УДК 517.518+517.983

Преддуальные пространства для пространства (p, q)-мультипликаторов и их применение в задаче Стечкина о приближении операторов дифференцирования[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)
vitalii.arestov@urfu.ru

Будет приведена конструкция преддуального пространства $F_{p,q}$ для пространства $M_{p,q}$ мультипликаторов пары (L_p, L_q) пространств Лебега на $\mathbb{R}^m$, описанная в других терминах в сравнении с преддуальным пространством $A_{p,q}$ A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry (1967). Будет обсуждаться применение пространств $F_{p,q}$ в задаче Стечкина о приближении операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами в пространствах Лебега L_γ, $1 \le \gamma \le \infty$, на числовой оси.

Ключевые слова: пространства мультипликаторов, преддуальное пространство, оператор дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00526).

Predual spaces for the space of (p, q)-multipliers and their application in Stechkin's problem on approximation of differentiation operators[1]

V. V. Arestov (Ekaterinburg, Russia)
vitalii.arestov@urfu.ru

A construction of the predual space $F_{p,q}$ will be given for the space $M_{p,q}$ of multipliers of the pair (L_p, L_q) of Lebesgue spaces on $\mathbb{R}^m$ described in other terms in comparison with the predual space $A_{p,q}$ of A.Figa-Talamanca and G.I.Gaudry (1967). We will discuss the application of the spaces $F_{p,q}$ in Stechkin's problem on the best approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the Lebesgue spaces L_γ, $1 \le \gamma \le \infty$, on the real axis.

Keywords: spaces of multipliers, predual space, differentiation operator, Stechkin problem, Kolmogorov inequality.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00526).

Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, есть m-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $t\eta = \sum_{j=1}^{m} t_j \eta_j$ точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$

$\in \mathbb{R}^m$ и нормой $|t| = \sqrt{tt}$. Ниже используются стандартные обозначения классических функциональных комплексных пространств: $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \le \gamma < \infty$, — пространство Лебега измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций x, у которых $|x|^\gamma$ суммируем на $\mathbb{R}^m$; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, $C = C(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, и $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ — подпространство функций из C, имеющих нулевой предел на бесконечности.

Пусть далее $\mathcal{S}$ есть пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций. Значение функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ на элементе $x \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, x \rangle$. Пространство $\mathcal{S}'$ содержит множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ функций x, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условию $\int (1+|t|)^d |x(t)| dt < \infty$ с некоторым $d = d(x) \in \mathbb{R}$; здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указывается. Функции $x \in \mathcal{L}$ сопоставляется функционал $x \in \mathcal{S}'$ по формуле $\langle x, \phi \rangle = \int x(t)\phi(t) dt$, $\phi \in \mathcal{S}$.

Преобразование Фурье функций (по крайней мере, из пространства $L = L_1(\mathbb{R}^m)$) определим формулой $\widehat{x}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} x(\eta)\, d\eta$; обратное преобразование Фурье будем обозначать символом $\check{x}$. Преобразование Фурье $\widehat{\theta}$ функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathcal{S}'$, действующий по формуле $\langle \widehat{\theta}, x \rangle = \langle \theta, \widehat{x} \rangle$, $x \in \mathcal{S}$.

Сопряженность пространства инвариантных операторов

Для $1 \le p, q \le \infty$ обозначим через $\mathcal{T}_{p,q} = \mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_q = L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно (любого) сдвига. Свойствам инвариантных ограниченных операторов посвящены обширные исследования (см. [1–3] и приведенную там библиографию). Так известно, что если $p > q$, то [1, теорема 1.1] при $p < \infty$ множество $\mathcal{T}_{p,q}$ состоит лишь из оператора $T \equiv 0$, а при $p = \infty$ сужение оператора $T \in \mathcal{T}_{\infty,q}$ на множество $(L_\infty)_0$ функций из L_∞, имеющих нулевой предел на бесконечности, есть нулевой оператор. В связи с этим ниже будет предполагаться, что $1 \le p \le q \le \infty$.

A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry (1967) в совместной работе [4] доказали, что при $1 \le p \le q < \infty$ пространство $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ линейных ограниченных операторов из $L_p(G)$ в $L_q(G)$ на локально компактной абелевой группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного ими функционального пространства $A_{p,q} = A_{p,q}(G)$. Точнее, в [5] и [4] были построены функциональные пространства $A_{p,q} = A_{p,q}(G)$ такие, что пространство $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ инвариантных операторов изометрически изоморфно двойственному пространству $A^*_{p,q}$ для пространства $A_{p,q} = A_{p,q}(G)$ функций на G, являющихся суммами функциональных рядов

$$h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu\colon \quad f_\nu \in C_{00}, \quad g_\nu \in C_{00}; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_p} \|g_\nu\|_{L_{q'}} < \infty, \qquad (1)$$

