УДК 517.518

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ШВАРЦА И КРУГИ ОДНОЛИСТНОСТИ ПОДКЛАССА ОГРАНИЧЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия)
Kudryavceva_OS@mail.ru

В классе голоморфных функций, отображающих единичный круг в себя и имеющих внутреннюю и две граничные неподвижные точки, получено описание множества значений производной в нуле в терминах угловых производных в граничных неподвижных точках. Также на этом классе функций найдены круги однолистности.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, области однолистности.

INEQUALITY OF SHWARZ TYPE AND DISKS OF UNIVALENCE FOR SUBCLASS OF BOUNDED HOLOMORPHIC FUNCTIONS [1]

O. S. Kudryavtseva (Volgograd, Russia)
Kudryavceva_OS@mail.ru

In the class of holomorphic functions that mapping the unit disk into itself and having an inner and two boundary fixed points, the range of values for derivative at zero in terms of angular derivatives at the boundary fixed points is given. Also on this class of functions the disks of univalence are found.

Keywords: holomorphic mapping, fixed points, angular derivative, domains of univalence.

Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность голоморфных функций, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ в себя. Из классической леммы Шварца [1] следует, что для функции f, принадлежащей классу $\mathcal{B}$ и сохраняющей начало координат, справедливо неравенство

$$|f'(0)| \leqslant 1, \tag{1}$$

равенство в котором достигается в случае тождественного отображения.

В. В. Горяйнов получил описание множества значений $f'(0)$ на подклассе функций, которые, кроме начала координат, оставляют неподвижной граничную точку $z = 1$ и имеют в ней конечную угловую производную $f'(1)$. При этом множество значений $f'(0)$ установлено в зависимости от угловой производной $f'(1)$. Более точно, обозначим

$$\mathcal{B}[0,1] = \left\{ f \in \mathcal{B} \colon f(0) = 0,\ \angle\lim_{z\to 1} f(z) = 1,\ \angle\lim_{z\to 1} f'(z) = f'(1) < \infty \right\}.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

Теорема А ([2]). *Пусть $f \in \mathcal{B}[0,1]$ и $f'(1) = \alpha > 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$\left| f'(0) - \frac{1}{\alpha} \right| \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha}. \tag{2}$$

При этом равенство достигается на функции

$$f(z) = z\frac{\alpha z - (\alpha - 2)}{\alpha - (\alpha - 2)z}. \tag{3}$$

В данной работе получено уточнение множества значений $f'(0)$ в случае, когда существует вторая неподвижная граничная точка $z = -1$ и $f'(-1) < \infty$. Обозначим

$$\mathcal{B}[-1,0,1] = \left\{ f \in \mathcal{B}[0,1] \colon \angle \lim_{z \to -1} f(z) = -1, \angle \lim_{z \to -1} f'(z) = f'(-1) < \infty \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{B}[-1,0,1]$ и $f'(1) = \alpha > 1$, $f'(-1) = \beta > 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$\left| f'(0) - \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - 1} \right| \leqslant 1 - \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - 1}. \tag{4}$$

При этом равенство достигается на функции

$$f(z) = z\,\frac{(1 - \alpha\beta)z^2 + 2(\alpha - \beta)z + \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 3}{\big(\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 3\big)z^2 + 2(\alpha - \beta)z + 1 - \alpha\beta}.$$

Заметим, что предельный переход в неравенствах (2), (4) при $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ приводит к неравенству (1).

Классическая теорема Э. Ландау утверждает, что на классе $\mathcal{B}_N[0]$, состоящем из функций, сохраняющих точку $z = 0$ и у которых модуль производной в точке $z = 0$ отделен от нуля:

$$\mathcal{B}_N[0] = \{ f \in \mathcal{B} \colon f(0) = 0, |f'(0)| \geqslant 1/N \}, \quad N > 1,$$

наибольшей областью однолистности является круг.

Теорема В ([3]). *Пусть $f \in \mathcal{B}_N[0]$. Тогда f однолистна в круге $|z| < R(N)$, где $R(N) = N - \sqrt{N^2 - 1}$. При этом для каждого $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, функция*

$$f_\varkappa(z) = z\,\frac{\varkappa - Nz}{N\varkappa - z}$$

принадлежит классу $\mathcal{B}_N[0]$ *и имеет в точке* $z(\varkappa) = \varkappa R(N)$ *нулевую производную.*

Следствиями теоремы Э. Ландау с учетом неравенств (2), (4) являются результаты о кругах однолистности на подклассах $\mathcal{B}[0]$, имеющих граничные неподвижные точки с конечными угловыми производными.

Теорема C ([2]). *Пусть* $f \in \mathcal{B}[0,1]$ *и* $f'(1) = \alpha$, $1 < \alpha < 2$. *Тогда* f *однолистна в круге*

$$|z| < \frac{1 - \sqrt{\alpha - 1}}{1 + \sqrt{\alpha - 1}}.$$

При этом функция (3) принадлежит классу $\mathcal{B}[0,1]$, $f'(1) = \alpha$ *и имеет нулевую производную в точке* $z_\alpha = -(1 - \sqrt{\alpha - 1})/(1 + \sqrt{\alpha - 1})$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{B}[-1,0,1]$ *и* $f'(1) = \alpha > 1$, $f'(-1) = \beta > 1$. *Тогда при* $\alpha \leqslant 2$ *и любом* β, *а также при* $\alpha > 2$ *и* $\beta < (3 - 2\alpha)/(2 - \alpha)$ *функция* f *однолистна в круге*

$$|z| < \frac{\alpha\beta - 1 - 2\sqrt{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha + \beta - 2)}}{2(\alpha + \beta) - \alpha\beta - 3}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с.

[2] *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017 Т. 208, № 3. С. 54–71.

[3] *Landau E.* Der Picard—Schottkysche Satz und die Blochsche Konstant // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl 1926. Vol. 32, P. 467–474.