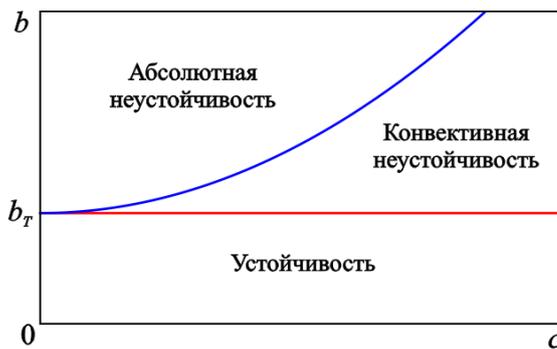


Рис. 6.4. Качественная картина разбиения плоскости параметров c, b на области с различным характером неустойчивости в окрестности порога неустойчивости Тьюринга

С учетом того, что $\varepsilon^2 = b - b_T$, из (6.35) получим критерий абсолютной неустойчивости

$$c^2 < \frac{16(b - b_T)D_u D_v^2}{(D_v - D_u)^2 b_T}. \quad (6.36)$$

Таким образом, на плоскости параметров c, b будем иметь картину, представленную качественно на рис. 6.4.

6.3.2. Неустойчивость Хопфа

Аналогично можно рассмотреть окрестность порога неустойчивости Хопфа. В этом случае вместо (6.26), (6.27) следует положить

$$b = b_H + \varepsilon^2 = 1 + a^2 + \varepsilon^2,$$

и

$$k = \varepsilon \kappa,$$

поскольку при неустойчивости Хопфа в первую очередь теряет устойчивость пространственно-однородная мода. Характеристическое уравнение (6.24) с точностью до членов порядка ε^2 принимает вид

$$(p + i\varepsilon c \kappa)^2 - \varepsilon^2 (p + i\varepsilon c \kappa) (1 - (D_u + D_v) \kappa^2) + a^2 (1 - \varepsilon^2 (D_v - D_u) \kappa^2) = 0. \quad (6.37)$$

При $\varepsilon = 0$ корни этого уравнения равны $p = \pm ia$. Для определенности рассмотрим корень со знаком «-». Тогда при $\varepsilon \neq 0$ получаем приближенное выражение для комплексной частоты $\omega = ip$ с точностью до членов порядка ε^2

$$\omega \approx a + \varepsilon c \kappa - \frac{\varepsilon^2}{2} a (D_v - D_u) \kappa^2 + \frac{i\varepsilon^2}{2} (1 - (D_u + D_v) \kappa^2). \quad (6.38)$$

Дифференцируя (6.38) и приравнявая полученное выражение к нулю, получаем

$$\frac{d\omega}{d\kappa} = \varepsilon c - \varepsilon^2 a (D_v - D_u) \kappa - i\varepsilon^2 (D_u + D_v) \kappa = 0,$$

откуда находим точку перевала (ср. (1.11))

$$\kappa_s = \frac{c}{\varepsilon (a (D_v - D_u) + i (D_u + D_v))} = \frac{c\beta^*}{2\varepsilon |\beta|^2}, \quad (6.39)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{a (D_v - D_u) + i (D_u + D_v)}{2}. \quad (6.40)$$

Подстановка (6.39) в (6.38) приводит к выражению (ср. (1.12))

$$\omega_s = a + \frac{c^2 \beta^*}{2 |\beta|^2} - \frac{c^2 \beta (\beta^*)^2}{4 |\beta|^4} + \frac{i\varepsilon^2}{2} = a + \frac{c^2 \beta^*}{4 |\beta|^2} + \frac{i\varepsilon^2}{2},$$

из которого можно найти инкремент неустойчивости

$$\text{Im } \omega_s = \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{c^2 \beta_i}{4 |\beta|^2} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 - \frac{c^2 (D_u + D_v)}{a^2 (D_v - D_u)^2 + (D_u + D_v)^2} \right).$$

Поскольку $\varepsilon^2 = b - b_H$, критерий абсолютной неустойчивости имеет вид

$$c^2 < (b - b_H) \cdot \frac{a^2 (D_v - D_u)^2 + (D_u + D_v)^2}{(D_u + D_v)}. \quad (6.41)$$

Разбиение плоскости параметров на области с различным характером неустойчивости в окрестности порога неустойчивости Хопфа будет иметь структуру, аналогичную представленной на рис. 6.4.

