УДК 517.984

СВОЙСТВА ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
ignatievmu@info.sgu.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений $y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y$, где матрицы $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$ и A постоянны, $q(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$. Устанавливается ряд свойств матрицы сопряжения для решений типа Вейля на прямых вида $\{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}$, $j \neq k$.

Ключевые слова: спектральная теория, обратные задачи, системы с особенностью.

PROPERTIES OF SCATTERING DATA OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A SINGULARITY[1]

M. Yu. Ignatiev (Saratov, Russia)
ignatievmu@info.sgu.ru

We consider differential system $y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y$, where the matrices $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$ and A are constant, $q(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$. Some properties of conjugation matrix for the Weyl-type solutions on the lines of the form $\{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}$, $j \neq k$ are established.

Keywords: spectral theory, inverse problems, systems with a singularity.

Предположим, что постоянные комплексные $n \times n$, $n > 2$ матрицы A, B удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1. *Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $Re\mu_1 < Re\mu_2 < \cdots < Re\mu_n$, $Re\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.*

Условие 2. *$B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, элементы $b_1, \ldots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что $\sum\limits_{j=1}^n b_j = 0$.*

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Представим множество $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ в виде $\mathbb{C} \setminus \Sigma = \bigcup\limits_{\nu=1}^N \mathcal{S}_\nu$ объединения непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$. В каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ существует

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00102).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19-01-00102).

перестановка $R_1, \ldots, R_n$ чисел $b_1, \ldots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \cdots < \mathrm{Re}(R_n z)$ при $z \in \mathcal{S}_\nu$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dz} = (B + z^{-1}A)y. \tag{1}$$

При выполнении Условия 1 система (1) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида $c_k(z) = z^{\mu_k}\hat{c}_k(z)$, $k = \overline{1,n}$, где $\hat{c}_k(z)$ – целые функции. При выполнении Условия 2 система (1) имеет в каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ фундаментальную систему решений $\{e_k(z)\}_{k=1}^n$, такую, что:

$$e_k(z) = \exp(zR_k)(\mathfrak{f}_k + O(z^{-1})),\ z \to \infty,\ z \in \mathcal{S}_\nu.$$

Здесь $(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \ldots, R_n) = (b_1, \ldots, b_n)\mathfrak{f}$.

Предположим, далее, что выполнено также следующее условие.

Условие информативности. *Для каждого из секторов $\mathcal{S}_\nu$ и для всех $k = \overline{2,n}$ числа $\Delta_{0k} := \det(e_1(z), \ldots, e_{k-1}(z), c_k(z), \ldots, c_n(z))$, $z \in \mathcal{S}_\nu$ отличны от* 0.

В дальнейшем рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{2}$$

со спектральным параметром ρ, где матрица-функция $q(x)$ удовлетворяет условиям: $q_{kj} \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $p > 2$ для всех k, j, $q_{kk}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$.

Определение. Пусть $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ фиксированы. Решение $\Psi_k(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$ системы (2) называется k-м решением типа Вейля, если оно удовлетворяет условиям:

$$\Psi_k(x,\rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,\ \Psi_k(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Вопросы построения и исследования свойств решений типа Вейля подробно изучались в работе [1]. Известно, в частности, что k-е решение типа Вейля существует и единственно для всех таких $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, для которых $\Delta_k(\rho) \neq 0$. Здесь $\Delta_k(\rho)$ – характеристическая функция краевой задачи, образованной системой (2) и краевыми условиями

$$y(x) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,\ y(x) = o(\exp(\rho x R_k)), x \to \infty.$$

Обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ (здесь предполагается, что нумерация секторов осуществляется в направлении против часовой стрелки и $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Если некоторая функция $f(\rho)$ определена при $\rho \in \mathcal{S}_\nu \cup \mathcal{S}_{\nu+1}$, то через $f^{\pm}(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ обозначим пределы

$$f^-(\rho) = \lim_{\xi\to\rho, \xi\in\mathcal{S}_\nu} f(\xi),\ f^+(\rho) = \lim_{\xi\to\rho, \xi\in\mathcal{S}_{\nu+1}} f(\xi).$$

Известно, в частности, что предельные значения $\Delta_k^\pm(\rho)$, $\rho\in\Sigma_\nu$ существуют для всех k, ν.

Определим Σ_ν^1 как множество таких $\rho\in\Sigma_\nu$, для которых

$$\prod_{k=2}^n \Delta_k^\pm(\rho)\neq 0.$$

Для любого $\rho\in\Sigma_\nu^1$ существуют предельные значения $\Psi^\pm(x,\rho)$, где $\Psi(x,\rho) := (\Psi_1(x,\rho),\ldots,\Psi_n(x,\rho))$. Поскольку каждая из матриц $\Psi^-(x,\rho)$, $\Psi^+(x,\rho)$ удовлетворяет системе (2), для каждого $\rho\in\Sigma^1 := \bigcup\limits_{\nu=1}^N \Sigma_\nu^1$ определена (единственная) матрица (*матрица сопряжения*) $v(\rho)$ такая, что $\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho)v(\rho)$.

Обозначим через $\Pi(\rho)$, $\rho\in\Sigma\setminus\{0\}$ матрицу перестановок такую, что $\mathfrak{f}^+(\rho) = \mathfrak{f}^-(\rho)\Pi(\rho)$. Заметим, что при выполнении Условия 2 матрица $\Pi(\rho)$ – блочно-диагональная, причём диагональные блоки имеют либо размер 1×1 и равны 1 («тривиальные блоки»), либо размер 2×2 («нетривиальные блоки»).

Теорема 1. *Для каждого $\rho\in\Sigma^1$ матрица $v(\rho)$ является нижнетреугольной и блочно-диагональной, причём нетривиальные диагональные блоки расположены в тех же строках и столбцах, что нетривиальные диагональные блоки матрицы $\Pi(\rho)$. Каждый нетривиальный диагональный блок матрицы $v(\rho)$ имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1}\end{pmatrix},$$

причём $v_{kk}v_{k+1,k+1} = -1$.

Обозначим через $v_0(\rho)$ матрицу сопряжения, соответствующую «простейшей» системе вида (2) с $q=0$.

Теорема 2. *При $\rho\to\infty$, $\rho\in\Sigma^1$ $v(\rho)-v_0(\rho)\to 0$. Если, кроме того, $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\mathcal{S}_\nu}\prod\limits_{k=2}^n \Delta_k(\rho)\neq 0$ для всех $\nu=\overline{1,N}$, то*

$$\lim_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma^1}(v(\rho)-v_0(\rho)) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ignatyev M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. Vol. 71. P. 1531–1555.