

РУКОВОДСТВО  
К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ  
ПО ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

В ы п у с к 2

Статистические закономерности  
и ошибки измерений

Издательство Саратовского университета

1985

УДК 539.12.04

Р 85

Составители: Е.Н.Земскова, В.В.Игонин, А.И.Лепесткин

Рекомендуют к изданию: кафедра теоретической и ядерной физики  
Саратовского университета,  
профессор И.Ф.Ковалев

Р I704070000-264 8I - 85  
I76(02) - 85

© Издательство Саратовского университета, 1985 г.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ И ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ

В ядерной физике, как правило, большинство измерений сводится к определению среднего значения какой-либо физической величины, принимающей в каждом отдельном испытании случайное значение. Кроме того, часто измеряемая величина представляет собой число одинаковых событий, которые происходят независимо друг от друга в случайные моменты времени, или же число неразличимых объектов, распределенных в пространстве случайным образом.

При оценке достоверности полученных результатов измерений необходимо руководствоваться общими правилами обработки экспериментальных данных.

I. В исследованиях ядерных процессов или процессов взаимодействия и превращения элементарных частиц проявляется случайный характер измеряемых величин, который обусловлен тем самой природой наблюдаемых процессов.

Распределение во времени моментов возникновения отдельных элементарных процессов в атомной и ядерной физике или физике элементарных частиц (излучение кванта, радиоактивный распад ядра, соударение частиц и т.п.) не может быть заранее определено, так как каждый такой акт является событием случайным. Между моментами возникновения такого рода событий не может быть установлена периодичность или строгая функциональная зависимость. Однако при наблюдении большого числа событий появляется возможность установления определенных статистических законов распределения их во времени. Находимые из опыта распределения событий или каких-либо величин всегда лишь приблизительно отражают статистическое распределение. При повторении опыта получится новое распределение, точно не совпадающее с

полученными в первом опыте. Эксперименты и теоретический анализ показывают, что отличия распределений, находимых путем измерений, будут тем меньше, чем больше число зарегистрированных в каждом опыте событий или измеренных величин. Даже в очень длительном эксперименте можно зарегистрировать лишь ограниченное число событий, поэтому таким способом невозможно найти истинный статистический закон распределения исследуемых величин или событий. Строгие статистические законы распределения устанавливаются путем перехода к пределу, достигнутому при стремлении числа измеренных величин или зарегистрированных событий к бесконечности. Такое рассмотрение экспериментов позволяет найти точные законы распределения, которые применимы и тогда, когда число наблюдаемых событий невелико. Однако полученное распределение всегда отличается от истинного. На основании данных эксперимента можно сделать лишь приближенную оценку величины этих параметров.

В случаях, когда наблюдается суммарный эффект от большого количества единичных актов, статистический характер процессов проявляется в виде флуктуаций измеряемых величин. Эти флуктуации также подчиняются статистическим законам распределения. Такие величины называются случайными. Средним значением, или математическим ожиданием случайной величины, называют величину

$$\bar{x} = \sum x_i P(x_i) \quad - \text{ для дискретных величин}$$

или 
$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx \quad - \text{ для непрерывных величин.}$$

Среднее значение всех возможных отклонений величины  $X$  от  $\bar{x}$  равно нулю. Среднее значение квадрата отклонения случайной величины от  $\bar{x}$  называется дисперсией и обозначается  $D(x)$ . Для непрерывной величины оно выразится в виде

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 P(x) dx = \bar{x}^2 - \bar{x}^2.$$

Величина  $\sigma = \sqrt{D(x)}$  называется среднеквадратичным отклонением случайной величины, или среднеквадратичной ошибкой измерения. Распределение вероятностей попадания различного числа частиц в регистрирующий прибор в течение определенного интервала времени  $t$  описывается законом Пуассона, который может быть представлен в виде

$$P(N) = \frac{(N_0)^N}{N!} e^{-N_0},$$

где  $N$  - число частиц, попавших в регистрирующий прибор за время  $t$ ,

$N_0 = n_0 t = \bar{N}$  - среднее значение  $N$  для интервала  $t$ ,

$n_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N}{t}$  - интенсивность потока частиц, попадающих в прибор.