6.3.3. Потокково–диффузионные структуры

Когда граничные значения концентраций отличаются от равновесных,

$$u(x=0) \neq a, \quad v(x=0) \neq b/a, \quad (6.42)$$

возникает еще одно интересное явление: потокково-диффузионные структуры (flow-diffusion structures) [67,68]. Они описываются стационарными решениями уравнений (6.23)

$$\begin{aligned} D_u \frac{d^2 u}{dx^2} - c \frac{du}{dx} + a - (b+1)u + u^2 v &= 0, \\ D_v \frac{d^2 v}{dx^2} - c \frac{dv}{dx} + bu - u^2 v &= 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Условие возникновения потокково-диффузионных структур есть условие неустойчивости пространственно-однородных решений системы (6.43). Положим $u(x) = a + \xi(x)$, $v(x) = b/a + \eta(x)$, где ξ , η — малые возмущения, и линеаризуем уравнения (6.43).

$$\begin{aligned} D_u \frac{d^2 \xi}{dx^2} - c \frac{d\xi}{dx} + (b-1)\xi + a^2 \eta &= 0, \\ D_v \frac{d^2 \eta}{dx^2} - c \frac{d\eta}{dx} - a^2 \eta - b\xi &= 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Отыскивая решение уравнений (6.44) в виде $\xi, \eta \sim \exp(ikx)$, приходим к характеристическому уравнению

$$(D_u k^2 + ick + 1 - b)(D_v k^2 + ick + a^2) = -a^2 b,$$

или

$$\begin{aligned} D_u D_v k^4 + ick^3 (D_u + D_v) + k^2 (D_u a^2 + D_v (1 - b) - c^2) + \\ + ick (a^2 + 1 - b) + a^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

На границе устойчивости k , очевидно, принимает чисто вещественные значения. Отделим в (6.45) вещественную часть от мнимой

$$D_u D_v k^4 + k^2 (D_u a^2 + D_v (1-b) - c^2) + a^2 = 0,$$

$$k^3 (D_u + D_v) + k (a^2 + 1 - b) = 0.$$

Выразим из второго уравнения k

$$k^2 = \frac{b-1-a^2}{D_u + D_v}$$

и подставим в первое. Получим

$$D_u D_v \left(\frac{b-1-a^2}{D_u + D_v} \right)^2 + \frac{b-1-a^2}{D_u + D_v} (D_u a^2 + D_v (1-b) - c^2) + a^2 = 0.$$

Разрешим полученное уравнение относительно c , что после некоторых вычислений дает

$$c^2 = \frac{D_u^2 a^2 + D_v^2 (1-b)}{D_u + D_v} + \frac{a^2 (D_u + D_v)}{b-1-a^2} \quad (6.46)$$

Уравнение (6.46) задает на плоскости c, b границу, выше которой формируется стоячие пространственно-неоднородные волны концентрации — потоково-диффузионные структуры.

