



Факультет нелинейных процессов
Кафедра нелинейной физики



Малюгина М.А., Шараевский Ю.П.

**Динамика вращательного движения. Колебания и резонанс
в механических системах.**

Учебно-методическое пособие и методические рекомендации для студентов

В пособии описаны лабораторные работы и даны методические рекомендации по некоторым разделам классической механики в соответствии с программой обучения студентов физических специальностей вузов. Предлагаемые упражнения содержат описание экспериментальной установки, рекомендации по проведению эксперимента и методам обработки и представления результатов. Каждая работа содержит теоретическую часть, контрольные вопросы и список рекомендуемой литературы.



СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Темы для исследования	4
Измерительный комплекс	5
1. Динамика вращательного движения	6
2. Вращательные колебания механической системы	24
3. Сохранение энергии	32
4. Силы трения	31
4.1. Определение коэффициентов трения	33
4.2. Определение КПД электродвигателя	34
4.3. Определение трения в подшипниках	36
5. Пружинный маятник	38
6. Вынужденные колебания и резонанс	41



ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит описание лабораторных работ для проведения экспериментальных исследований по физическим основам механики в учебно-методическом практикуме, созданном на кафедре нелинейной физики. В данном пособии содержится описание лабораторного комплекса ЛКМ-6 и методики измерений. Экспериментальные исследования, которые проводятся с помощью этого измерительного комплекса, направлены на изучение законов динамики вращательного движения твердого тела (или системы тел), а также колебаний и резонанса в механических системах.

Кроме описанных в работе заданий студенту может быть предложено самостоятельно спланировать оригинальный эксперимент, обосновать его методику проведения и объяснить полученные результаты в соответствии с основными законами механики.

ТЕМЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

<p>1. Динамика вращательного движения</p>	<p><i>Уравнения движения Моменты инерции Момент импульса Теоремы о параллельных и перпендикулярных осях Кинетическая энергия вращения</i></p>
<p>2. Вращательные колебания механической системы</p>	<p><i>Период колебаний и момент инерции механической колебательной системы Кинетическая и потенциальная энергии вращательных колебаний Применение вращательных колебаний для определения моментов инерции</i></p>
<p>3. Сохранение энергии</p>	<p><i>Проверка законов сохранения энергии для вращательного и поступательного движений</i></p>
<p>4. Силы трения</p>	<p><i>Трибометр - прибор для определения коэффициентов трения между различными материалами Зависимость силы трения скольжения от скорости Определение КПД электродвигателя и трения в подшипниках</i></p>
<p>5. Пружинный маятник</p>	<p><i>Пружинный маятник - простой пример гармонического осциллятора Добротность. Затухающий гармонический осциллятор</i></p>
<p>6. Вынужденные колебания и резонанс</p>	<p><i>Возбуждение вынужденных колебаний в механической системе Исследование резонансных колебаний Резонансная кривая и фазочастотная характеристика Ширина резонансной кривой и добротность Поглощение мощности осциллятором и накопление энергии Определение добротностей исследуемых колебательных систем</i></p>

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС

Лабораторный измерительный комплекс (ЛКМ-6) предназначен для проведения экспериментальных исследований законов механики. Разнообразный набор элементов комплекса позволяет на одной установке провести большую серию лабораторных опытов.

Общий вид установки показан на рис. 1, набор элементов для эксперимента — на рис. 2.

На основании 1 расположены поворотный стол 2 и стойка 3 (рис. 1). При проведении опытов разнообразные объекты размещают на поворотном столе (рис. 3), платформа которого 1 имеет ряд отверстий вдоль диаметра для фиксации предметов. Стойка 2 поворотного стола закрепляется в подшипниках и имеет двухступенчатый шкив. Ее поворот относительно вертикальной оси фиксируется по неподвижной шкале 3 меткой-указателем на диске 4. На диаметрально противоположной стороне от метки на диске 4 имеется радиальная прорезь, прохождение которой через зазор фотодатчика 5 сопровождается звуковым сигналом. Угловая координата поворота стола отсчитывается с разрешением 2° . Поворотный стол может приводиться во вращение электродвигателем с двухступенчатым шкивом (диаметры 8 и 25 мм). Шкив двигателя соединяется со стойкой поворотного стола одним или двумя резиновыми пассиками. Если электропривод не используется в опыте, то пассики сняты со шкивов.

Стойка 3 (рис. 1) предназначена для подвешивания пружин или динамометра на оси верхнего ролика 4. Нижний ролик 5 необходим для закрепления пружин при образовании вращательной колебательной системы (рис. 1) и для обеспечения кинематической связи стол-груз в опытах по вращательному движению. В опытах применяются различные нити, номера которых указаны в соответствующих упражнениях. Для электропитания двигателя (постоянное или переменное напряжение в зависимости от цели эксперимента) и для измерения характерных интервалов времени (в том числе, и периода колебаний) применяется электронная измерительная система (6 на рис. 1). Выбор режимов управ-

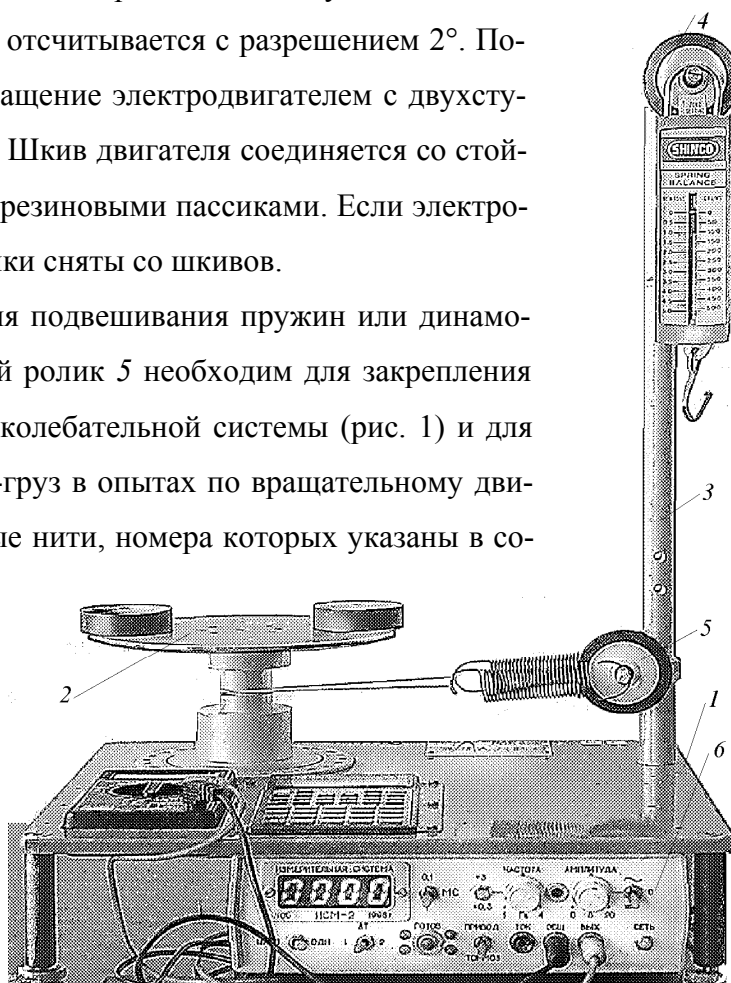


Рис.1

ления и измерения обеспечивается органами управления, расположенными на передней панели системы. Методика выбора необходимых режимов работы и измерений будет приведена в соответствующих разделах описания экспериментальных заданий.

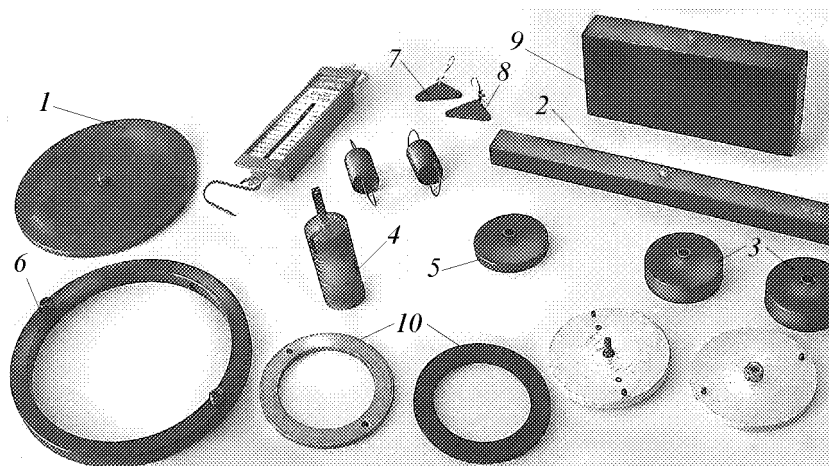


Рис.2

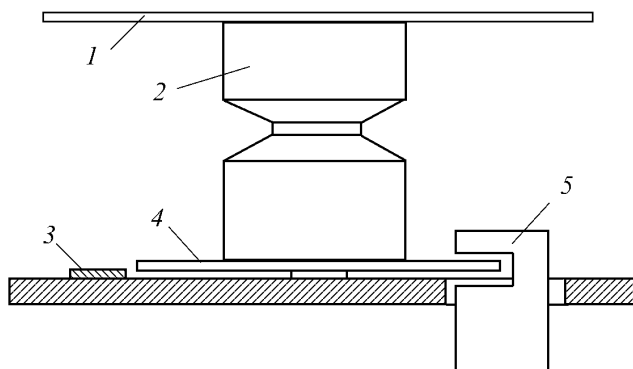


Рис. 3

1. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Задача динамики твердого тела — изучить движение тела в зависимости от действующих на него сил. Под твердым телом мы понимаем такую систему частиц, взаимное расстояние между которыми не изменяется, то есть внешние силы не могут деформировать тело и его форма все время остается неизменной (идеализированная модель абсолютно твердого тела). Произвольное движение твердого тела можно свести к поступательному и вращательному. Для описания поступательного движения в классической механике используются такие понятия как масса, импульс, сила. Уравнение движения системы точек имеет простой вид, если ввести в рассмотрение центр масс. Положение центра масс системы из N частиц относительно



начала координат инерциальной системы отсчета определяется радиусом-вектором \mathbf{R} , который задается соотношением

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}.$$

Доказано, что уравнение движения системы точек по форме записи эквивалентно уравнению для материальной точки и приобретает следующий вид

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где \mathbf{V} — скорость центра масс тела, $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ — сумма всех внешних сил, приложенных к телу.

