

**ПРЯМЫЕ СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И ОПЫТ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ О ПРОГИБАХ БАЛОК И ПЛАСТИН**

Р. В. Арутюнян (Москва, Россия)

rob57@mail.ru

В статье описан опыт применения прямых сеточных методов решения вариационных задач на примере краевых задач теории упругости о прогибах балок и пластин. Минимизация сеточных аналогов функционалов осуществлялась при помощи программы MINV, реализующей одну из модификаций метода покоординатного спуска. Отмечены вопросы устойчивости и сходимости методов. В качестве примеров рассмотрены задача о брахистохроне, расчет прогибов балки и пластины. Библиогр. 5 назв. Ил.3.

Ключевые слова: теория упругости, вариационная постановка, сеточные методы, численная оптимизация, задача о брахистохроне, расчет прогибов балок и пластин.

**DIRECT GRID METHODS FOR SOLVING VARIATIONAL
PROBLEMS AND EXPERIENCE OF THEIR APPLICATION
IN PROBLEMS OF DEFLECTIONS OF BEAMS AND PLATES**

R. V. Harutyunyan (Moscow, Russia)

robert57@mail.ru

The article describes the experience of using direct grid methods for solving variational problems on the example of boundary value problems of elasticity theory on deflections of beams and plates. Minimization of grid analogues of functionals was carried out using the MINV program, which implements one of the modifications of the coordinate descent method. The questions of stability and convergence of methods are noted. As examples we consider the problem about brachistochrone, the calculation of deflections of beams and plates.

Keywords: theory of elasticity, variational formulation, grid methods, the numerical optimization, the problem of brachistochrone, calculation of deflections baloe and plates.

Введение

Задачи теории упругости могут быть решены на основе как дифференциальной, так вариационной постановки о нахождении решений, доставляющих соответствующему функционалу экстремум. Опыт компьютерного моделирования в области прикладной теории упругости свидетельствует, что конечноразностные аппроксимации часто более предпочтительнее применять с вариационной формулировкой. На основе известных процедур в современных программных комплексах строятся конечноразностные уравнения для решения задач расчета тонкостенных конструкций. Применение непрямоугольных сеток позволяет рассчитывать пластинчатые и оболочечные конструкции сложных очертаний, с вырезами, подкреплениями и т. п. [1-4]. В статье описан опыт применения данного метода в сочетании с методом покоординатного спуска.

1. Задача о брахистохроне

Полное время T скатывания точки равно:

$$T = \int_0^a \sqrt{\left(1 + (dy/dx)^2\right) / (2gy(x))} dx.$$

Материальная точка первоначально находится в начале координат, конечное положение точка B , то есть $y(0) = 0, y(a) = b$. Введем сетку на $[0; a]$: $x_0 = 0, x_{n-1} = x_0 + (n-1)\delta x, x_n = a, \delta x = a/n$ и применим формулу трапеций. Для внутренних узлов сетки будем использовать центральные разности для аппроксимации производной функции y . Для правого конца отрезка будем использовать левую разность для аппроксимации производной в точке $x = x_n$. Задача оптимизации принимает вид

$$a/n \left(\sum_{i=2}^{i=n} \sqrt{\frac{(4\delta x^2 + (y_i - y_{i-2})^2)}{(8g\delta x^2 y_{i-1})}} + \sqrt{\frac{(\delta x^2 + (y_n - y_{n-1})^2)}{(4g\delta x^2 y_n)}} \right) \rightarrow 0$$

при $y_0 = 0, y_n = b, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n-1$. Неизвестными величинами являются $y_i, i = 1, \dots, n-1$. График оптимального решения задачи (рис. 1).

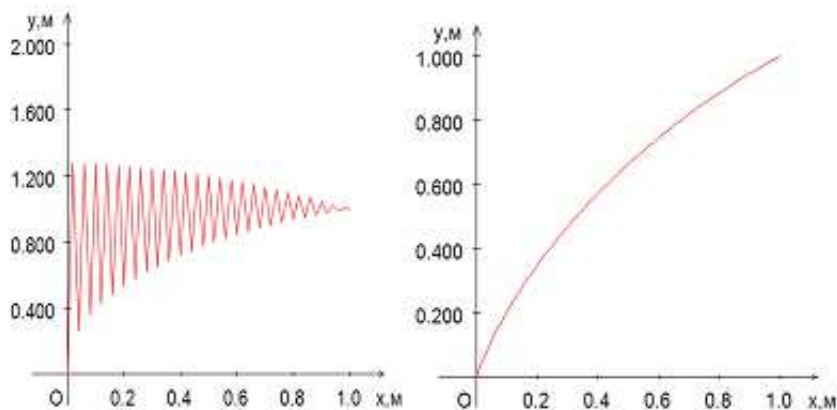


Рис. 1. Слева: пример вычислительной неустойчивости.
Справа: корректное решение

Обнаружилось, что во многих случаях имеет место вычислительная неустойчивость. Причиной является наличие нерегулярной точки при $y = 0$, где решение обращается в нуль, а подынтегральная функция – в бесконечность. На рис. 1 слева – пример неустойчивости при нахождении решения (аппроксимация подынтегрального выражения осуществлялась

со вторым порядком точности по шагу интегрирования δx). Справа корректное решение, которое было достигнуто за счет увеличения до 100 количества шагов интегрирования и применения регуляризации, основанной на разбиении отрезка интегрирования на 2 части: $x < x_0$, с особой точкой $= 0$ (где решение вычислялось приближенно аналитически) и регулярную часть ($x > x_0 > 0$).