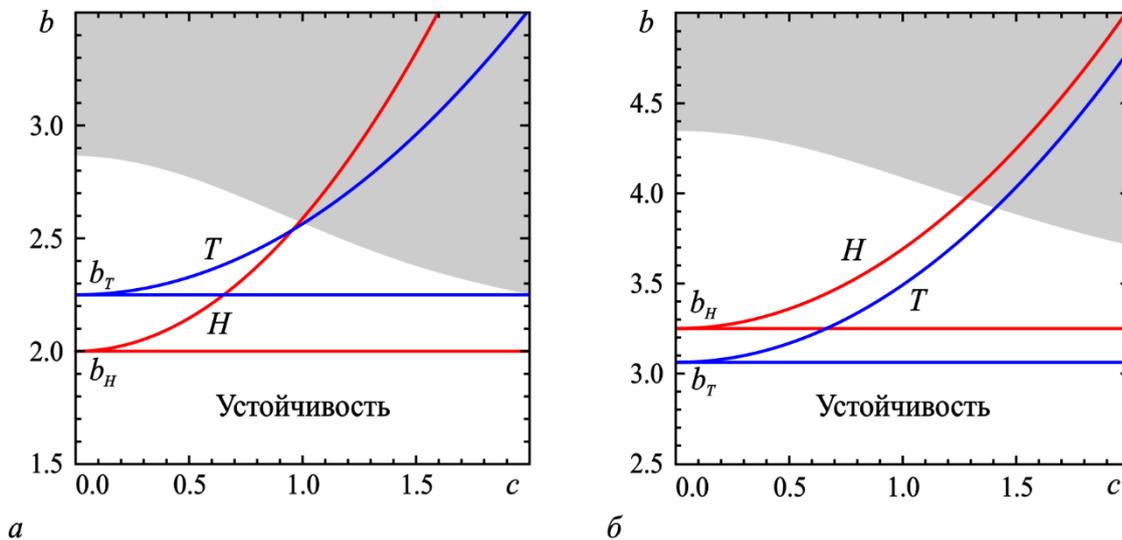


Рис. 6.5. Разбиение плоскости c, b на области с различным характером неустойчивости при $D_u = 0.25$, $D_v = 1.0$, $a = 1.0$ (а) и $a = 1.5$ (б). Показаны границы смены характера неустойчивости Хопфа (H) и Тьюринга (T). Заштрихована область существования потоково-диффузионных структур

На рис. 6.5 приведены примеры разбиения плоскости параметров на области с различным характером неустойчивости при $D_u = 0.25$, $D_v = 1.0$ и двух различных значениях a . При $a < 4/3$ порог неустойчивости Хопфа ниже, чем у неустойчивости Тьюринга (рис. 6.5,а). При $a > 4/3$, напротив, неустойчивость Тьюринга доминирует (рис. 6.5,б).

6.3.4. Результаты численного моделирования

Полученные выше критерии абсолютной/конвективной неустойчивости (6.36) и (6.41) являются приближенными и справедливы, строго говоря, лишь при небольшом превышении над порогом неустойчивости. Наиболее полную картину можно получить, анализируя характеристическое уравнение численно [67,68]. Соответствующие результаты представлены на рис. 6.6. Сплошными линиями показаны границы, полученные численно, тонкими пунктирными линиями — построенные по приближенным теоретическим формулам (6.36) и (6.41). Видно, что при достаточно небольшом превышении порогов неустойчивости они хорошо согласуются между собой. Буквами С обозначены области конвективной неустойчивости, АН и АТ — области в которых абсолютной является неустойчивость Хопфа и Тьюринга соответственно. Пунктиром показаны линии равенства инкрементов двух этих неустойчивостей.

Картина, показанная на рис. 6.6, подтверждается результатами численного моделирования уравнений (6.23). Рассмотрим систему конечной длины l и будем считать, что на левой границе значения концентраций равны равновесным, $u(0,t) = a$, $v(0,t) = b/a$, а на правой границе зададим свободные граничные условия, $u_x(l,t) = v_x(l,t) = 0$.¹² На рис. 6.7 приведены картины пространственно-временной динамики переменной $u(x,t)$.

¹² При достаточно большой длине системы l конкретный выбор граничного условия на правой границе оказывается несущественным.

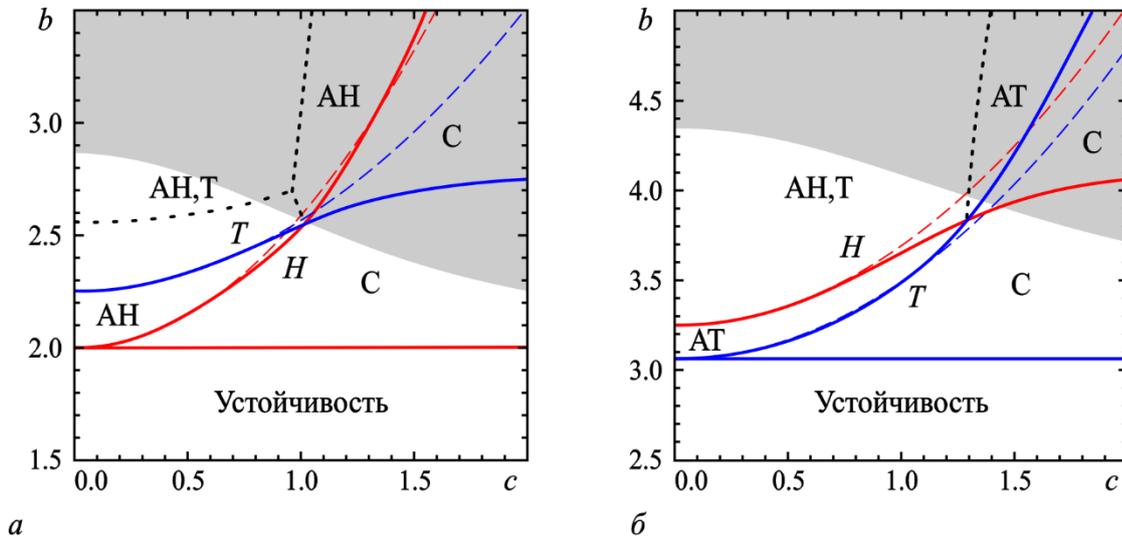


Рис. 6.6. Разбиение плоскости c, b на области с различным характером неустойчивости при тех же значениях параметра a , что и на рис. 6.5. Сплошные линии — границы, полученные численно [67,68], тонкие штриховые линии — приближенные теоретические зависимости. Пунктиром показаны линии равенства инкрементов неустойчивостей Хопфа и Тьюринга [67,68]