Точка центра масс занимает вполне определенное положение относительно материальных точек системы и это положение не зависит от выбора системы координат. Точка эта находится не обязательно в самом теле, она может лежать и где-то вне его (например, обруч, бумеранг).

Для описания вращательного движения группы частиц введем сначала в рассмотрение момент импульса и момент силы отдельной частицы. Пусть частица массой m , движущаяся со скоростью \mathbf{v} , имеет импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, а ее положение в инерциальной системе отсчета характеризуется вектором \mathbf{r} относительно начала координат O . По определению момент импульса этой частицы относительно выбранной точки O определяется соотношением (рис. 4, а)

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Компоненту \mathbf{L} вдоль какой-либо оси называют моментом импульса относительно этой оси.

Моментом силы, действующей на материальную точку, относительно точки O называется вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$ (рис. 4, б). Продифференцируем момент импульса по времени:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right].$$

Принимая во внимание, что $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{p} \right] = [\mathbf{v}m\mathbf{v}] = 0$ и $\left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = [\mathbf{r}\mathbf{F}] = \mathbf{N}$,

получаем соотношение

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (2)$$

которое называют уравнением моментов. Оно показывает, что скорость изменения момента импульса равна моменту силы.

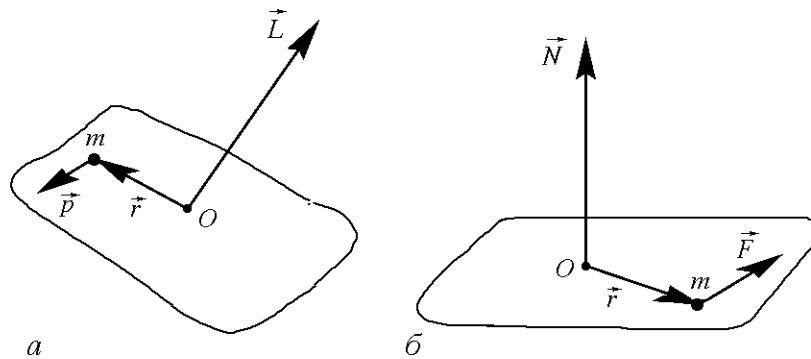


Рис. 4

При рассмотрении системы частиц суммарный момент импульса относительно выбранной точки в инерциальной системе отсчета будет равен

$$\mathbf{L}_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] \quad (3)$$

Дифференцируя выражение (3) по времени, получаем уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{\text{общ}}}{dt} &= \sum \left[\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \mathbf{p}_i \right] + \sum \left[\mathbf{r}_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right] = \sum \mathbf{N}_i = \mathbf{N}_{\text{внешн}}, \\ \frac{d\mathbf{L}_{\text{общ}}}{dt} &= \mathbf{N}_{\text{общ}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы видели, что движение центра масс определяется результирующей внешней силой, теперь мы видим, что вращение системы определяется результирующим моментом внешних сил (суммарный момент внутренних сил, вызванный взаимодействием между частицами, для ньютоновских сил всегда равен нулю). При рассмотрении многих задач, связанных с вращением, за точку начала отсчета удобно принимать центр масс. В этом случае уравнение моментов (4) будет записано относительно центра масс или оси, проходящей через центр масс.

В общем случае движение тела произвольной формы и с произвольным распределением массы носит сложный характер. Поясним это. Выберем центр масс за начало координат. В



какой-то момент времени мгновенное значение угловой скорости тела $\omega(t)$ проходит через центр масс (рис. 5) и линейная скорость i -ой частицы равна

$$\mathbf{v}_i = [\omega \mathbf{r}_i],$$

а момент импульса имеет вид

$$\mathbf{L} = \sum [m_i \mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \sum [m_i \mathbf{r}_i [\omega \mathbf{r}_i]].$$

Воспользуемся формулой разложения двойного векторного произведения

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]] = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

Тогда

$$\mathbf{L} = \omega \sum m_i \mathbf{r}_i^2 - \sum m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \omega). \quad (5)$$

Из соотношения (5) видно, что в общем случае направление вектора \mathbf{L} не совпадает с направлением вектора ω (рис. 5) и, кроме того, момент импульса тела весьма сложно зависит от распределения масс в теле. Именно в этом причина сложного поведения вращающихся тел с произвольным распределением массы.

Формулу (5) можно переписать в проекциях на оси координат выбранной системы x, y, z , начало которой совпадает с центром масс (рис. 5). После преобразований эти соотношения имеют вид

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z,$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z,$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z,$$

где коэффициенты у компонент угловой скорости $J_{xx}, J_{xy}...$ называют моментами инерции, каждый из них зависит от распределения масс в теле и ориентации тела относительно оси вращения. Величины J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} называют осевыми моментами инерции, остальные — центробежными моментами инерции. Заметим, что $J_{xy} = J_{yx}, J_{xz} = J_{zx}$ и $J_{yz} = J_{zy}$. Совокупность указанных инерциальных коэффициентов называют тензором инерции, шесть независимых компонентов этого тензора и определяют однозначную связь между векторами \mathbf{L} и ω .

Несмотря на довольно сложную картину описания поведения твердого тела в общем случае, необходимо обратить внимание на одно важное и интересное обстоятельство, которое легко описать и использовать. Оказывается, что любое твердое тело, даже неправильной формы (“картошка”), имеет три взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс, такие, что момент инерции относительно одной из них имеет наибольшее

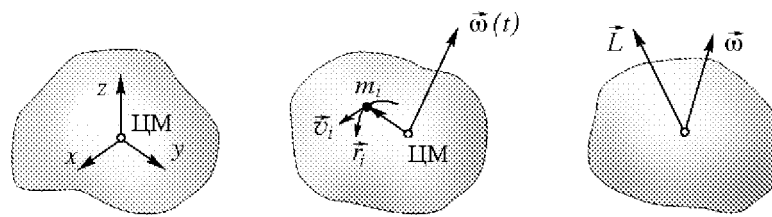


Рис. 5

значение, относительно другой — наименьшее, а относительно третьей — имеет промежуточную величину. Эти оси называются главными осями инерции тела, они обладают тем важным свойством, что если тело вращается вокруг одной из них, то направления \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$ совпадают. Если тело имеет оси симметрии, то направление главных осей совпадает с ними. Если в качестве осей x, y, z выбрать главные оси, а соответствующие моменты инерции обозначить J_x, J_y, J_z , то

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}J_x\omega_x + \mathbf{j}J_y\omega_y + \mathbf{k}J_z\omega_z.$$

При этом $L_x=J_x\omega_x, L_y=J_y\omega_y, L_z=J_z\omega_z$, то есть, действительно, если вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль одной из главных осей, то и вектор \mathbf{L} будет направлен также.

Проще обстоит дело в задачах динамики твердых тел симметричной формы при их вращении относительно оси симметрии, в этих случаях, как уже понятно, векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$ параллельны, а коэффициент пропорциональности J между ними $\mathbf{L}=J\boldsymbol{\omega}$ называют моментом инерции относительно вполне определенной оси.

Далее рассмотрим уравнения динамики для простейшего случая движения твердого тела — вращения вокруг определенной закрепленной оси (ось Z , рис. 6). В этом случае вращение твердого тела описывается уравнением

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z, \quad (6)$$

здесь L_z — момент импульса относительно оси вращения Z , а N_z — момент внешних сил относительно этой оси. При таком движении скорость элементарной массы m_i есть просто $v_i = \omega r_i$ и полный момент импульса

$$L_z = \sum m_i r_i v_i = \omega \sum m_i r_i^2 = J_z \omega, \quad (7)$$

где J_z — момент инерции тела относительно выбранной оси

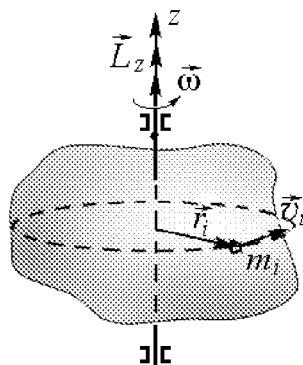


Рис. 6

вращения, эта величина зависит от формы твердого тела, его размеров и распределения масс в нем. Расчет момента инерции твердого тела с непрерывным распределением массы с плотностью ρ сводится к вычислению интеграла

$$J = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (8)$$

где dV — элементарный объем бесконечно малой частицы тела dm , отстоящей от оси вращения на расстоянии r . Этот интеграл нетрудно вычислить лишь для тел простой геометрической формы с однородной плотностью, в других случаях момент инерции любого тела находится экспериментально.

Поскольку $L_z = J_z \omega$, то уравнение (6) можно записать

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = N_z, \quad (9)$$

так как для твердого тела $J_z = const$.

Уравнение (9) называют основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Его векторная форма имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = N_z \quad (10)$$

Вектор ω всегда направлен вдоль оси вращения, величина $d\omega/dt$ называется угловым ускорением, видно, что оно определяется моментом действующей на тело силы, подобно тому как ускорение поступательного движения определяется самой силой.

