Проводятся дальнейшие исследования в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М. : Наука, 1980. 256 с.

2. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М. : Наука, 1987. 368 с.

3. *Goncharov V. Yu.* On some problems of optimal beam design // Международная конференция по математической теории управления и механике: тез. докл. М. : МИАН, 2015. С. 169–170.

УДК 517.95;517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А. П. Гуревич, В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

1. Рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где $q(x) \in C[0,1]$, комплекснозначная,α_1, α_2, β_1, β_2 —комплекснозначные числа и $\psi(x) \in C^1[0,1]$ комплекснозначна, причем

$$\psi'(0) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \psi'(1) + \alpha_2\psi(0) + \beta_2\psi(1) = 0. \tag{4}$$

В [1], используя резольвентный подход в методе Фурье и прием А. Н. Крылова [2] об ускорении сходимости рядов, подобных рядам Фурье, получено классическое решение задачи (1)–(2) и начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{5}$$

при минимальных условиях на $\varphi(x)$. Теперь схожий результат получается в случае начальных условий (3). Представляя $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \tag{6}$$

где $\psi_1(x) \in C^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = \psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$ и $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора $Ly = -y'' + q(x)y$, $y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0$, причем

[1]Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014К).

$y \in C^2[0,1]$), получаем следующую формулу для формального решения по методу Фурье:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{7}$$

где $u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_0} + \sum\limits_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda \psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$, $u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_0} + \sum\limits_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$, $u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_0} + \sum\limits_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}\times$ $\times(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$, $R_\lambda^0 = (L_0-\lambda E)^{-1}$, L_0 есть L при $q(x)\equiv 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, E — единичный оператор, λ — спектральный параметр; γ_n — контур в λ-плоскости, содержащий внутри себя лишь одно собственное значение оператора L, которые являются простыми при $n \ge n_0$ и удовлетворяют асимптотическим формулам: $\lambda_n = \rho_n^2$ $(\lambda = \rho^2, Re\rho \ge 0)$, $\rho_n = n\pi + O(\frac{1}{n})$; γ_0-контур, содержащий внутри себя все собственные значения оператора L, не попавшие в γ_n при $n \ge n_0$, μ_0 — фиксированное число, расположенное вне контуров γ_0 и γ_n при $n \ge n_0$, $g = (L-\mu_0 E)\psi_2$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\widetilde{\psi_1}(\tau)d\tau,$$

где $\widetilde{\psi_1}(x) = \psi_1(x)$ *при* $x \in [0,1]$, $\widetilde{\psi_1}(x)$ *— четная,* $\widetilde{\psi_1}(x+2) = \widetilde{\psi_1}(x)$ *и* $\widetilde{\psi_1}(x) \in C^1(-\infty,\infty)$.

Лемма 2. *Ряды* $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ *допускают почленное дифференцирование дважды по* x *и* t *при* $x \in [0,1]$ *и* $t \in (-\infty,\infty)$.

На основании лемм 1 и 2 получаем

Теорема 1. *Формальное решение* (7) *есть классическое решение задачи* (1)–(3) *при минимальных условиях* (4) *на* $\psi(x)$.

2. Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и краевыми условиями

$$u_x'(0,t) + \beta u_x'(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{8}$$

где $q(x)$ — такая же, как и в п. 1, α, α_1, β, β_1 — комплексные числа, комплекснозначная $\psi(x) \in C^1[0,1]$ удовлетворяет условиям

$$\psi'(0) + \beta\psi'(1) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \alpha\psi(0) + \psi(1) = 0, \tag{9}$$

которые являются минимальными для классического решения.

Задачу (1), (3), (8) изучаем при условии $1+\alpha\beta \neq 0$, которое необходимо и достаточно для регулярности краевых условий соответствующей спектральной задачи по методу Фурье. Случай начальных условий (5) вместо (3) рассмотрен в [3]. Для задачи (1), (3), (8) сохраняется представление (6) для функции $\psi(x)$, но теперь $\psi_2(x) \in D_L$ — область определения оператора

$$Ly = -y'' + q(x)y, y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = \alpha y(0) + y(1) = 0, \quad (10)$$

собственные значения которого образуют две последовательности: $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda'_n = {\rho'}_n^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$) и имеют асимптотику: $\rho_n = 2n\pi + \zeta_1 + \varepsilon_n$, $\rho'_n = 2n\pi + \zeta_2 + \varepsilon'_n$, где $\zeta_{1,2} = -i\ln(d \pm \sqrt{d^2-1})$, $d = -(\alpha+\beta)/1+\alpha\beta$, $\varepsilon_n = o(1)$, $\varepsilon'_n = o(1)$.