Когда неустойчивость является конвективной (рис. 6.7,*a*), нарастающие возмущения сносятся через правую границу и в конце концов устанавливается равновесное состояние. Если же неустойчивость является абсолютной, фронт нарастающего возмущения распространяется влево, и оно постепенно занимает всю рассматриваемую область. Визуально неустойчивости Хопфа и Тьюринга легко различимы. При абсолютной неустойчивости Хопфа (рис. 6.7,*б*) возбуждение периодических во времени колебаний, напоминающих стоячую волну. В случае абсолютной неустойчивости Тьюринга (рис. 6.7,*в*) наблюдается генерация бегущих волн, амплитуда которых вдоль системы постепенно нарастает и стремится к постоянному значению.

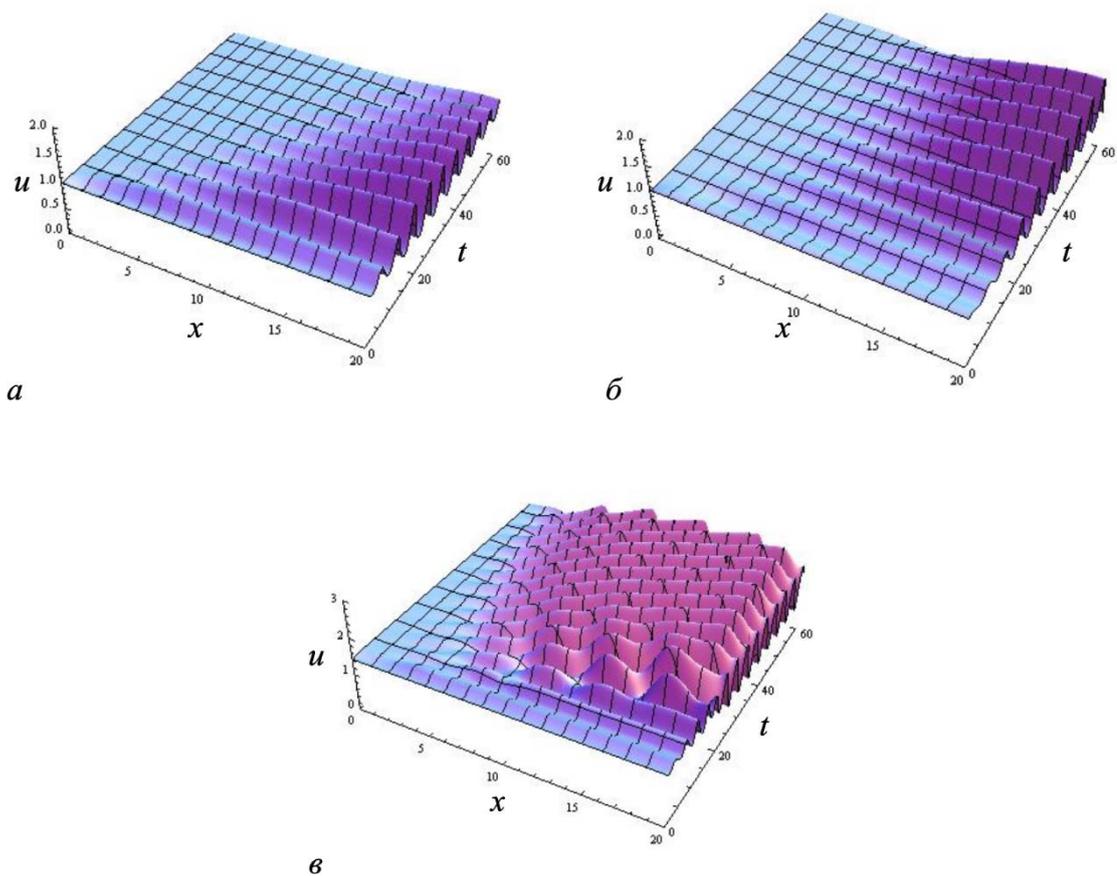


Рис. 6.7. Картины пространственно-временной динамики, иллюстрирующие переход от конвективной неустойчивости к абсолютной: *a* — конвективная неустойчивость, $a = 1.0$, $b = 2.2$, $c = 0.7$; *б* — абсолютная неустойчивость Хопфа, $a = 1.0$, $b = 2.2$, $c = 0.5$; *в* — абсолютная неустойчивость Тьюринга, $a = 1.5$, $b = 3.5$, $c = 0.8$. Остальные параметры $D_u = 0.25$, $D_v = 1.0$