Рассмотрим теперь задачу определения момента инерции различных тел. Для этого используется формула (8), которая при нахождении момента инерции относительно оси Z имеет вид

$$J_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

и интеграл распространяется на весь объем тела V .

В качестве простого примера определим момент инерции сплошного однородного цилиндра массой M , радиусом R и высотой h относительно его геометрической оси. Разобьем этот цилиндр на отдельные элементарные концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r (рис. 7). Для каждого такого элементарного полого ци-

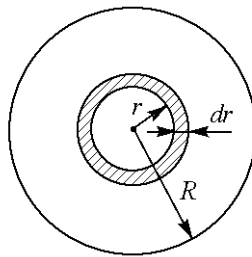


Рис. 7

линдра момент инерции равен

$dJ = r^2 dm$, где dm — масса всего элементарного цилиндра. Если материал однороден и его плотность ρ , то $dm = \rho h 2\pi r dr$, то есть $dJ = 2\pi h \rho r^3 dr$, а момент инерции всего цилиндра

$$J = \int_V dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h \rho R^4.$$

Объем цилиндра $\pi R^2 h$, его масса $M = \pi \rho R^2 h$, а следовательно момент инерции относительно геометрической оси равен

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

Моменты инерции других тел могут быть найдены принципиально таким же путем, расчет довольно прост для тел вращения, особенно для тел цилиндрической формы. Для тел неправильной формы или неоднородных, вычисления усложняются. Качественно понятно, что для тел одинаковой массы, но распределенной по-разному, момент инерции больше у того тела, где элементы массы расположены дальше от оси. Например, тонкостенный цилиндр радиусом R и массой M имеет момент инерции MR^2 , а сплошной, как показал расчет, $1/2MR^2$. Сплошной однородный шар характеризуется моментом инерции $2/5MR^2$, а полый шар с тонкими стенками (сферический слой) такой же массы M и такого же размера R имеет момент

инерции больший, а именно $2/3MR^2$ (приведены значения моментов инерции относительно оси, проходящей через центр шара и сферы).

Вычислим по формуле (8) момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр. Учитывая симметрию фигуры, удобно расчет провести в сферических координатах r, θ, φ (рис. 8).

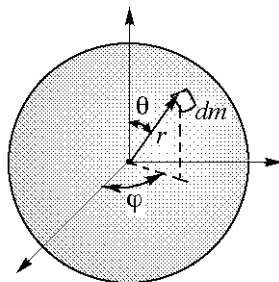


Рис. 8

Обратим внимание, что в соотношении (8) r — расстояние элементарной массы dm до оси вращения. В этом расчете r — одна из сферических координат, поэтому, как видно из рис. 8, формула (8) должна быть записана в виде

$$J = \int_V (r \sin \theta)^2 dm.$$

Если M — масса шара, V — его объем, то

$$dm = M \frac{dV}{V} = \frac{M}{V} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{поэтому } J = \frac{M}{V} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{V} \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{2}{3} MR^2$$

Вычислим еще момент инерции тонкого твердого стержня массой M , длиной L . Пусть, например, ось вращения проходит через конец стержня и перпендикулярна к нему (ось Z' , рис. 9, а). Для такой фигуры

$$J_z = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2. \quad (11)$$



При вращении стержня относительно оси, проходящей через центр масс (ось Z , рис. 9, б).

$$J_Z = J_{цм} = 2 \int_0^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} ML^2. \quad (12)$$

Из сопоставления (11) и (12) видно, что стержень гораздо легче крутить за середину, чем за конец. Можно также обратить внимание, что $J_{z'} = J_{цм} + M(L/2)^2$, где $L/2$ — расстояние между параллельными осями Z и Z' , одна из которых проходит через центр масс стержня. Этот результат носит общий характер и называется теоремой о параллельных осях (эту теорему

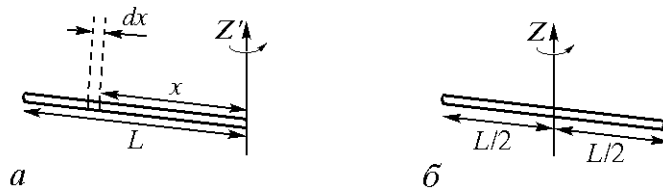


Рис.9

также часто называют теоремой Гюйгенса-Штейнера): момент инерции тела относительно какой-либо оси J равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс J_0 , сложенному с величиной Ma^2 , где a — расстояние между осями. Покажем это. На рис. 10 ось 1 проходит через центр масс O , ось 2 параллельна ей, расстояние между ними a .

Выберем элементарную массу Δm_i , ее положение относительно осей обозначим векторами \mathbf{R}_i и \mathbf{r}_i . Момент инерции относительно оси 2

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 = \sum_i \Delta m_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{a})^2 = \sum_i \Delta m_i R_i^2 + \sum_i \Delta m_i a^2 - 2\mathbf{a} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i$$

В этом соотношении последняя сумма равна нулю, поскольку ось 1 проходит через центр масс. Следовательно,

$$J = J_0 + ma^2. \quad (13)$$

Это и есть теорема о параллельном переносе оси вращения. Эта теорема может быть применена к любому телу. Определим, например, момент инерции однородного шара относительно оси, касательной к его поверхности (рис. 11)

$$J_{z'} = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$



Существует еще одна простая теорема, которая помогает при вычислении моментов инерции — это так называемая теорема о перпендикулярных осях. Она применяется лишь к плоским фигурам, то есть к двумерным телам, или телам постоянной малой толщины, которой можно пренебречь по сравнению с другими размерами.

Согласно этой теореме, сумма моментов инерции плоского тела относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей в плоскости этого тела равна моменту инерции отно-

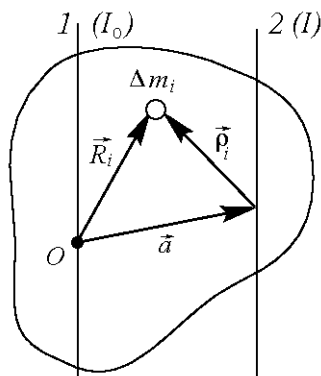


Рис. 10

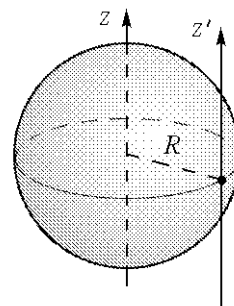


Рис. 11

сительно оси, проходящей через точку пересечения перпендикулярно плоскости тела. Если тело расположено в плоскости XY , (рис. 12, а), то

$$J_z = J_x + J_y \quad (14)$$

Действительно, $J_x = \int_s y^2 dm$, $J_y = \int_s x^2 dm$

$$J_z = \int_s (x^2 + y^2) dm = J_x + J_y$$

Например, для тонкого диска массы M и радиуса R (рис. 12, б) $J_z = 1/2 MR^2$, вследствие симметрии $J_x = J_y$ и $J_z = 2J_x$, откуда

$$J_x = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{4} MR^2$$

Возвращаясь к основному уравнению динамики вращательного движения, обратим внимание на некоторые неочевидные явления, возникающие при вращении твердого тела. Мы отмечали, что в случае вращения тела относительно оси симметрии, проходящей через центр масс, можно написать $L = J\omega$. Хотя эта формула во многих случаях оказывается очень полезной, в общем случае ее применить нельзя. При нарушении условий симметрии момент им-

пульса и угловая скорость не параллельны. В качестве примера рассмотрим диск массой M и

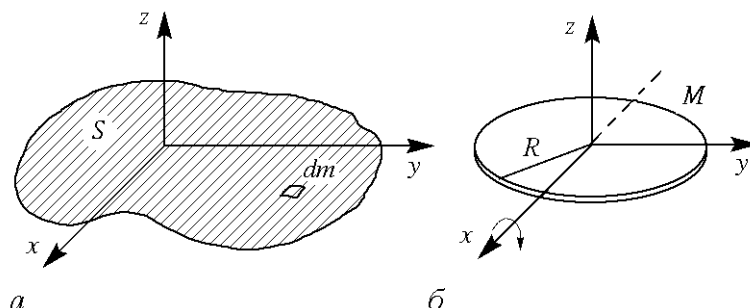


Рис. 12

радиусом R наклонно прикрепленный к оси вращения (угол наклона θ), однако ось по-прежнему проходит чрез его центр масс (рис. 13). Вектор ω всегда направлен вдоль оси вращения.