где $C_{00} = C_{00}(G)$ есть пространство непрерывных функций с компактным носителем на G. Норма элемента (функции) $h \in A_{p,q}$ определяется формулой

$$\|h\|_{A_{p,q}} = \inf \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_p} \|g_\nu\|_{L_{q'}},\ h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \Big\};$$

здесь нижняя грань берется по всем представлениям (1) функции h. Имеет место вложение $A_{p,q}(G) \subset L_r(G)$, $1/r = 1/p - 1/q$. Изоморфизм между пространствами $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ и $A^*_{p,q}$ осуществляется по следующему правилу: элементу $T \in \mathcal{T}_{p,q}(G)$ сопоставляется функционал $\varphi_T(h) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (Tf_\nu * g_\nu)(0)$, $h \in A_{p,q}$. Двумя годами ранее (1965) А. Фига-Таламанка [5] получил подобный результат для случая $1 < q = p < \infty$.

Относительно пары линейных нормированных пространств X, Y со свойством, что Y является сопряженным для X, т. е. $X^* = Y$, говорят также, что пространство X является преддуальным для Y. В этой терминологии пространство $A_{p,q}(G)$ является преддуальным для пространства $\mathcal{T}_{p,q}(G)$.

Результаты работ [5] и [4] справедливы, в частности, для пространств $\mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ линейных ограниченных операторов из пространства $L_p(\mathbb{R}^m)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно группы сдвигов.

Пространство (p,q)-мультипликаторов и ему предуальное пространство $F_{p,q}$

Известно (см. [1, теорема 1.2] или [3, гл. I, теорема 3.16]), что если $q \ge p$, то на $\mathcal{S}$ оператор $T \in \mathcal{T}_{p,q}$ имеет вид свертки $Tx = \theta * x$, $x \in \mathcal{S}$, с элементом $\theta = \theta_T \in \mathcal{S}'$. Множество $M_{p,q} = \{\theta_T\colon T \in \mathcal{T}_{p,q}\} \subset \mathcal{S}'$ является банаховым пространством относительно нормы $\|\theta_T\|_{M_{p,q}} = \|T\|_{L_p \to L_q}$. Элементы $\theta \in M_{p,q}$, $1 \le p \le q \le \infty$, называют (p,q)-мультипликаторами.

Конструктивное описание мультипликаторов известно лишь в отдельных случаях. Известна структура пространств $M(2,2)$ и $M(p,\infty) = M(1,p')$ (см., например, [1, § 1.2], [3, гл. 1, § 3]); а именно, справедливы равенства (вместе с равенством норм элементов)

$$M_{2,2} = \widehat{L}_\infty = \{\widehat{\theta} \colon \theta \in L_\infty\},$$

$$M_{p,\infty} = M_{1,p'} = L_{p'} \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$
$$M_{\infty,\infty} = M_{1,1} = V;$$

здесь $V = V(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^m$.

При $1 \le p \le q \le \infty$ определим на множестве $\mathcal{S}$ функционал

$$\|\phi\|_{p,q} = \sup\{|\langle\theta,\phi\rangle| \colon \theta \in M_{p,q},\ \|\theta\|_{M_{p,q}} \le 1\}, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

При всех $1 \le p \le q \le \infty$ функционал (2) на множестве $\mathcal{S}$ конечен и является нормой.

При $1 \le p \le q \le \infty$ обозначим через $F_{p,q} = F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ пополнение пространства $\mathcal{S}$ относительно нормы (2). Приведем несколько свойств пространств $F_{p,q}$ для конкретных значений параметров.

Лемма 1. *Пространство $F_{p,q}$ обладает следующими свойствами.*

1. *При $q = \infty$ $(p = 1)$*

$$F(p,\infty) = F(1,p') = L_p, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$F(\infty,\infty) = F(1,1) = C_0.$$

2. *При $q = p = 2$*

$$F_{2,2} = \check{L} = \{f \in C_0 \colon \widehat{f} \in L\}, \quad \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2,2}.$$

3. *Пусть $q = p$ и $\overline{p} = \max\{p,p'\}$. Пространство $F_{p,p}$ по $\overline{p}$ не убывает, а точнее, если $2 \le \overline{p}_1 \le \overline{p}_2 \le \infty$, то*

$$F_{p_1,p_1} \subset F_{p_2,p_2} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p_2,p_2}} \le \|f\|_{F_{p_1,p_1}}, \quad f \in F_{p_1,p_1},$$

в частности, при всех значениях p, $1 \le p \le \infty$,

$$F_{p,p} \subset C_0 \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \ge \|f\|_{C_0}, \quad f \in F_{p.p},$$
$$F_{2,2} \subset F_{p,p} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \le \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2.2}.$$

Основным в данной работе является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых $1 \le p \le q \le \infty$ пространство $M_{p,q}$ является сопряженным для пространства $F_{p,q}$:*

$$F^*_{p,q} = M_{p,q}.$$

Теорему 1 можно, в частности, воспринимать как еще одно доказательство сопряженности пространства $M_{p,q}$, $1 \le p \le q \le \infty$.