Число частиц  $N$ , попавших в регистрирующий прибор за время  $t$ , может значительно отличаться от среднего и наиболее вероятного значения, равного  $\bar{N} = N_0$ . Дисперсия в данном случае характеризует величину возможных отклонений  $N$  от среднего значения  $N_0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(N) &= \overline{(N - \bar{N})^2} = \sum_{N=0}^{\infty} (N - \bar{N})^2 P(N) = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 P(N) - 2\bar{N} \sum_{N=0}^{\infty} N P(N) + \bar{N}^2 \sum_{N=0}^{\infty} P(N) = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 P(N) - 2\bar{N} \cdot \bar{N} + \bar{N}^2 = \bar{N}^2 - \bar{N}^2, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \mathcal{D}(N) = \bar{N}^2 - \bar{N}^2.$$

Учитывая, что величина  $N$  подчиняется закону Пуассона, получим:  $\bar{N}^2 = \bar{N}^2 + \bar{N}$ .

Тогда  $\mathcal{D}(N) = \bar{N}$  и  $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}(N)} = \sqrt{\bar{N}}$ .

Для характеристики возможных отклонений можно также ввести в рассмотрение относительное среднее квадратичное отклонение:

$$\delta = \frac{\sigma}{\bar{N}}.$$

Так как истинное среднее значение, как правило, неизвестно, принимают  $\mathcal{D}(N) \approx N$ .

Тогда среднее квадратичное отклонение (среднеквадратичная ошибка) выразится как  $\sigma = \sqrt{\mathcal{D}(N)} \approx \sqrt{N}$ .

Относительная ошибка  $\delta$  с увеличением  $N$  уменьшается обратно пропорционально корню квадратному из числа сосчитанных частиц:

$$\delta = \frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Отсюда можно определить число частиц, которое нужно зарегистрировать для достижения заданной точности:

$$N = \frac{1}{\delta^2}.$$

Можно показать, что с вероятностью 68,3% истинное значение отличается от результатов измерения не более чем на одну среднеквадратичную ошибку, с вероятностью 94,5% - не более чем на двойную среднеквадратичную ошибку и с вероятностью 99,7% - не более чем на три среднеквадратичных ошибки. Результат измерения всегда приводится с указанием среднеквадратичной ошибки.

2. Рассмотрим ошибки функции измеряемых величин. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - независимые случайные величины со средними значениями  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ , дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ , а  $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  - некоторая функция этих величин. Если считать, что ошибки достаточно малы, то функцию  $\Phi(X_i)$  можно разложить в ряд Тейлора около средних значений  $\bar{X}_i$  и пренебречь членами разложения выше первого порядка малости, то есть

$$\Phi(X_i) = \Phi(\bar{X}_i) + \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i) \frac{\partial \Phi}{\partial X_i}.$$

Дисперсия определяется формулой

$$\sigma_{\Phi}^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2.$$

Для случая двух величин имеем

$$\sigma = \sqrt{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_2^2}.$$

Ошибка для суммы или разности двух величин:

$$\sigma_{X_1 \pm X_2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Относительная ошибка:

$$\delta_{X_1 \pm X_2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{X_1 \pm X_2}.$$

В таблице приведены ошибки для случаев суммы, разности, произведения и частного двух величин.

Функция	Ошибка	Относительная ошибка
$X_1 + X_2$	$\pm(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2)^{1/2}$	$\pm \frac{(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2)^{1/2}}{X_1 + X_2}$
$X_1 - X_2$	$\pm(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2)^{1/2}$	$\pm \frac{(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2)^{1/2}}{X_1 - X_2}$
$X_1 X_2$	$\pm(X_1^2 \sigma_{X_2}^2 + X_2^2 \sigma_{X_1}^2)^{1/2}$	$\pm \left( \frac{\sigma_{X_1}^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_{X_2}^2}{X_2^2} \right)^{1/2}$
$\frac{X_1}{X_2}$	$\pm \left( \frac{X_2^2 \sigma_{X_1}^2 + X_1^2 \sigma_{X_2}^2}{X_2^4} \right)^{1/2}$	$\pm \left( \frac{\sigma_{X_1}^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_{X_2}^2}{X_2^2} \right)^{1/2}$

#### Систематические ошибки измерений, вызванные просчетом

Ошибки, обусловленные просчетами счетчика, обладающего мертвым временем, могут служить примером систематических ошибок, хотя просчеты и объясняются статистическим характером явлений. Эти ошибки зависят от скорости счета и параметров регистрирующей системы, в том числе и мертвого времени детектора излучений.