Разложим вектор ω на компоненты ω_1 и ω_2 — перпендикулярную (вдоль оси 1) и параллельную (вдоль оси 2) плоскости диска. Мы подсчитали, что моменты инерции диска относительно этих двух осей различны ($J_1 > J_2$), поэтому $J_1\omega_1 / J_2\omega_2 \neq \omega_1 / \omega_2$, и, следовательно, вектор момента импульса не направлен вдоль оси (рис. 13). Если система вращается с постоянной угловой скоростью ω , то величина момента импульса L не меняется, а направление его меняется — вектор L вращается относительно оси Z и описывает коническую поверхность. Для обеспечения такого вращения момента импульса в соответствии с уравнением $N = dL/dt$ необходим момент силы, который действует на опоры закрепления оси. Для момента времени, показанного на рис. 13, векторы L и ω находятся в плоскости рисунка. Момент сил для этого мгновения времени направлен перпендикулярно плоскости рисунка (от нас) и должен быть приложен к оси со стороны опор. На рис. 13, а показаны силы F , обеспечивающие такой момент, заметим, что во время вращения системы направление сил тоже меняется, причем они всегда остаются в плоскости векторов L и ω . При таком вращении системы ось расшатывает опоры. Найдем величину момента сил, необходимую для реализации такого вращения в нашем примере. Проекция вектора L на направление, перпендикулярное оси вращения, равна $L \cos\theta$ (рис. 13, б). За промежуток времени dt

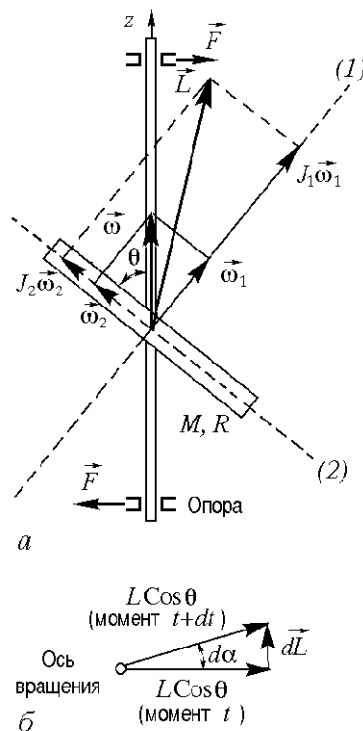


Рис. 13

величина вектора \mathbf{L} изменится на $dL = L \cos \theta d\alpha = L \cos \theta \omega dt$. Следовательно,

$$N = \frac{dL}{dt} = \omega L \cos \theta$$

Учтем, что $L = \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2}$, $\omega_1 = \omega \sin \theta$, $\omega_2 = \omega \cos \theta$, $J_1 = 1/2 MR^2$, $J_2 = 1/4 MR^2$, для момента сил получим выражение

$$N = 1/2 MR^2 \omega^2 \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta + 1/4 \cos^2 \theta}.$$

И только в том случае, когда ось вращения совпадает с главной осью инерции тела ($\theta = \pi/2$, рис. 13, а), ось не оказывает на подшипники никакого воздействия в горизонтальном направлении и $\mathbf{L} = J_1 \boldsymbol{\omega}$. Такие оси вращения называются свободными осями, потому, что если убрать подшипники, они будут сохранять свое направление в пространстве неизменным. Опыты показывают, что устойчивым по отношению к внешним возмущениям является вращение вокруг главных осей инерции с наибольшим и наименьшим моментами инерции (наиболее наглядно это проявляется, например, при закручивании параллелепипеда). В телах вращения устойчивой оказывается свободная ось, соответствующая наибольшему моменту инерции (ось I на рис. 13, а).

Известно, что законы сохранения в физике играют важную роль, поскольку позволяют получать весьма общие и существенные выводы без решения уравнений движения. В случае



вращательного движения системы частиц, включая твердое тело, можно тоже получить закон сохранения, обращаясь к уравнению (4). Из него следует: если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, то $d\mathbf{L}/dt = 0$ и $\mathbf{L} = \text{const}$. Этот закон называется законом сохранения момента импульса. Он играет в механике такую же важную роль, как и законы сохранения энергии и импульса. Следует заметить, что закон сохранения момента импульса справедлив не только для вращающейся системы тел и частиц, движущихся по замкнутым орбитам. Он выполняется также и для незамкнутых орбит, а также в процессах столкновения.

Определим теперь кинетическую энергию вращающегося тела K . Для случая неподвижной оси вращения (рис. 6) сделать это очень просто. Действительно, $K = 1/2 \sum m_i v_i^2$, $v_i = \omega r_i$, так как угловая скорость вращения для всех точек одинакова. Поэтому

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (15)$$

Если же ось вращения не закреплена, то кинетическая энергия вращения будет принимать более сложный вид. При описании произвольного движения твердого тела, как уже отмечалось выше, важную роль играет центр масс. Любое движение твердого тела может быть представлено как поступательное движение его центра масс со скоростью \mathbf{V} в инерциальной системе отсчета и мгновенное вращение вокруг этого центра с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 14). Радиус-вектор материальной точки m_i в инерциальной системе отсчета обозначим \mathbf{r}_i , в системе центра масс \mathbf{r}_i^* . Полная кинетическая энергия тела $K = 1/2 \sum m_i v_i^2$, где v_i скорость частицы в инерциальной системе отсчета $\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i^*$ а \mathbf{v}_i^* — ее скорость в системе центра масс. С учетом $v_i^2 = V^2 + v_i^{*2} + 2\mathbf{V}\mathbf{v}_i^*$ найдем кинетическую энергию

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \mathbf{V} \frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{r}_i^* + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^{*2}$$

где $M = \sum m_i$ — полная масса тела. Поскольку для центра масс $\sum m_i \mathbf{r}_i^* = 0$, имеем

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^{*2}. \quad (16)$$

Таким образом, мы доказали, что полная кинетическая энергия произвольно движущегося твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения его центра масс $1/2 M V^2$ и кинетической энергии движения относительно центра масс $\frac{1}{2} \sum m_i v_i^{*2}$. Форму-

ла (16) справедлива в общем случае. Она заметно упрощается в случае плоского движения тела, представляющего практический интерес при анализе многих задач. При таком движении ось вращения сохраняет постоянное направление в теле, а сама ось

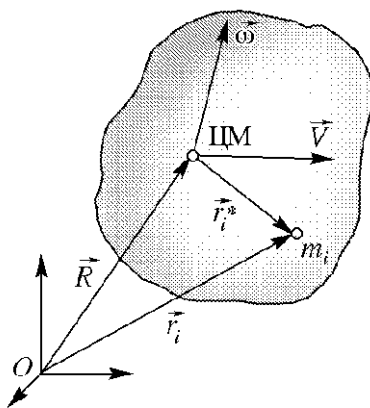


Рис. 14

перемещается вместе с центром масс. В этом случае ось вращения перпендикулярна плоскости, в которой движется тело, и скорость каждой частицы $v_i^* = \omega R_i^*$, где R_i^* — радиус вращения i -ой частицы (расстояние по перпендикуляру до оси вращения). Таким образом,

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2} J_0 \omega^2$$

и

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2. \quad (17)$$

В выражении (17) J_0 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс. Следовательно, кинетическая энергия при плоском движении твердого тела равна сумме кинетических энергий поступательного движения центра масс и вращательного движения относительно центра масс (еще раз подчеркнем: ось вращения не меняет своего направления).

В качестве примера по обсуждению различных физических ситуаций, связанных с анализом (17), рассмотрим шар, скатывающийся с наклонной плоскости (рис. 15). Один из распространенных способов решения этой задачи состоит в энергетическом анализе: кинетическая энергия, приобретаемая шаром, на нижнем конце наклонной плоскости, равна убыли его потенциальной энергии за счет “потери” высоты H .

Заметим, что оба члена в (17) совершенно независимы: при движении шара по плоскости вниз в зависимости от конкретных условий его соскальзывания возможна любая комбинация двух независимых движений — перемещения центра масс и вращения относительно

центра масс. Во многих отношениях представляет интерес характерная комбинация — это качение без скольжения. При таком движении точка контакта шара с наклонной плоскостью A в каждый данный момент времени находится в состоянии покоя (прямая, проходящая через точку A , перпендикулярно плоскости

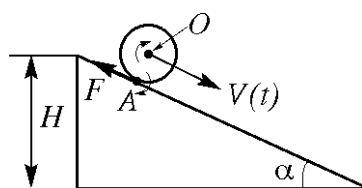


Рис. 15

рисунка, называется мгновенной осью вращения, а движение тела в этот момент времени можно охарактеризовать как мгновенное вращение вокруг этой оси). При отсутствии скольжения $V = \omega R$, поэтому (17) можно представить следующим образом:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{2}{10}MR^2 \frac{V^2}{R^2} = \frac{7}{10}MV^2. \quad (18)$$

У нижнего конца наклонной плоскости скорость центра масс шара, как легко видеть из закона сохранения энергии, равна

$$V_0 = \sqrt{\frac{10}{7}gH},$$

что, как и следовало ожидать, меньше скорости при соскальзывании шара без вращения, равной $\sqrt{2gH}$. При скатывании без скольжения для тел вращательной симметрии величину V_0 можно представить в виде:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1 + J_0/MR^2}}$$

где роль осевого момента инерции J_0 очень наглядна.

Другой путь решения этой задачи состоит в том, что катящееся тело можно рассматривать как тело, вращающееся в данный момент вокруг точки контакта A (рис. 15). С этой точки зрения полная кинетическая энергия шара есть энергия вращательного движения $K = 1/2 J_A \omega^2$. Как было показано (рис.11) $J_A = 7/5 MR^2$, поэтому выражение для кинетической энергии будет также аналогично формуле (18).



В общем случае движения твердого тела векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$, как уже отмечалось, не совпадают по направлению (рис. 5). Мы показали, что если в качестве осей x, y, z выбрать главные оси инерции тела, то $\mathbf{L} = \mathbf{i}J_x\omega_x + \mathbf{j}J_y\omega_y + \mathbf{k}J_z\omega_z$. При этом кинетическая энергия будет равна

$$K = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) = \frac{1}{2}\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}. \quad (19)$$

Формула (19) дает общее выражение вращательной кинетической энергии и согласуется с полученной ранее (15).