ПРИЛОЖЕНИЕ. МЕТОД ПЕРЕВАЛА

Метод перевала предназначен для асимптотической оценки интегралов вида

$$I = \int_C f(z) e^{\varphi(z)t} dz, \quad (\text{П.1})$$

где $z = x + iy$ — комплексная переменная, $f(z)$ и $\varphi(z)$ — однозначные аналитические комплексные функции, $t \gg 1$ — большой параметр, C — контур интегрирования в плоскости z .

Прежде, чем изложить метод перевала, рассмотрим асимптотическую оценку аналогичного вещественного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) e^{\varphi(x)t} dx, \quad (\text{П.2})$$

где x, f, φ вещественные. Ясно, что при $t \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл (П.2) вносит окрестность точки, в которой функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигает максимума. Разложим $\varphi(x)$ в ряд вблизи точки максимума x_0 :

$$\varphi(x) \approx \varphi(x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots, \quad (\text{П.3})$$

причем $\varphi''(x_0) < 0$.

При $t \rightarrow \infty$ функция $\exp[\varphi(x)t]$ имеет максимум в точке x_0 и быстро спадает при удалении от нее. Если считать, что $f(x)$ в окрестности точки x_0 меняется не слишком быстро, можно при вычислении интеграла (П.2) положить $f(x) \approx f(x_0)$ и вынести за знак интеграла. Получим

$$\begin{aligned} I &\approx f(x_0) \int_a^b \exp \left[\varphi(x_0)t + \frac{\varphi''(x_0)t}{2} (x - x_0)^2 \right] dx = \\ &= f(x_0) e^{\varphi(x_0)t} \int_a^b \exp \left[\frac{\varphi''(x_0)t}{2} (x - x_0)^2 \right] dx = \frac{f(x_0) e^{\varphi(x_0)t}}{\sqrt{\frac{\varphi''(x_0)t}{2}}} \cdot \int_{\xi_a}^{\xi_b} e^{-\xi^2} d\xi, \end{aligned}$$

где $\xi = (x - x_0)\sqrt{-\varphi''(x_0)t/2}$, $\xi_{a,b} = \xi(a,b)$. При $t \rightarrow \infty$ можно приближенно заменить пределы интегрирования на $\pm\infty$. С учетом того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi},$$

окончательно получаем

$$I \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\varphi''(x_0)t}} f(x_0) e^{\varphi(x_0)t}. \quad (\text{П.4})$$

Фактически эта оценка основана на том, что подынтегральное выражение приближенно заменяется гауссовой функцией (см. рис. Д.1).

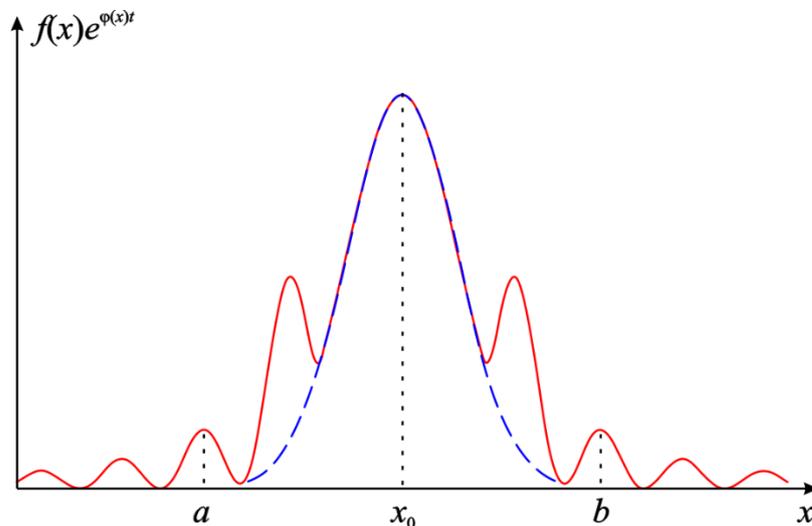


Рис. П.1. Аппроксимация подынтегрального выражения в (П.2) гауссовой функцией

Казалось бы, аналогичный прием можно использовать и при вычислении интеграла (П.1). Поскольку $f(z)$ и $\varphi(z)$ — однозначные аналитические комплексные функции, можно деформировать контур интегрирования C таким образом, чтобы он прошел через точку z_0 , в которой