Наличие мертвого времени счетчика, то есть времени нечувствительности счетчика к попадающим в его объем частицам, приводит к тому, что регистрируются не все частицы, попадающие в счетчик. Частицы регистрируются отдельно только в случае, если среднее время  $\bar{t}$  между двумя попаданиями частицы в детектор больше мертвого времени счетчика  $\bar{\tau}$ . Если среднее число частиц, попадающих в счетчик в единицу времени, равно  $n_0$  ( $n$  - среднее число частиц, зарегистрированных в единицу времени), то число частиц, попавших в детектор в течение мертвого времени и не сосчитанных регистрирующим устройством (отнесенное в единице времени), равно  $n_0 n \bar{\tau}$ .

Таким образом  $n_0 = n + n n_0 \bar{\tau}$ , откуда  $n_0 = \frac{n}{1 - n \bar{\tau}}$ .

При работе со счетными устройствами следует помнить, что разрешающее время всего счетного устройства обуславливается разрешением наиболее "медленного" элемента устройства. Как правило, таким элементом является механический счетчик, мертвое время которого имеет порядок  $10^{-2}$  с. Для улучшения разрешения установки используют пересчетные устройства, в результате чего на электромеханический счетчик поступают только сигналы, кратные коэффициенту пересчета. При выборе соответствующего коэффициента пересчета разрешающая способность всей установки зависит практически от разрешающего времени детектора.

У п р а ж н е н и е I. Изучение зависимости величины среднеквадратичной ошибки от числа зарегистрированных частиц.

Включают установку и подают на счетную трубку напряжение, соответствующее рабочей точке данного счетчика.

Устанавливают кратность пересчета "X 64" и проводят измерение фона.

Выполняют 10 отсчетов фона с экспозицией в 1 минуту. Результаты серии измерений вносят в табл. I.

Таблица I

№ пп	I серия измерений (измерение фона)			II серия измерений (препарат + фон)			III серия измерений (препарат + фон)		
	Отсчет по мех. счетч.	Добавка по неон. лам.	Общее число исп.	Отсчет по мех. счетч.	Добавка по неон. лам.	Общее число исп.	Отсчет по мех. счетч.	Добавка по неон. лам.	Общее число исп.
1.									
2.									

1.

2.

Затем помещают вблизи счетчика радиоактивный препарат, добиваясь уровня счета в 2-3 раза большего, чем фон. Кратность пересчета и экспозиция остаются прежними.

В следующей серии из 10 измерений помещают препарат ближе к счетчику и добиваются скорости счета в 10-12 раз больше, чем фон. Кратность пересчета и экспозиция остаются прежними.

На этом опыты заканчиваются. При обработке результатов измерений следует придерживаться формы записи, приведенной в табл.2. (для каждой серии измерений составляют отдельную таблицу по этой форме).

Таблица 2

Номер	Отсчеты, $N_i$	Квадратичная ошибка, $\rho_i = \pm \sqrt{N_i}$	Отклонение от средне- го $\varepsilon_i = N_i - \bar{N}$	Квадраты откло- нений, $\varepsilon_i^2$
-------	-------------------	--	---	--

1.  
2.  
3.  
.  
.  
10.

Рассчитать ошибки опыта

Вычисление ошибки в предположении, что погрешность вызвана статистикой радиоактивного распада

1. Общее число расчетов

$$N = \sum N_i$$

2. Средняя скорость счета в имп/мин

$$\frac{N}{n}$$

3. Абсолютная квадратичная ошибка в определении

$$\rho = \sqrt{N}$$

4. Абсолютная квадратичная ошибка в определении скорости счета

$$\rho' = \frac{\rho}{n}$$

Вычисление суммарной ошибки опыта по рассеянию результатов отдельных измерений.

1. Среднее значение скорости счетов

$$\frac{N}{n}$$

2. Средняя абсолютная квадратичная ошибка отдельного измерения скорости счета

$$\rho_i = \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}}$$

3. Средняя относительная квадратичная ошибка отдельного измерения скорости счета

$$\rho_{отн.} = \frac{\rho}{N/n}$$

4. Абсолютная квадратичная ошибка результатов серии измерений скорости счета

$$\rho_{ср} = \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}$$

5. Относительная квадратичная ошибка в скорости счета (%)

$$\rho'_{отн.} = \frac{\rho' \cdot 100\%}{N/n}$$

5. Относительная квадратичная ошибка результата серии измерений скорости счета (%)

$$\rho_{ср. отн.} = \pm \frac{\rho_{ср.} \cdot 100\%}{N/n}$$

Затем составляют сводную таблицу результатов изучения зависимости величины квадратичной ошибки от числа зарегистрированных частиц (табл.3).