В соответствии с законом сохранения механической энергии системы можно определить работу внешних сил, необходимую для изменения кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси. Если за время dt происходит поворот тела на угол $d\alpha$, то формулу (9) можно представить в виде

$$N = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = J\omega \frac{d\omega}{d\alpha}, \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

откуда следует

$$Nd\alpha = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right).$$

Работа внешних сил при повороте тела на конечный угол α_0 равна

$$A = \int_0^{\alpha_0} Nd\alpha = \frac{1}{2}J(\omega_2^2 - \omega_1^2), \quad (20)$$

то есть изменению кинетической энергии вращательного движения тела. Используем соотношение (20) для характеристики сил трения — допустим, что какая-либо платформа в виде диска, ось которого закреплена в подшипниках, приводится во вращение с помощью электромотора. При достижении угловой скорости ω_0 мотор выключается. На ось будет действовать постоянная сила трения F_{TP} , направленная перпендикулярно оси. Элементарная работа этой силы равна $dA_{TP} = -F_{TP}Rd\alpha$, где R — радиус оси. Если до полной остановки платформа поворачивается на угол α , то работа сил трения $A_{TP} = F_{TP}R\alpha$. Из закона сохранения энергии легко найти число оборотов, которое сделает платформа до полной остановки,

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{J\omega_0^2}{4\pi F_{TP}R}. \quad (21)$$

где J — момент инерции платформы вместе с якорем электромотора.

Интересно прокомментировать влияние силы трения в рассмотренном примере скатывания шара по наклонной плоскости (рис. 15). Если бы в этом примере отсутствовало трение между шаром и плоскостью, то шар, вместо того, чтобы катиться, скользил бы по наклонной плоскости. Шар будет катиться только в том случае, когда имеется сила трения $F_{тр}$ (рис. 15). Эта сила обеспечивает ускоренное вращение шара при его скатывании с наклонной плоскости. Возникает вопрос — почему в законе сохранения энергии в этом примере мы не учитываем трение? Дело в том, что при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения (т. А на рис. 15). Мгновенная скорость таких точек равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления работы не производит и не влияет на величину полной кинетической энергии скатывающегося тела. При наличии силы трения сцепления работа силы тяжести идет на увеличение кинетической энергии не только поступательного, но и вращательного движения.

Проведение измерений

В экспериментах по данной теме исследуется вращение твердого тела (или системы тел) вокруг неподвижной оси. В опытах изучается вращение свободного поворотного стола (т.е. ненагруженного) и системы тел, когда на столе размещены различные тела (цилиндры, стержень, диск и т.д.). Стол приводится во вращение с помощью нити (нить № 1), закреплённой на одном из шкивов стола (радиусом R), проходящей через нижний и верхний ролики вертикальной стойки и нагруженной грузом, масса которого m варьируется (100-500 г). В такой схеме вращательный момент сил, действующий на стол,

$$N = mgR.$$

Методика проведения опытов заключается в следующем. Вначале стол заторможен — удерживается рукой, при этом щель на диске стола 4 (рис. 3) должна находиться в зазоре фотодатчика о чём свидетельствует свечение индикатора на панели измерительной системы (около кнопки “Готов”). Стол освобождается после нажатия кнопки “Готов”, груз совершает движение, а вращение стола носит равнопеременный характер. Покажите, что при таком движении угловая скорость через время τ будет равна $\omega = 2\varphi/\tau$ (в начальный момент $\omega = 0$), а угловое ускорение равно $\beta = 2\varphi/\tau^2$, где φ — угол поворота стола. Измерительная система установки (рис. 16) позволяет измерять либо время поворота стола за один оборот ($\varphi = 2\pi$), если тумблер 2 “1-ΔТ-2” находится в положении “1”, либо время за два оборота ($\varphi = 4\pi$), если тумблер в положении “2”. Тумблер выбора числа измерений “Цикл — одн” (3, рис. 16 — режим циклических измерений или однократного измерения, когда измерительная система производит од-

нократное измерение времени и после регистрации на табло этого результата не реагирует на поступающие последующие сигналы) целесообразно установить в режиме “Одн”.

1. Проверка равнопеременного характера вращения стола: на большой шкив стойки стола наматывается нить, которая проходит через ролики стойки и нагружается грузиком массой 100 г. Измеряют время τ_1 поворота стола на угол 2π (тумблер 2 в положении “1”) и время τ_2 поворота на угол 4π (тумблер 2 в положении “2”). Результаты опытов сопоставьте с теоретическим значением $(\tau_2 / \tau_1)^2 = \varphi_2 / \varphi_1 = 2$. Проведите несколько опытов.

2. Определите момент инерции свободного поворотного стола по формуле $J = N/\beta$ из серии измерений угловой скорости ω и углового ускорения β для двух значений радиуса шкива стойки стола при изменении массы грузов в пределах 100-500 г. Постройте графические зависимости $\beta(N)$. Определите погрешность измерений.

3. Определите моменты инерции тел различной геометрической формы: для этого изучаемое тело устанавливается на поворотном столе и для выбранных значений радиуса шкива и величины груза (т.е. для определённого вращательного момента) находится момент инерции нагруженного стола, который равен сумме моментов инерции свободного стола и установленной фигуры. В данном упражнении необходимо определить моменты инерции различных предметов: диска (1, рис. 2), кольца (6), стержня (2) и одинаковых цилиндров (3). При расположении этих фигур симметрично относительно оси вращения, т.е. если центр масс тела находится на оси вращения стола, определяется момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Все измеренные моменты инерции различных предметов сопоставля-



Рис. 16

ются с расчётными значениями (значения масс указаны на фигурах, геометрические размеры измеряются). Результаты измерений представьте в таблице и постройте графическую зависимость $\beta(J)$ (для определённого значения N), где J — момент инерции различных фигур; для

анализа результатов удобно вычислять моменты инерции в единицах $\text{г}\cdot\text{м}^2$. При выполнении этого упражнения следует найти значения ω в конце первого и второго оборота (эти данные будут необходимы в последующих упражнениях).

4. Проверка теоремы о параллельных осях (теорема Гюйгенса-Штейнера). В данном упражнении эта теорема проверяется с помощью двух одинаковых цилиндров массой около 200 г; если два цилиндра (масса M , радиус R) расположены симметрично относительно оси вращения на расстоянии a от неё, то полный измеренный момент инерции нагруженного стола равен:

$$J = J_0 + 2J_{\text{цил}},$$

где J_0 — момент инерции свободного стола, $J_{\text{цил}}$ — момент инерции цилиндра, смещённого относительно оси на расстояние a :

$$J_{\text{цил}} = \frac{1}{2}MR^2 + Ma^2. \quad (22)$$

Если, например, провести измерения для двух значений смещения цилиндров a_1 и a_2 ($a_2 > a_1$), то

$$\frac{J_2 - J_1}{a_2^2 - a_1^2} = 2M.$$

Это соотношение удобно для проверки теоремы: следует провести измерение для нескольких значений a , которые реализуются с помощью специальных отверстий на платформе стола, и проанализировать справедливость полученного расчётного соотношения.

5. Результаты, полученные при измерении момента инерции J в предыдущем упражнении при различных значениях a представьте в виде графика $J(a^2)$. По графику определите момент инерции J_0 свободного поворотного стола.

Контрольные вопросы

1. Уравнения движения материальной точки и системы частиц.
2. Всегда ли совпадают направления векторов момента импульса и угловой скорости при вращении твёрдого тела?
3. В каком случае при вращении механической системы давление на опоры оси вращения будет минимальным?
4. Как зависит положение центра масс от выбора системы отсчёта?



5. Чему равна кинетическая энергия твердого тела при произвольном движении? Приведите примеры характерных движений.
6. Какова роль момента инерции в динамике вращательного движения?
7. Какие величины в проведенных экспериментах следует измерять с наибольшей точностью?

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1989, §§ 30-36, 44, 45, 48.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986, §§ 31-34, 36.
3. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1983, §§ 8.1, 8.2.
4. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, §§ 87-89, 92, 97.
5. Фейнман Р. и др. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977, вып. 2, гл. 18, 19.



2. ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для образования колебательной системы используется поворотная платформа и две одинаковые пружины. Чтобы стол совершал колебания необходимо намотать нить на полтора оборота вокруг верхнего шкива стойки поворотного стола, к концам нити прикрепить пружины, концы которых закрепляются на оси нижнего ролика стойки (рис. 1).

В области упругих деформаций образованная колебательная система характеризуется гармоническими колебаниями, закон изменения угла поворота со временем:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t),$$

где φ_0 — максимальный угол начального поворота стола, ω_0 — собственная частота колебаний изучаемой системы, определяемая только её индивидуальными свойствами (жёсткостью параллельно соединённых пружин $k_{\text{нар}}$ и моментом инерции стола J , свободного или нагруженного). В проводимых экспериментах при работе с какими-либо двумя одинаковыми пружинами период колебаний изменяется при изменении полного момента инерции стола, т.е. зависит от характера нагрузки вращающейся платформы (вида предмета и его расположения).

Выражение для периода колебаний можно найти из энергетических соображений, пренебрегая силами трения. Угловая скорость наблюдаемых крутильных колебаний:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0 \varphi_0 \sin \omega_0 t$$

Её максимальное значение $\omega_{\text{макс}} = \omega_0 \varphi_0$ достигается, когда система проходит положение равновесия, в этом положении кинетическая энергия вращения системы будет равна $K = 1/2 J \omega_{\text{макс}}^2$. Потенциальная энергия максимальна при начальном повороте системы на угол φ_0 . При этом растяжение каждой из параллельно соединённых пружин Δx есть $\Delta x = R \varphi_0$, где R — радиус шкива стола, вокруг которого намотана нить. При упругой деформации соответствующая этому закручиванию потенциальная энергия равна $P = 1/2 k_{\text{нар}} \Delta x^2 = 1/2 k_{\text{нар}} R^2 \varphi_0^2$. Из условия равенства кинетической и потенциальной энергий легко найти период T . Действительно,

$$K = P, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{R} \left(\frac{J}{k_{\text{нар}}} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Если момент инерции ненагруженного стола обозначить J_0 (а соответствующий период колебаний свободного стола T_0), то момент инерции стола с установленным на него телом J будет равен

$$J = J_0 \frac{T^2}{T_0^2}, \quad (24)$$

где T — период колебаний нагруженной системы. Момент инерции установленного на столе предмета равен $J - J_0$.