Обозначим через γ_n при $n \geq n_0$ объединение при отображении $\lambda = \rho^2$ образов двух непересекающихся окружностей $\{\rho \mid\mid \rho + 2n\pi + \zeta_j \mid = \delta\}$ ($j = 1, 2$), если $\zeta_1 \neq \zeta_2$ или один такой контур, если $\zeta_1 = \zeta_2$ и $\delta > 0$ достаточно мало; n_0 таково что при $n \geq n_0$ внутри каждого γ_n находятся λ_n и λ'_n (которые могут и совпадать).

Для формального решения задачи (1), (3), (8) сохраняется формула (7), но теперь L — оператор, определенный в (10), а L_0 совпадает с L при $q(x) \equiv 0$ и $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Сохраняются также и леммы 1 и 2, но в лемме 1 функция $\widetilde{\psi_1}(x)$ теперь удовлетворяет условиям: $\widetilde{\psi_1}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0,1]$, $\widetilde{\psi_1}(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}\left[(1-\alpha\beta)\widetilde{\psi}(x) - 2\beta\widetilde{\psi}(1-x)\right]$, $\widetilde{\psi_1}(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}\left[-2\alpha\widetilde{\psi_1}(x) + (\alpha\beta-1)\widetilde{\psi_1}(1-x)\right]$ и $\widetilde{\psi}(x) \in C^1(-\infty, \infty)$.

Теорема 2. *Формальное решение* (7) *есть классическое решение задачи* (1), (3), (8) *при условиях* (9) *на* $\psi(x)$.

Аналогично (даже проще) с помощью резольвентного подхода получается классическое решение задачи (1), (3) и краевыми условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ при минимальных требованиях на $\psi(x)$: $\psi(x) \in C^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Отметим, что эта задача вместе с задачами из пунктов 1 и 2 исчерпывают весь класс смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (3), для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. Для $q(x)$ и $\psi(x)$ вещественных классическое решение задачи (1), (3) и условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ при минимальных требованиях на $\psi(x)$ получено в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630.

2. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

3. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167.

4. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

УДК 519.651

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АФФИННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГИПЕР–БЕНТ–ФУНКЦИЙ

М. К. Датиев, А. В. Иванов (Москва, РФ)
mkdat05@rambler.ru

В прикладных областях криптографии значительную роль играют булевы функции. Гипер-бент-функции (ГБФ) — это специальный класс булевых функций, впервые описанный в работе [1]. Данный класс функций обладает рядом полезных свойств, что позволяет использовать класс гипер-бент-функций во многих областях криптографии.

При решении задач анализа криптографических алгоритмов, построенных с использованием преобразований конечных полей, часто возникает следующая проблема: найти эффективное приближение некоторой функции, заданной на конечном поле, в определенном множестве функций — классе приближений [2].

Многими авторами изучался вопрос нахождения лучшего приближения произвольной булевой функции в классе аффинных функций. Как известно, вероятность совпадения значений любой булевой функции от n переменных со значениями ее лучшей аффинной аппроксимации не меньше величины $\frac{1}{2} + 2^{-\frac{n}{2}-1}$ [2]. Функции, для которых эта оценка обращается в равенство, были названы «бент-функциями» [3].

Для исследования свойств булевых функций от n переменных, возможно рассмотрение их представлений в виде многочленов от одной переменной над полем $\mathrm{GF}(2^n)$. Данный факт позволяет использовать соответствующий алгебраический аппарат [4]. В работе [5] для одного из таких специальных представлений используется термин «приведенное представление в базисе векторного пространства $\mathrm{GF}(2^n)_{\mathrm{GF}(2)}$». В том же исследовании [5] изучался класс, так называемых, собственных мономиальных функций, заданных приведенными представлениями в базисе пространства $\mathrm{GF}(2^n)_{\mathrm{GF}(2)}$, двойственном к некоторому полиномиальному базису. Показано, что в данном классе для бент-функций от n переменных степени нелинейности не выше $\frac{n}{2} - 1$ существует более точное приближение, чем в классе линейных функций [5]. В работе [1] Йозефом и Гонгом построен такой класс отображений из поля $\mathrm{GF}(2^n)$ в поле $\mathrm{GF}(2)$, который наихудшим образом приближается как линейными функциями,