Таблица 3

	I серия опытов		II серия опытов		III серия опытов	
Средняя скорость счета						
Абсолютная ошибка	$\rho'$	$\rho_{ср.}$	$\rho'$	$\rho_{ср.}$	$\rho'$	$\rho_{ср.}$
Относительная ошибка, %	$\rho'_{отн.}$	$\rho_{ср. отн.}$	$\rho'_{отн.}$	$\rho_{ср. отн.}$	$\rho'_{отн.}$	$\rho_{ср. отн.}$

Отметим, что ошибка  $\rho$ , вычисленная в предположении, что погрешность вызвана только статистикой радиоактивного распада, имеет заниженную величину по сравнению с фактической суммарной ошибкой  $\rho_{ср.}$ , вычисленной по рассеянию результатов повторных измерений. Это свидетельствует о некоторой нестабильности основных условий опыта. Вместе с тем то обстоятельство, что  $\rho$  мало отличается от  $\rho_{ср.}$ , указывает на главную роль (в наших условиях опыта) источника ошибок, связанного с природой радиоактивного распада.

В заключение этой части работы нужно найти распределение ошибок по их величине. Пользуясь табл.4 (таблицей относительного числа измерений, в % к общему числу, для которых отклонение от среднего значения не превышает квадратичной ошибки в  $n$  раз), вычисляют, сколько процентов повторных измерений скорости счета, каждое из которых длится 10 мин., будет иметь относительную квадратичную ошибку, не превышающую  $\pm 1\%, 2\%, 4\%, 8\%, 16\%$  от полученной на опыте средней скорости счета.

Таблица 4

$\alpha$	$\Phi(\alpha)$	$\alpha$	$\Phi(\alpha)$	$\alpha$	$\Phi(\alpha)$
0,05	4,0	1,00	68,3	2,00	95,5
0,10	8,0	1,05	70,6	2,05	96,0
0,15	11,9	1,10	72,9	2,10	96,4
0,20	15,9	1,15	75,0	2,15	96,8
0,25	19,7	1,20	77,0	2,20	97,2
0,30	23,6	1,25	78,9	2,25	97,6
0,35	27,4	1,30	80,6	2,30	97,9
0,40	31,1	1,35	82,3	2,35	98,1
0,45	34,7	1,40	83,9	2,40	98,4
0,50	38,3	1,45	85,3	2,45	98,6
0,55	41,6	1,50	86,6	2,50	98,8
0,60	45,1	1,55	87,9	2,55	98,9
0,65	48,4	1,60	89,0	2,60	99,1
0,70	51,6	1,65	90,1	2,65	99,2
0,75	54,7	1,70	91,1	2,70	99,3
0,80	57,6	1,75	92,0	2,80	99,5
0,85	60,6	1,80	92,8	2,90	99,6
0,90	63,2	1,85	93,6	3,00	99,7
0,95	65,8	1,90	94,3	3,50	99,95
		1,95	94,9	4,00	99,994
				5,00	99,99999

Расчет выполняют для трех измеренных в работе средних скоростей счета и соответствующих им значений относительных ошибок  $R_{отн}$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Определение ошибок измерений с учетом фона (эффект + фон) - (фон).

В упражнении I была определена скорость счета частиц при двух расстояниях между препаратом и счетчиком (II и III серии измерений). Теперь нужно, внести в эти данные поправки на величину фона и свести результаты в таблицу по следующей форме (при этом следует указать величины абсолютных ошибок в определении скорости счета как с учетом фона, так и без учета фона):

Условия опыта	Величина фона в имп/мин	Средняя скорость счета в имп/мин	
		без поправки на фон	с поправкой на фон
1-е положение аппарата			
-----			
2-е положение аппарата			

1-е положение  
аппарата

-----  
2-е положение  
аппарата

Отметим, что в выбранных условиях опыта учет фона приводит к заметному уточнению значения скорости счета.

### Л и т е р а т у р а

1. В. И. К а л а ш н и к о в а, М. С. К о з о д а е в. Детекторы элементарных частиц, М., Наука, 1966.

2. Практикум по ядерной физике. М., Изд-во Московского ун-та, 1979.

### РУКОВОДСТВО К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Выпуск 2

Статистические закономерности  
и ошибки измерений

Редактор Л. В. Аброськина  
Технический редактор Л. В. Агальцова  
Корректор И. В. Дараева

Подписано к печати 17.08.84. НГ 91435  
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 0,70 (0,75). Уч.-изд. л. 0,6.  
Тираж 1000. Заказ 70 Бесплатно.

Издательство Саратовского университета, 410601, Саратов,  
Университетская, 42.

Редакция Саратовского университета, 410601, Саратов,  
Университетская, 83.