Момент инерции J_0 является параметром установки, определяющим надёжность последующих измерений, его значение было определено в экспериментах по теме 1. Учитывая это замечание о величине J_0 , можно обратить внимание, что применяя соотношение (24), значение J_0 можно найти независимым путём. Для этого достаточно воспользоваться значением момента инерции какого-либо “эталонного” тела, например, двумя одинаковыми цилиндрами, момент инерции которых представлен формулой (22). Если такая система (стол, нагруженный двумя одинаковыми цилиндрами, расположенными симметрично относительно оси вращения) имеет период колебаний $T_{\text{эт}}$, то нетрудно показать, что

$$J_0 = \frac{2J_{\text{цил}}}{(T_{\text{эт}}/T_0)^2 - 1}. \quad (25)$$

Проведение измерений

Период вращательных колебаний исследуемой системы определяется жесткостью применяемых пружин (23). В данной работе используются две пары пружин различной жесткости. Эти пружины, как уже отмечалось, соединяются нитью (необходимо использовать нить № 2), которая охватывает верхний шкив стойки поворотного стола. Положение нити относительно шкива должно быть выбрано так, чтобы в равновесном положении риска указателя поворота стола на диске 4 (рис. 3) находилась строго напротив нулевого показания шкалы 3, что контролируется световым индикатором. Исследование разнообразных колебательных систем, образованных подобным образом, требует измерения периода возникающих вращательных колебаний при выводе системы из положения равновесия. Определение периода колебаний производится следующим образом. Тумблер “1-ΔТ-2” устанавливается в положение “2”. Тумблер “цикл-одн” в положение “цикл”, если требуется последовательное измерение серии периодов, в положение “одн”, если период колебаний необходимо измерить один раз. Повернуть стол на угол 45-50° и, удерживая его в этом положении, нажать кнопку “Готов”,

после чего отпустить стол. При колебаниях значение периода в миллисекундах высвечивается на табло измерительной системы (1, рис. 16).

1. Определите жесткость применяемых пружин. В данной работе применяются две пары пружин различных диаметров. Жёсткость пружин легко определяется из закона Гука в области упругих деформаций. Пружина (или система пружин) подвешивается на штыре оси верхнего ролика стойки 4 (рис. 1). К нижнему концу пружины подвешивается наборный груз (50-250г) (4 на рис. 2) и линейкой измеряется удлинение пружины. При изменении массы груза на Δm расстояние изменяется на Δh , жёсткость пружины находится по соотношению:

$$k = \frac{\Delta mg}{\Delta h}$$

Для заметного растяжения пружины помимо наборных грузов можно использовать цилиндры с массами около 100 и 200 г (3, 5 на рис. 2), точное значение массы указано на торце цилиндра.

1. Выполните следующие упражнения:

- измерьте с помощью штангенциркуля диаметр провода применяемых пружин;
- для каждой из пружин снимите и постройте зависимость удлинения от массы грузов;
- определите жёсткость каждой пружины;
- определите жёсткость двух последовательно соединённых пружин и сопоставьте результаты измерений с расчетным соотношением

$$1/k_{\text{посл}} = 1/k_1 + 1/k_2,$$

где $k_{\text{посл}}$ — жесткость последовательно соединенных пружин с коэффициентами упругости k_1 и k_2 ;

- определите жесткость двух параллельно соединенных пружин $k_{\text{пар}}$ (такое соединение обеспечивается с помощью перемычек 7 и 8, рис. 2) и сопоставьте с расчетным соотношением

$$k_{\text{пар}} = k_1 + k_2;$$

в дальнейшем необходимо знание жесткости двух пар параллельно соединенных одинаковых пружин;

- для каждого из опытов определите область упругих деформаций.

2. Определите значение J_0 по формуле (23), измеряя период вращательных колебаний свободного стола T_0 с пружинами с известными параметрами (все дальнейшие измерения проводятся для двух пар различных пружин).



3. Определите значение J_0 по формуле (25), проведя измерения с “эталонным” телом для различных расстояний от оси.

4. Сопоставьте найденные значения J_0 с результатами, полученными в теме 1; проведите анализ погрешностей и выберите наиболее достоверный результат J_0 , который следует использовать при дальнейших измерениях с применением соотношения (24).

5. Определите момент инерции деревянного параллелепипеда (9, рис. 2, масса $M=163,2$ г) относительно трёх главных осей инерции; сопоставьте результаты опытов с расчётными данными: при размерах сторон параллелепипеда a , b и c соответствующие моменты инерции равны:

$$J_1 = M/12(b^2 + c^2), J_2 = M/12(a^2 + c^2); J_3 = M/12(a^2 + b^2),$$

укажите оси с максимальным и минимальным моментами инерции.

6. Определите моменты инерции диска (1, рис. 2), кольца и сопоставьте с данными расчётов и опытов по теме 1.

7. Определите момент инерции стержня (2, рис. 2) относительно главной оси инерции и проведите сравнение с результатами измерений по теме 1 и расчётами.

8. Проверьте теорему Штейнера при смещении центра масс стержня относительно оси вращения на фиксированные расстояния с шагом 2 см; проведите сравнения с расчётом.

9. Проведите измерения момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс, когда стержень составляет с вертикалью угол α ; измерения проведите для двух-трёх значений α ; получите значение момента инерции для наклонного стержня $J_\alpha = M/12l^2 \sin^2 \alpha$ (l — длина стержня) и сопоставьте с экспериментальными результатами.

10. Результаты всех выполненных измерений представьте графически в виде зависимостей $T^2(J)$ для двух пар пружин с различной жёсткостью.

11. Проанализируйте погрешности измерений моментов инерции методами по темам 1 и 2 и дайте рекомендации по получению наиболее достоверных результатов.

12. Определите характер изменения амплитуды затухающих колебаний в зависимости от времени; эти измерения целесообразно выполнять для системы с довольно большим периодом колебаний, например, для стола, нагруженного кольцом; повернув платформу на угол 60° , нажимают кнопку “Готов”, освобождают систему и измеряют значение угла поворота при каждом последующем периоде; т.к. период колебаний практически не изменяется (изохронный режим), то можно вести отсчёт по номерам колебаний; наиболее трудоёмкий этап в этом опыте — регистрация угла отклонения с помощью метки; для облегчения измерений



можно фиксировать угол через два периода; постройте график зависимости амплитуды отклонения от времени (или номера колебаний) — по виду этой зависимости определите характер сил трения.

13. Определите область ангармонических вращательных колебаний; с этой целью найдите зависимость периода колебаний в широком диапазоне изменения начальных углов отклонения — $10-120^\circ$; представьте данные графически.

Контрольные вопросы

1. Как зависит период вращательных колебаний механической системы от ее момента инерции?
2. При каких упрощающих предположениях получена формула (23)?
3. Получите значение момента инерции стержня, составляющего с осью вращения угол α , если ось вращения проходит через центр масс стержня.
4. Какой из изученных методов измерения моментов инерции тел (темы 1 и 2) обладает наименьшей погрешностью?

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1989, §§ 35, 36, 42.
2. Поль Р.В. Механика, акустика и учение о теплоте. М.: Наука, 1971, §§ 48, 50, 51.
3. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лившиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969, § 33.
4. Стрелков С.П. Механика. М.: Наука, 1975, § 59.

3. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Проверка законов сохранения энергии при вращательном и поступательном движениях может быть выполнена на основании результатов, полученных в темах 1 и 2, и проведения необходимых дополнительных измерений.

1. По результатам измерений в теме 1 определите работу силы тяжести падающего груза массой m , приводящего во вращение поворотный стол. Эта работа $A=mgh$, где h — рас-



стояние, на которое смещается груз в таком опыте, равное $2\pi R$ или $4\pi R$ в зависимости от поворота стола на один или два оборота (R — радиус шкива поворотной платформы).

2. Рассчитайте вращательную кинетическую энергию поворотного стола $J\omega^2/2$, нагруженного различными телами, имеющими разные моменты инерции, которые были определены в теме 2. Угловая скорость $\omega = \beta\tau$, где угловое ускорение $\beta = 4\pi/\tau^2$, τ — время одного оборота. Расчеты энергии необходимо выполнить для различных значений радиуса шкива и массы грузов.

3. Для проведенных опытов рассчитайте кинетическую энергию падающего груза $mv^2/2$, где линейная скорость $v = \omega R$ находится для различных значений ω и R . Оцените роль этой энергии в общем энергетическом балансе и прокомментируйте результат.

4. Результаты измерений представьте в виде таблицы, удобной для анализа и сопоставления данных, и включающей в себя основные измеренные и рассчитанные параметры опытов.

Контрольные вопросы

1. Как применить и записать закон сохранения механической энергии в установках по темам 1 и 2?
2. Как влияют силы трения на результаты измерений в опытах по темам 1 и 2?
3. Какова роль различных энергий в общем энергетическом балансе рассмотренных методов измерений?

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1989, §§ 25, 47.
2. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1983, §§ 5.1-5.3, 8.2.

4. СИЛЫ ТРЕНИЯ

При относительном перемещении двух соприкасающихся тел возникает механическое сопротивление в плоскости их касания. Сила сопротивления, направленная противоположно относительному перемещению тел, называется силой трения. Это диссипативный процесс,

сопровождающийся выделением тепла, электризацией тел, их разрушением и др. Заметим, что механика не занимается изучением физической природы сил трения.