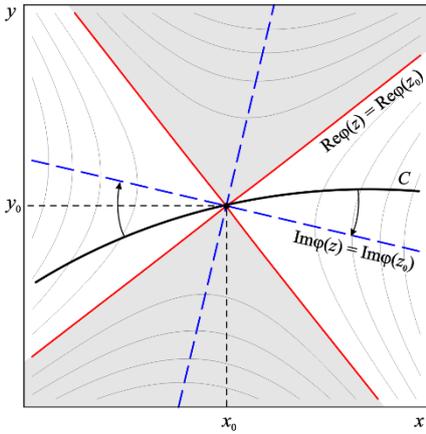
$$\varphi'(z_0) = 0, \quad \varphi''(z_0) \neq 0$$

и $|\exp[\varphi(z)]| = \exp[\operatorname{Re}(\varphi(z))]$ принимает максимальное на C значение. Разложим $\varphi(z)$ в этой точке в ряд:

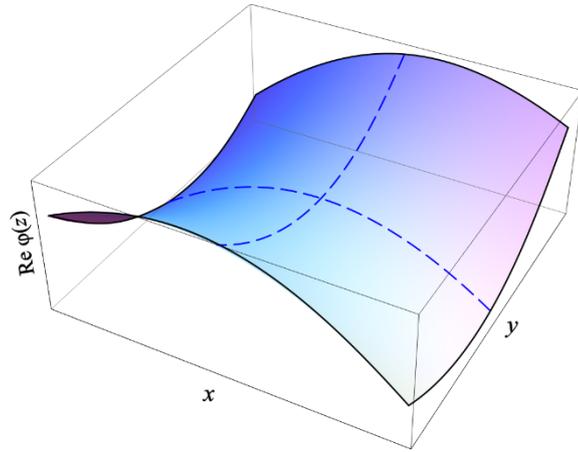
$$\varphi(z) \approx \varphi(z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \dots \quad (\text{П.5})$$

Метод перевала

и нарисуем окрестность точки $z_0 = x_0 + iy_0$ на плоскости комплексной переменной z (рис. Д.2,а).



а



б

Рис. П.2. Окрестность точки z_0 на комплексной плоскости (а) и вид поверхности $\text{Re}\varphi(z)$ (б)

Построим линии, на которых $\text{Re}\varphi(z) = \text{Re}\varphi(z_0)$. Обозначим $\varphi''(z_0) = a + ib$. Из (П.5) получаем, что

$$\begin{aligned} & \text{Re}\left[(a + ib)(x - x_0 + i(y - y_0))^2\right] = \\ & = a(x - x_0)^2 - 2b(x - x_0)(y - y_0) - a(y - y_0)^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$y - y_0 = -\left(\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right)(x - x_0). \quad (\text{П.6})$$

Это две прямые линии, которые делят плоскость z на четыре области, как показано на рис. П.2,а. Очевидно, что в областях, через которые проходит контур интегрирования, $\text{Re}\varphi(z) < \text{Re}\varphi(z_0)$, так как на нем в точке z_0 функция $\text{Re}\varphi(z)$ достигает максимума. В областях, через которые он не проходит, $\text{Re}\varphi(z) > \text{Re}\varphi(z_0)$. На рис. П.2,а эти области заштрихованы. Следовательно поверхность $\text{Re}\varphi(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид *седла* или *перевала* (рис. Д.2,б).

Аналогично можно построить на плоскости z линии, вдоль которых $\text{Im}\varphi(z) = \text{Im}\varphi(z_0)$:

$$\begin{aligned} & \text{Im}\left[(a+ib)(x-x_0+i(y-y_0))^2\right]= \\ & = b(x-x_0)^2 + 2a(x-x_0)(y-y_0) - b(y-y_0)^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$y-y_0 = \left(\frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}\right)(x-x_0). \quad (\text{П.7})$$

На рис. Д. 2,а они показаны штриховыми линиями. Одна из этих линий проходит в области, где $\text{Re}\varphi(z) < \text{Re}\varphi(z_0)$, другая — в области, где $\text{Re}\varphi(z) > \text{Re}\varphi(z_0)$.

