УДК 517.5

Сравнение скорости сходимости стандартного чисто жадного алгоритма и чисто жадного алгоритма по паре словарей[1]

А. С. Орлова (Москва, Россия)
Anastasia-Orlova1@ya.ru

В данной работе сравниваются скорости сходимости стандартного чисто жадного алгоритма и его модификации — чисто жадного алгоритма по паре словарей. Показано, что чисто жадный алгоритм по паре словарей в некоторых случаях "быстрее", а в некоторых — "медленнее" чисто жадного алгоритма по каждому словарю в отдельности. Если сравнивать чисто жадный алгоритм по паре словарей и чисто жадный алгоритм по их объединению, то также реализуемы обе вышеописанные ситуации.

Ключевые слова: чисто жадный алгоритм, чисто жадный алгоритм по паре словарей, сходимость.

The convergence rate comparison of a standard pure greedy algorithm and a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries[1]

A. S. Orlova (Moscow, Russia)
Anastasia-Orlova1@ya.ru

In this paper the convergence rates of a standard pure greedy algorithm and its modification, a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries, are compared. It is shown that a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries is in some cases "faster" and in some cases it is "slower" than a pure greedy algorithm over each dictionary separately. If we compare a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries and a pure greedy algorithm over union of them, then similarly both situations described above are realizable.

Keywords: pure greedy algorithm, pure greedy algorithm over a pair of dictionaries, convergence.

Введение.

В случае ортогонального словаря чисто жадные разложения [1] в гильбертовом пространстве H являются обобщением разложения вектора в ряд Фурье. В общем случае чисто жадные разложения совпадают с орторекурсивными разложениями, если векторы словаря дополнительно выбираются на каждом шаге локально оптимальным образом. Более точно, для вектора $x \in H$ определим чисто жадное разложение по нормированному словарю D следующим образом. Индуктивно определим последовательность остатков $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность коэффициентов

$\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность элементов словаря $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0(x) = x;$$
$$e_n(x) \in D: \ \ |(r_{n-1}(x), e_n(x))| = \sup_{d \in D} |(r_{n-1}(x), d)|,$$
$$\hat{x}_n = (r_{n-1}(x), e_n(x)), \quad r_n(x) = r_{n-1}(x) - \hat{x}_n e_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда чисто жадным разложением вектора x по словарю D называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n(x)$.

Чисто жадные алгоритмы по паре словарей, в свою очередь, являются одним из многих обобщений [2] чисто жадных алгоритмов. Чисто жадное разложение вектора по паре словарей D_1 и D_2 определяется аналогично, но на нечётных шагах в качестве словаря берётся D_1, а на чётных — D_2.

Стандартный чисто жадный алгоритм и чисто жадный алгоритм по паре словарей.

Сравнивая чисто жадные алгоритмы по паре словарей и по каждому в отдельности, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*
1) чисто жадный алгоритм по словарю D_1 и чисто жадный алгоритм по словарю D_2 сходятся за конечное число шагов,
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 не сходится за конечное число шагов.

Но за счёт того, что при разложении по паре словарей множество векторов, по которому происходит разложение, больше, чем в случае разложения по одному словарю, чисто жадный алгоритм по паре словарей может быть "быстрее", чем стандартный алгоритм.

Теорема 2. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*
1) чисто жадный алгоритм по словарю D_1 и чисто жадный алгоритм по словарю D_2 не сходятся за конечное число шагов,
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 сходится за конечное число шагов.

Стандартный чисто жадный алгоритм по объединению словарей и чисто жадный алгоритм по паре словарей.

Дополнительно к рассмотрению разложения по словарям D_1 и D_2 в отдельности сравним чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 с чисто жадным алгоритмом по их объединению $D = D_1 \cup D_2$. В этом случае верен аналог Теоремы 1:

Теорема 3. *Существуют два ортонормированных словаря* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ *такие, что*
1) чисто жадный алгоритм по словарю $D = D_1 \cup D_2$ *сходится за конечное число шагов,*
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 *и* D_2 *не сходится за конечное число шагов.*

Но, с другой стороны, некоторое ограничение, которое даёт разделение словаря $D = D_1 \cup D_2$ на два и проведение алгоритма по паре словарей, в некоторых случаях оказывается “полезным”.

Теорема 4. *Существуют два нормированных словаря* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ *такие, что*
1) существует реализация чисто жадного алгоритма по словарю $D = D_1 \cup D_2$*, которая не сходится за конечное число шагов,*
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 *и* D_2 *сходится за конечное число шагов.*

Вывод.

Сравнивая стандартный чисто жадный алгоритм и чисто жадный алгоритм по паре словарей, можно сделать вывод о том, что алгоритм по паре словарей может быть “быстрее” классического, с другой стороны реализуема и обратная ситуация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 38, № 1. P. 173–187.

[2] *Temlyakov V.* Greedy Approximation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 432 p.