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой смазки называется сухим. В данной работе будут изучены законы сухого трения. Такое трение возникает не только при скольжении одного тела по поверхности другого, но и при всякой попытке вызвать такое скольжение. Поэтому и различают трение скольжения и трение покоя. До тех пор, пока внешняя сила не превосходит максимальной силы трения покоя F_0 , скольжение не возникает. Законы сухого трения были сформулированы Кулоном. Как экспериментально установил Кулон, величина силы трения $F_{тр}$ не зависит от величины площади поверхности соприкасающихся тел, а определяется силой нормального давления N , так что

$$F_{тр} = \mu N,$$

где постоянная μ называется коэффициентом трения и зависит от природы и состояния трущихся поверхностей. Если тело скользит по поверхности тела, то μ называется коэффициентом трения скольжения. Если же тела покоятся друг относительно друга, то μ называют коэффициентом трения покоя. Силы трения скольжения помимо того, что зависят от материала тел и состояния поверхностей, кроме того, зависят и от скорости скольжения (рис. 17, а). Впрочем, как также установил Кулон, эта зависимость выражена слабо, и для однородных твердых материалов при специальной обработке соприкасающихся поверхностей, сила трения имеет идеализированный вид, приведенный на рис. 17, б.

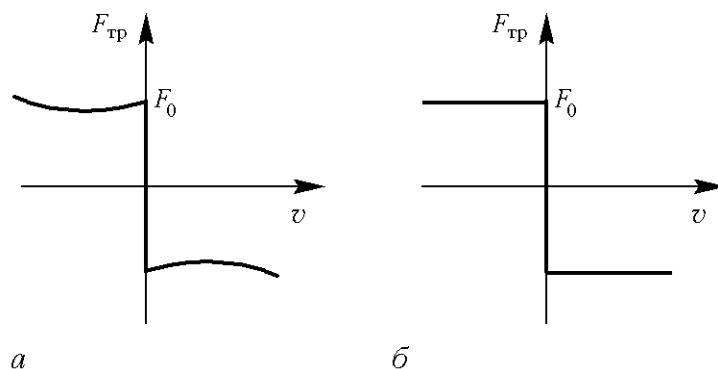


Рис. 17



4.1. Определение коэффициентов трения

Для определения коэффициентов трения между различными материалами используется специальное устройство- трибометр (рис. 18), которое устанавливается на платформе поворотного стола. На платформе устанавливается диск 1 с осью. На выступающие из диска штыри надевается кольцо 2 из исследуемого материала. Другое кольцо 2 надевается на штыри второго диска 3 и вместе с ним накладывается на первый диск с кольцом так, чтобы ось нижнего диска вошла в отверстие верхнего диска. Средний диаметр колец 60 мм. На шкив наматывают нить 4 (нить № 3), узел который закрепляется в прорези шкива (радиус шкива 34 мм). Нить через ролик 5 закрепляется к динамометру 6, подвешенному на стойке, который и измеряет в опыте величину трения скольжения. На верхний диск трибометра устанавливается груз известной массы. Для определения коэффициентов трения между различными материалами в наборе имеются фрикционные кольца (10, рис. 2) из следующих материалов: сталь, латунь, алюминий, тефлон, текстолит, резина. В качестве грузов применяются цилиндры (3, 5 на рис. 2).

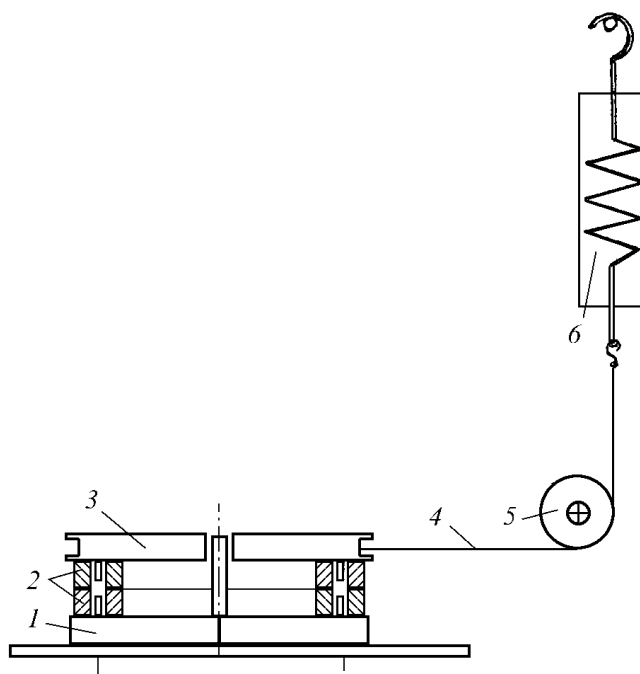


Рис. 18

Платформа стола приводится во вращение электродвигателем. Для этого необходимо малый шкив двигателя двумя пассиками соединить со шкивом стойки стола. Блок питания измерительной системы должен работать в режиме постоянного напряжения (тумблер 4, рис.

16" ~ =" в положении "="). Для включения двигателя тумблер 5 "привод/тормоз" перевести в положение "привод".

Методика измерений заключается в исследовании зависимости силы натяжения нити, измеряемой динамометром, от массы груза, установленного на трибометр. При каждой нагрузке трибометра добиваются проскальзывания между верхним и нижним кольцами из исследуемых материалов. Режим проскальзывания подбирается регулировкой режима работы двигателя с помощью ручки "Амплитуда". Нагрузка на трибометр изменяется в пределах 100-300-500 г. Коэффициент трения μ определяется из условия равенства моментов сил трения и натяжения динамометра:

$$\mu = \frac{r_1 \Delta F}{r \Delta(mg)}, \quad (26)$$

где r — средний радиус фрикционного кольца, r_1 — радиус шкива трибометра, ΔF — изменение силы натяжения при изменении массы нагрузки на трибометр на Δm .

Измерения проведите для различных пар материалов. Результаты измерений для каждой пары материалов представьте на графике зависимости сил натяжения от массы нагрузки на трибометр. Прокомментируйте полученные зависимости.

Изменяя скорость вращения стола ручкой "Амплитуда" оцените зависимость силы трения скольжения от скорости проскальзывания материалов.

Установку не разбирайте, эта схема потребуется в следующем упражнении.

4.2. Определение КПД электродвигателя

В этом упражнении, как и в предыдущем, используется трибометр — он создает нагрузку на двигатель. Блок питания измерительной системы должен быть включён в режиме постоянного напряжения (тумблер 4 "="). Малый шкив двигателя двумя пассиками соедините со шкивом стойки стола.

Полезная мощность электродвигателя расходуется на преодоление сил трения, создаваемых трибометром при разных нагрузках. Элементарная работа на преодоление сил трения при повороте стола на угол $d\alpha$ равна $dA_{TP} = N_{TP} d\alpha$ (N_{TP} — момент сил трения). Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = \frac{dA_{TP}}{dt} = N_{TP} \frac{d\alpha}{dt} = N_{TP} \omega, \quad N_{TP} = Fr$$



F — показания динамометра, r — средний радиус фрикционных колец, $\omega=2\pi/T$, T измеряется (тумблер “1-АТ-2” в положении “1”) для выбранного режима вращения на табло измерительной системы (в миллисекундах).

Таким образом, полезная мощность определяется по формуле:

$$P_{пол} = \frac{2\pi Fr}{T}$$

Обратите внимание на размерности входящих в это соотношение величин, чтобы $P_{пол}$ выразить в ваттах.

Затраченная мощность двигателя определяется по потребляемой мощности от источника питания: $P_{потр} = IU$, где I , U — соответственно ток и напряжение в цепи двигателя. Эти величины определяются с помощью универсального измерительного прибора — мультиметра. Для измерения тока и напряжения (в данной схеме — это режим постоянного тока) используются необходимые контакты мультиметра, соединяемые с соответствующими гнездами на измерительном блоке установки. Напряжение питания двигателя U (использовать предел измерений на мультиметре 20 В) измеряется между гнездами “Общ” и “Вых” на измерительном блоке (рис. 16). Для измерения потребляемого тока I необходимо измерить напряжение между гнездами “Вых” и “Ток” и разделить его на эталонное сопротивление в цепи 1 Ом (предел измерения этого напряжения — несколько десятых долей вольта). Будьте внимательны при подключении измерительного блока к соответствующим разъёмам мультиметра.

Проведите измерения всех необходимых величин для различных нагрузок трибометра (0 — 100 — 200 — 300 — 400 г). Все данные представьте в таблице:

	Нагрузка трибометра (масса груза, г)				
	0	100	200	300	400
Показания динамометра - F , Н					
Период вращения стола - T , мс					
Полезная мощность - $P_{пол}$, Вт					
Напряжение питания - U , В					
Потребляемый ток - I , А					
Потребляемая мощность - $P_{потр}$, Вт					
КПД - η					

По результатам измерений проанализируйте изменение потребляемой мощности и КПД двигателя $\eta = P_{пол} / P_{потр}$ в зависимости от нагрузки трибометра. Измерения проведите для нескольких различных пар материалов.

4.3. Определение трения в подшипниках

В данном упражнении определяются силы трения в подшипниках, установленных на оси вращения стола. Поворотный стол должен находиться в свободном состоянии, т.е. отсоединён от электромотора. По исследованию изменения угловой скорости со временем вращающейся платформы стола определяют момент сил сухого трения в подшипниках. При таком трении $N_{mp} = const$ и зависимость угловой скорости от времени удобно найти из уравнения динамики вращательного движения:

$$N_{mp} = -J \frac{d\omega}{dt}$$

где J — момент инерции поворотной платформы с расположенным на ней телом выбранной формы.

Из этого уравнения можно получить:

$$\omega = \omega_0 - \frac{N_{mp}}{J} t, \quad (27)$$

где ω_0 — начальная угловая скорость вращения стола.