Если подставить разложение (П.5) в интеграл (П.1) аналогично тому, как это было сделано при вычислении интеграла (П.2), получим

$$I \approx f(z_0)e^{\varphi(z_0)t} \int_C \exp\left[\frac{\varphi''(z_0)(z-z_0)^2 t}{2}\right] dz. \quad (\text{П.8})$$

Однако приближенно вычислить этот интеграл еще нельзя, так как может получиться, что мнимая часть показателя экспоненты быстро меняется вдоль контура C . Тогда в подынтегральном выражении будет быстро меняющаяся функция и интегрирование даст нуль, несмотря на то, что $\text{Re}\varphi(z)$ достигает максимума. Поэтому воспользуемся следующим приемом. Сместим контур интегрирования таким образом, чтобы он проходил вдоль линии, на которой $\text{Im}\varphi(z) = \text{Im}\varphi(z_0) = \text{const}$ (см. рис. П.2,а). Эта линия называется *линией наискорейшего спуска*. Теперь можно вычислить интеграл (П.8) как обычный интеграл от функции вещественной переменной, в качестве которой выбирается координата вдоль линии наискорейшего спуска.

Окончательно получаем формулу, аналогичную (П.4):

$$I \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\varphi''(z_0)t}} f(z_0)e^{\varphi(z_0)t}. \quad (\text{П.9})$$

Метод перевала

Это выражение служит асимптотической оценкой интеграла (П.1). Можно показать (см., например, [33]), что погрешность этой оценки имеет порядок t^{-1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
2. Кузнецов А.П., Рожнев А.Г., Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: Физматлит, 2001. 128 с.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: URSS, 2017. 312 с. (Гл. 12).
4. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2007. 536 с. (гл. VI).
6. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
7. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: URSS, 2019. 552 с.
8. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
9. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. 272 с.
10. Briggs R.J. Electron-stream interactions with plasmas. MIT Press, Cambridge, MA, 1964. 184 p.
11. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 148-153.
12. Newell A.C., Whitehead J.A. Finite-bandwidth, finite-amplitude convection // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 38, No. 2. P. 279-303.
13. Stewartson K., Stuart J.T. Nonlinear instability of plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48, No. 3. P. 529-545.
14. Edwards W.S., Beane S.R., Varma S. Onset of wavy vortices in the finite-length Couette–Taylor problem // Phys. Fluids A. 1991. Vol. 3, No. 6. P. 1510-1518.
15. Kuramoto Y., Tzuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems // Prog. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, No. 3. P. 687-699.
16. Гапонов–Грехов А.В., Рабвич М.И. Уравнение Гинзбурга–Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 2. С. 131-143.
17. Aranson I.S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 99–143.
18. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
19. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains in deep water. Pt. I. Theory // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27, No. 3. P. 417–430.

Литература

20. Lange C., Newell A.C. A stability criterion for envelope equations // *SIAM J. Appl. Math.* 1974. Vol. 27. P. 441-456.
21. Балякин А.А., Рыскин Н.М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30, № 5. С. 6-13.
22. Balyakin A.A., Ryskin N.M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2004. Vol. 7, No. 1. P. 34-42.
23. Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец М.И. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39, № 12. С. 561-564.
24. Арансон И.С., Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Странные аттракторы и пространственное развитие турбулентности в потоковых системах // *ЖЭТФ.* 1986. Т. 90, № 5. С. 1707-1718.
25. Арансон И.С., Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // *ЖЭТФ.* 1985. Т.89, № 1(7). С. 92-105.
26. Bazhenov M.V., Rabinovich M.I., Fabrikant A.L. The “amplitude–phase” turbulence in a Ginzburg-Landau model as critical phenomenon // *Physics Letters A.* 1992. Vol. 163, No. 1-2. P. 87-94.
27. Bazhenov M., Rabinovich M., Rubchinsky L. Time-periodic spatial chaos in the complex Ginzburg–Landau equation // *J. Stat. Phys.* 1996. Vol. 83, No. 5-6. P. 1165-1181.
28. Shraiman B.I., Pumir A., van Saarloos W., Honenberг P.C., Chate H., Holen M. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg–Landau equation // *Physica D.* 1992. Vol. 57, No. 3-4. P. 241-248.
29. Bekki N., Nozaki K. Formations of spatial patterns and holes in the generalized Ginzburg–Landau equation // *Phys. Lett. A.* 1985. Vol. 110, No. 3. P. 133-135.
30. Deissler R. External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems // *J. Stat. Phys.* 1989. Vol. 54, No. 5-6. P. 1459-1488.
31. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
32. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике, М.: Мир, 1989. 326 с.
33. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.
34. Дудко Г.М., Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Удвоение периода и хаос при четырехмагнотном распаде бегущих магнитостатических волн в пленках железо–иттриевого граната // *Письма в ЖТФ.* 1987. Т. 13, № 12. С. 736-740.

35. Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Развитие модуляционной неустойчивости магнитоэлектрических волн (МЭВ) в ферритовых пленках // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 2. С. 55-59.
36. Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах // Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1962. 336 с.
37. Sturrock P.A. In what sense do slow waves carry negative energy? // J. Appl. Phys. 1960. Vol. 31, No. 5-6. P. 2052-2056.
38. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970. 584 с.
39. Электронные приборы сверхвысоких частот. Под ред. В.Н. Шевчика и М.А. Григорьева. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1980. 416 с.
40. Booske J.H., Converse M.C. Insights from one-dimensional linearized Pierce theory about wideband traveling-wave tubes with high space charge // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. Vol. 32, No. 3. P. 1066-1072.
41. Phillips P.M., Zaidman E.G., Freund H.P., Ganguly A.K., Vanderplaat N.R. Review of two-stream amplifier performance // IEEE Trans. Electron Dev. 1990. Vol. 37, No. 3. P. 870-877.
42. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
43. Solymar L., Ash E.A. Some travelling-wave interactions in semiconductors. Theory and design considerations // Int. J. Electron. 1966. Vol. 20, No. 2. P. 127-148.
44. Gover A., Yariv A. Monolithic solid-state traveling-wave amplifier // J. Appl. Phys. 1974. Vol. 45, No. 6. P. 2596-2600.
45. Thiennot J. Traveling-wave amplification by interaction with a current in a semiconductor // J. Appl. Phys. 1975. Vol. 46, No. 9. P. 3925-3933.
46. Кузнецов А.П. Неустойчивость в системе волна — среда из несвязанных осцилляторов // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 6-я Зимняя школа-семинар инженеров. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1983. С. 109-112.
47. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 9. С. 1104-1112.
48. Бессуднова Н.О., Рожнев А.Г. Влияние пространственного заряда на неустойчивость в системе электронный поток — электромагнитное поле вблизи границы полосы пропускания замедляющей системы // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 10. С. 35-39.
49. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 2008. 800 с.
50. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

Литература

51. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
52. Манаков С.В. Распространение ультракороткого оптического импульса в двухуровневом лазерном усилителе // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, № 1. С. 68-83.
53. Габитов И.Р., Захаров В.Е., Михайлов А.В. Уравнение Максвелла–Блоха и метод обратной задачи рассеяния // ТМФ. 1985. Т. 63, № 1. С. 11-31.
54. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 18, No. 21. P. 908-911.
55. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency // Phys. Rev. 1969. Vol. 183, No. 2. P. 457-485.
56. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика: Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Изд. 3. М.: URSS. 2021. 256 с.
57. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2009. 256 с.
58. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект. 2010. 368 с.
59. Пожела Ю.К. Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. М.: Наука, 1977.
60. Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С. Эффект Ганна. М.: Сов. радио, 1975. 288 с.
61. Szmolyan P. Traveling waves in GaAs semiconductors // Physica D. 1989. Vol. 39, No. 2-3. P. 393-404.
62. Колебания и бегущие волны в химических системах. Под ред. Р. Филда и М. Бургер. М.: Мир, 1988. 720 с.
63. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. М: URSS. 2016. 304 с.
64. Лаврова А.И., Постников Е.Б., Романовский Ю.М. Брюсселятор — абстрактная химическая реакция? // УФН. 2009. Т. 179, № 12. С. 1327-1332.
65. Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М. Физматлит, 2002. 200 с.
66. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. B. 1952. Vol. 237, No. 641. P. 37-72.
67. Кузнецов С.П. Абсолютная и конвективная неустойчивость и образование структур в модельной системе типа реакция–диффузия с потоком // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 4. С. 3-19.
68. Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Dewel G., Borckmans P. Absolute and convective instabilities in a one-dimensional Brusselator flow model // J. Chem. Phys. 1997. Vol. 106, No. 18. P. 7609-7616.