2. Задача о прогибе балки

На двух опорах и , расположенных в горизонтальной плоскости, свободно лежит цилиндрическая упругая тяжелая балка. Пренебрегая весом частей балки, лежащих вне опор, требуется определить форму изогнутой оси этой балки. Все размеры, плотность и коэффициенты упругости балки считаются известными. Обозначим через $2l$ расстояние между опорами, ρ — линейную плотность балки, ds — элемент дуги изогнутой оси балки. Введем декартову систему координат xOy . Пусть ось Ox соединяет точку опоры, начало координат делит отрезок пополам и ось направлена вертикально вверх. Вычислим потенциальную энергию балки, предполагая, что уравнение ее упругой оси есть $y = y(x)$. Обозначим L — длина части балки между опорами, ϕ — угол, образованный касательной с осью Ox , μ — постоянный коэффициент, зависящий от модуля упругости и момента инерции поперечного сечения балки, элемент длины балки и кривизна:

$$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx, d\phi/dx = d^2y/dx^2 (1 + (dy/dx)^2)^{-1,5}.$$

Задача сводится к нахождению минимума :

$$E = \int_{-l}^l \left(\rho y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} + 0,5\mu (d^2y/dx^2)^2 (1 + (dy/dx)^2)^{-3} \right) dx$$

Графики решения задачи методом сеток представлены ниже на рис. 2.

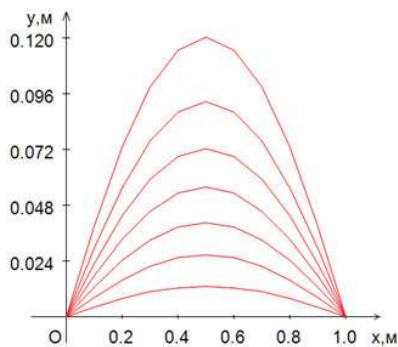


Рис. 2. Прогибы балки при $\mu = 1, \rho = 1, \dots, 7$.
Крепление балки шарнирное: $y(0) = y(L) = 0$,
 $y^{(2)}(0) = y^{(2)}(L) = 0$.

3. Решение задачи о прогибе пластины с закрепленными краями вариационным методом конечных разностей

Постановка двумерной вариационной задачи:

$$E = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(D (\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2)^2 - q(x, y) w \right) dx dy \rightarrow \min$$

Крепление краев пластины шарнирное:

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(L_x, y) = w(x, 0) = w(x, L_y) = 0, \\ \partial^2 / \partial x^2 [w(0, y)] = \partial^2 / \partial x^2 [w(L_x, y)] = \\ = \partial^2 / \partial y^2 [w(x, 0)] = \partial^2 / \partial y^2 [w(x, L_y)] = 0. \end{aligned}$$

Исходные данные: размеры $L_x = 1$; $L_y = 1$; число разбиений по каждой координате $N_x = N_y = 10$; точность $\varepsilon = 10^{-5}$; коэффициент $D = 1$; плотность сил $q(x, y) = 1$. Решение задачи находится посредством метода конечных разностей и минимизации методом покоординатного спуска рассматриваемого интегрального функционала. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

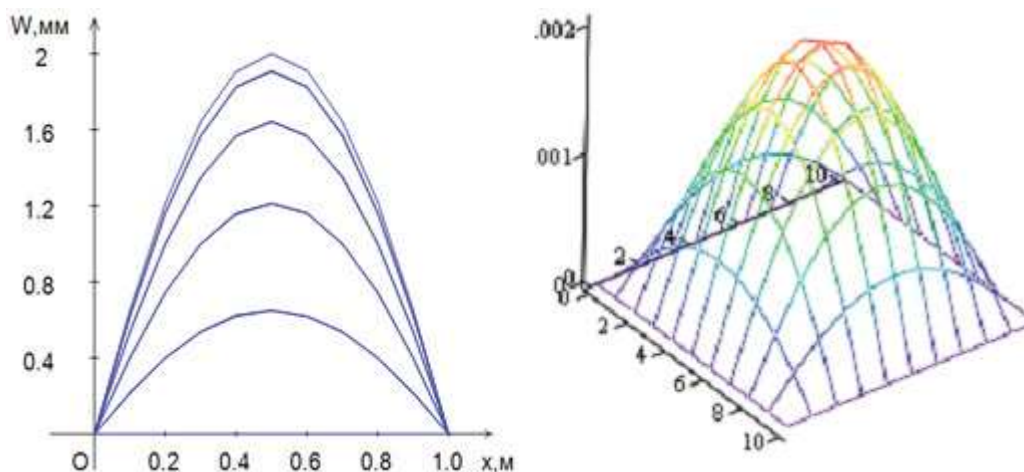


Рис. 3. Графики функции прогибов пластины $W(x, y)$, $y = 0, h, \dots, L$ (слева).
Трехмерный график функции прогибов (справа)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М. : Наука, 1970. 512 с.
- [2] Розин Л. А. Вариационные постановки смешанных задач теории упругости в форме наименьших квадратов // Изв. вузов. Строительство. № 8. 1999. С. 22–28.

- [3] *Галанин М. П.; Савенков Е. Б.* Методы численного анализа моделей М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 591 с. (Математическое моделирование в технике и технологии).
- [4] *Игнатьев А. В.* Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 1 // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 37–57.
- [5] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1988. 552 с.