УДК 517.9

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА В МОДЕЛЬНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. М. Королев (Москва, Россия)
korolevgm95@mail.ru

Рассматривается многомерная нелокальная по времени задача для уравнения теплопроводности. Указаны точные экспоненциальные классы единственности решения. Установлена разрешающая формула с функцией Грина, исследованной вблизи нуля и на бесконечности. Оценки функции Грина дают возможность обосновать разрешимость нелокальной задачи в той же шкале экспоненциальных пространств.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальная задача, функция Грина, асимптотическое разложение, экспоненциальные классы функций.

ESTIMATES OF THE GREEN'S FUNCTION IN MODEL NONLOCAL PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

G. M. Korolev (Moscow, Russia)
korolevgm95@mail.ru

Multi-dimensional nonlocal in time problem for the heat equation is considered. An exact description of the uniqueness classes is given. We establish a resolving formula with Green's function investigated near zero and at infinity. Estimates of the Green's function make it possible to prove solvability of a nonlocal problem on the same scale exponential spaces.

Keywords: heat equation, nonlocal in time problem, Green's function, asymptotic expansion, exponential classes of functions.

Рассматриваем многомерную нелокальную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$.

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и число $T > 0$ считаем заданными. Нелокальное условие выражает усреднение функции $u(x,t)$ по ее значениям в начальный и финальный моменты времени. Близкие к (1) задачи рассматривались в [1, 2]. Проводя исследование, мы пользуемся схемой, разработанной в [3–5]. Некоторые детали подробнее приводятся в наших прежних публикациях [6, 7].

Так, в частности, для задачи (1) найдены экспоненциальные классы единственности решения с оценкой

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp\left(\sigma |x|\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где M — положительная константа, зависящая от функции $u = u(x,t)$, а показатель σ удовлетворяет условию $\sigma < \sigma_0(T) \equiv \sqrt{\pi/2T}$.

Решение задачи (1) с учетом (2) представимо формулой Пуассона

$$u(x,t)|_{0<t\leqslant T} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy.$$

При этом начальное условие $u_0(x) \equiv u(x,0)$ выражается формулой

$$u_0(x) = \varphi(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Здесь $g_T(x)$ — функция Грина задачи (1), имеющая вид

$$g_T(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\exp\left(|\xi|^2\,T\right)+1} \exp\left(i\xi x\right) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Данный интеграл не вычисляется в явном виде, и потому важен следующий результат.

Теорема. *Для функции $g_T(x)$, определенной формулой* (4), *справедливо разложение в ряд по первым функциям Ханкеля*

$$g_T(x) = \frac{(\pi|x|)^{-\nu}}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\right), \tag{5}$$

со значением $\nu = (n-2)/2$ и числами

$$z_k \equiv \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2T}}\,(1+i), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{6}$$

Ряд (5) *сходится всюду при $|x| \neq 0$.*

Отсюда, с использованием асимптотики функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(iz - \frac{\pi i}{4}(2\nu+1)\right)\left(1 + O(|z|^{-1})\right), \quad |z| \to \infty,$$

взятой на луче $\arg z = \pi/4$, получено представление функции Грина

$$g_T(x) = (2|x|)^{-(n-1)/2}\,(\pi\,T)^{-(n+1)/4} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\,|x|\right) \times$$
$$\times \left[\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\,|x| - \frac{\pi}{8}(n+1)\right) + O\left(|x|^{-1}\right)\right], \quad |x| \to \infty. \tag{7}$$

Основной компонент в (7) соответствует значению z_0 из формулы (6).

Разложение функции Грина, удобное вблизи нуля, имеет вид

$$g_T(x) = \frac{1}{(4\pi T)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - \frac{C_n}{2^k}\right) \zeta\left(k + \frac{n}{2}\right) \left(\frac{|x|^2}{4T}\right)^k, \qquad (8)$$

где $C_n = 2^{-(n-2)/2}$, а $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, и $0 \cdot \zeta(1+0) = 1$.

Полагая $n = 1$ и $T = 1$, получаем из (7) и (8) соответствующие выражения для одномерной функции Грина

$$g_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|x|\right) \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|x| + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(|x|^{-1}\right)\right],$$

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2^k}\right) \zeta\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Последние две формулы полезны при проведении численных расчетов.

Кроме того, используя найденные оценки функции Грина, планируется обосновать разрешимость нелокальной задачи (1) в экспоненциальных классах (2) при прежнем ограничении $\sigma < \sigma_0(T) \equiv \sqrt{\pi/2T}$. Центральный момент здесь — анализ разрешающей формулы (3).

Автор выражает признательность своему научному руководителю Тихонову Ивану Владимировичу за полезные замечания и конструктивные предложения при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Вабищевич П. Н.* Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 7. С. 1193–1199.

[2] *Кангужин Б. Е.* О единственности решения нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова / Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 130–132.

[3] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Докл. АН. 2003. Т. 389, №4. С. 465–467.

[4] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 3. С. 396–405.

[5] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 9. С. 71–102.

[6] *Королев Г. М.* Специальная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2018 : материалы научн. конф., 9–13 апреля 2018 г. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. С. 96–100.

[7] *Королев Г. М.* Об одной задаче с нелокальным усреднением для многомерного уравнения теплопроводности // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 168–171.