Согласно результатам работы [4] и теореме 1 пространства $A_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ и $F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$, по крайней мере, при $1 \le p \le q < \infty$, имеют одно и то же сопряженное пространство $M_{p,q}$. В общем случае отсюда не следует, что эти два пространства совпадают. Тем не менее, в данной конкретной ситуации имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *При всех $1 \le p \le q < \infty$ пространства $F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ и $A_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ совпадают:*

$$F_{p,q}(\mathbb{R}^m) = A_{p,q}(\mathbb{R}^m).$$

При $q = p$ конструкция пространства $F_p = F_{p,p}$ и доказательство теорем 1 и 2 были даны в работе автора [6]. Исследование общего случая $p \le q$ потребовало привлечения дополнительных соображений.

Применение в задаче Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования

Пусть p, q, r, s — параметры, удовлетворяющие ограничениям $1 \le p, q, r, s \le \infty$. Для целого $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,p}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_p$. В пространстве $W^n_{r,p}$ выделим класс

$$Q^n_{r,p} = \{f \in W^n_{r,p} \colon \|f^{(n)}\|_{L_p} \le 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}(L_r, L_s)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L_r в L_s, а через $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$ при $N > 0$ — множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_s} \le N$. Пусть $0 \le k < n$ — целые, причем $k > 0$, если $r = s$. Для оператора $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ положим

$$U(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} \colon f \in Q^n_{r,p}\};$$

если разность $f^{(k)} - Tf$ не принадлежит пространству L_q, то считаем, что $\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} = \infty$. При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{B}(N; L_r, L_s)\} \qquad (3)$$

есть наилучшее приближение (в пространстве L_q) оператора дифференцирования D^k на классе $Q^n_{r,p}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$. Задача Стечкина состоит в вычислении величины (3) и экстремального оператора, на котором в (3) достигается нижняя грань; см. [7] и обзор исследований в этой задаче в [8].

Пусть K есть наилучшая константа в неравенстве

$$\|x^{(k)}\|_C \le K\|x\|_{r,s}^{\alpha}\|x^{(n)}\|_{p,q}^{1-\alpha}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{n-k+1/q-1/p}{n+1/q-1/p+1/r-1/s}, \quad \beta = 1-\alpha.$$

Теорема 3. *Если $s \ge r \ge 1$, $q \ge p > 1$, причем $s > r$ при $k = 0$, то для любого значения $N > 0$ имеет место равенство*

$$E_{n,k}(N) = \beta\alpha^{\alpha/\beta}K^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta},$$

где K — наименьшая константа в (4).

Обсудим случай $p = q = \infty$, $1 \le s = r \le \infty$, исследованный в [9, 10]. В этом случае неравенство (4) имеет вид

$$\|x^{(k)}\|_C \le K_{n,k}(r)\|x\|_{L(r,r)}^{\frac{n-k}{n}}\left(\|x^{(n)}\|_{L_\infty}\right)^{\frac{k}{n}}. \tag{5}$$

При $s = r = \infty$ это есть классический вариант неравенства между равномерными нормами производных, изученный А. Н. Колмогоровым. В случае $r = 2$ неравенство (5) принимает вид

$$\|x^{(k)}\|_C \le K_{n,k}(2)\|\widehat{x}\|_{L}^{\frac{n-k}{n}}\left(\|x^{(n)}\|_{L_\infty}\right)^{\frac{k}{n}}. \tag{6}$$

Для наилучших констант в (5) и, в частности, в (6) справедливо [9, 10] неравенство $K_{n,k}(r) \le K_{n,k}(\infty)$, $1 \le r \le \infty$. Для нечетных $n \ge 3$ имеет место равенство $K_{n,k}(r) = K_{n,k}(\infty)$, $1 \le r \le \infty$. Для четных $n \ge 2$ это, вообще говоря, уже не так. По крайней мере, при $n = 2$ $(k = 1)$, $r = 2$ неравенство строгое [9]:

$$K_{2,1}(2) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\right)^{-1/2} < \ K_{2,1}(\infty) = \sqrt{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.

[2] *Larsen R.* An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc. : Springer, 1971. 282 p.

[3] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 333 с.

[4] *Figà-Talamanca A., Gaudry G. I.* Density and representation theorems for multipliers of type (p, q) // J. Australian Math. Soc. 1967. Vol. 7, № 1. P. 1–6.

[5] *Figà-Talamanca A.* Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.

[6] *Арестов В. В.* О сопряженности пространства мультипликаторов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–15.

[7] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

[8] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

[9] *Арестов В. В.* Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 34–56.

[10] *Arestov V.* Uniform approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the space L_r // Anal. Math. 2020. Vol. 46, № 3. P. 425–445.