Учитывая, что $\omega = d\varphi/dt$, из (27) получим закон изменения угла поворота платформы от времени:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{N_{mp}}{J} t^2. \quad (28)$$

Кинетическая энергия вращения пропорциональна ω^2 , используя (27) и (28), можно найти ω^2 в зависимости от угла поворота φ :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2 \frac{N_{mp}}{J} \varphi. \quad (29)$$

Таким образом, в случае сухого трения зависимости угловой скорости от времени и квадрата угловой скорости от угла поворота носят линейный характер — соотношения (27), (29).

При проведении измерений на поворотном столе установите два одинаковых цилиндра (массой около 200 г) симметрично относительно оси вращения на расстоянии от неё 6 см. Момент инерции такой системы ранее уже был определён. Стол приведите во вращение рукой и исследуйте уменьшение угловой скорости. Начальная скорость поворота стола подбирается экспериментально, исходя из удобства проведения измерений. В опыте регистрируйте



последовательность временных интервалов τ_i поворота стола на угол 2π (тумблер “1-ДТ-2” в положении “1”). Тумблер “цикл-однокр” должен быть в положении “цикл”, тогда после каждого полного оборота (и звукового сигнала) на табло измерительной системы фиксируется время каждого последующего оборота. При проведении этих измерений надо успевать внимательно измерять следующие друг за другом интервалы времени поворотов платформы.

Для каждого отдельного измерения (оборота) определите среднюю угловую скорость $\omega_i = 2\pi/\tau_i$ и среднюю вращательную энергию системы $1/2J\omega_i^2$. Потеря энергии за один оборот равна $N_{mp}2\pi$. Полученные в опыте данные представьте в виде таблицы, в которую внесите все указанные параметры в зависимости от номера оборота и от текущего времени (т.е. суммы последовательных τ_i). Для каждого оборота определите момент N_{mp} и найдите его среднее значение. Постройте графические зависимости средней угловой скорости от текущего времени и квадрата угловой скорости от полного угла поворота стола. Значение N_{mp} можно определить и другим способом: число оборотов n , которое сделает поворотный стол до полной остановки равно:

$$n = \frac{\varphi_{полн.}}{2\pi} = \frac{J\omega_0^2}{4\pi N_{mp}}$$

Для нахождения N_{mp} этим способом надо знать начальную угловую скорость ω_0 в момент начала отсчёта времени и число оборотов n до остановки стола (его можно определить по числу звуковых сигналов после каждого оборота). Проведите сопоставление найденных значений N_{mp} .

Контрольные вопросы

1. Объясните получение формулы (26).
2. Объясните принцип работы трибометра.
3. Как определить КПД электродвигателя?
4. Какие электрические измерения необходимо провести в данной работе?
5. Какие характерные зависимости необходимо исследовать для определения трения в подшипниках?

Литература

1. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, §§ 44, 45, 49-51.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986, § 36.

5. ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Груз, подвешенный на пружине и совершающий колебания, является, пожалуй, простейшей механической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением — это классический пример гармонического осциллятора. На такой простой механической системе можно изучать основные свойства колебательных систем. Если массой пружины можно пренебречь, а также не учитывать влияние трения на гармонический осциллятор, то уравнение движения системы для упругой пружины будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (30)$$

где x — координата груза, $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ — угловая частота собственных колебаний, M — масса груза, k — жёсткость пружины.

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (31)$$

где A и φ — амплитуда и фаза, определяемые начальными условиями.

Влияние трения проявляется в том, что движение гармонического осциллятора затухает. Внешняя среда оказывает сопротивление движущейся частице. Взаимодействие тела со средой представляет собой сложный процесс, приводящий к переходу энергии движущегося тела в тепло, или как говорят, к диссипации энергии. С чисто механической точки зрения этот процесс описывается введением силы трения F_{mp} , которая при достаточно малых скоростях пропорциональна величине скорости тела

$$F_{mp} = -bv = -b \frac{dx}{dt},$$

где b — положительная константа, зависящая от формы тела и характеризующая взаимодействие тела со средой, а знак минус указывает, что сила трения направлена противоположно скорости. С учётом тормозящей силы дифференциальное уравнение, описывающее поведение затухающего гармонического осциллятора, будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (32)$$

где константа $\gamma = b/2M$, а решение уравнения (32) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (33)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — частота осциллятора при наличии трения, A_0 — начальная амплитуда колебаний.

Таким образом, амплитуда колебаний убывает из-за трения по экспоненциальному закону (рассмотренный случай характеризуется вязким трением), а коэффициент γ называют коэффициентом затухания. Отмеченные свойства затухающего гармонического осциллятора характерны для малых сил трения, когда диссипация энергии за период колебаний относительно мала.

Из соотношения (33) видно, что за время $\tau = 1/\gamma$ амплитуда колебаний уменьшается в e раз (это время велико по сравнению с периодом колебаний). За время t_0 амплитуда колебаний уменьшается до половины начального значения $e^{-\gamma t_0} = 1/2$, это время равно

$$t_0 = \tau \ln 2. \quad (34)$$

За время τ произойдет $n = \tau/T$ колебаний. Величину $\theta = 1/n = \gamma T$ называют логарифмическим декрементом затухания.

Важной характеристикой осциллирующей системы любой физической природы является величина Q , называемая добротностью. Эта безразмерная величина представляет собой умноженное на 2π отношение запасенной энергии в колебательной системе к среднему значению энергии, теряемой за один период. Для слабо затухающего осциллятора эта величина равна:

$$Q = \frac{1}{2} \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\gamma} = n\pi = \frac{\pi}{\theta}, \quad (35)$$

а период его колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}. \quad (36)$$

Проведение измерений

1. Для различных пружин измерьте период колебаний пружинных маятников при значениях массы груза в пределах 50-500 г (период находится с помощью ручного секундомера по измерению времени 20-40 колебаний); результаты измерений представьте в таблице и на графике $T^2(M)$, из которого определите жёсткость пружин и сопоставьте с результатами статиче-

ского метода, полученными ранее; оцените погрешности измерений жёсткости пружин динамическим методом.

2. Определите ускорение свободного падения с помощью пружин; эти простые измерения позволяют определить величину g , не зная значение жёсткости пружины — для этого необходимо измерить растяжение пружины x_1 и x_2 под действием двух различных масс, а также определить соответствующие периоды колебаний для этих масс T_1 и T_2 , легко показать, что ускорение свободного падения можно найти по формуле:

$$g = 4\pi^2 \frac{x_2 - x_1}{T_2 - T_1};$$

проведите измерение g для разных пружин и сопоставьте результаты с табличными данными.

3. Исследование затухающих колебаний. Это упражнение заключается в определении основных параметров, характеризующих процесс затухания колебаний. Для выбранного пружинного маятника (для удобства измерений предпочтительно использовать маятник с большим периодом колебаний) с помощью линейки и ручного секундомера измеряют характерное время t_0 , в течение которого начальная амплитуда колебаний уменьшается в два раза; по формуле (34) определяют τ , а затем коэффициент затухания $\gamma = 1/\tau$; зная период колебаний T и полученное значение γ , можно определить логарифмический декремент затухания $\Delta\theta = \gamma T$ и добротность колебательной системы Q .

4. Определите параметр $b=2\gamma M$, характеризующий характер силы трения и зависящий от свойств среды (вязкости), формы и размеров тела и состояния его поверхности; проведите качественное сопоставление найденного параметра b с известным соотношением для шара (формула Стокса) $b = 6\pi\eta a$, где η — вязкость среды, a — радиус шарика. Вязкость воздуха при комнатной температуре $\eta = 0,018$ мПа·с.

5. Определите закон изменения амплитуды колебаний от времени, для чего измерьте амплитуду колебаний пружинного маятника через одинаковое число периодов (это число выбирается каждым индивидуально из удобства и надежности проведения опыта) и постройте график зависимости амплитуды от числа колебаний (времени); проанализируйте полученную зависимость и сопоставьте ее с экспоненциальным законом $e^{-\gamma t}$ для измеренного коэффициента затухания γ .

Контрольные вопросы



1. При каких упрощающих предположениях получена формула (36)?
2. Как силы трения влияют на частоту колебаний гармонического осциллятора?
3. Как экспериментально определить добротность механической колебательной системы?
4. Проведите энергетический анализ гармонического осциллятора, состоящего из массы на пружине.

Литература

1. Киттель Ч. , Найт В. , Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1983, §§ 7.1, 7.2, 7.4-7.6.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986, §§ 50-52.

6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И РЕЗОНАНС

Во всякой реальной колебательной системе всегда происходят те или иные процессы трения. Мы уже отметили выше, что свободные колебания, возникающие в системе под влиянием начального толчка, с течением времени затухают. Для тех случаев, когда сила трения пропорциональна скорости движения объекта, нами получено линейное дифференциальное уравнение (32), описывающее поведение затухающего гармонического осциллятора. Заметим, что электрическим аналогом рассмотренного закона затухания является электрическая цепь с омическим сопротивлением R , включенным последовательно с катушкой индуктивностью L и конденсатором емкостью C . Допустим, мы зарядили обкладки конденсатора каким-то начальным зарядом q_0 , тогда изменение заряда со временем $q(t)$ будет подчиняться дифференциальному уравнению, аналогичному (32)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (32)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (37)$$

где $2\gamma = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Интересно обратить внимание на аналогии между электрическими и механическими величинами:

Общие характеристики	Величины	
	Механические	Электрические
Независимая переменная	t	t
Зависимая переменная	$x(t)$	$q(t)$
Скорость	$v = dx/dt$	сила тока $I = dq/dt$
Инерция	m	L
Сопротивление	коэффициент трения $b = 2\gamma M$	сопротивление $R = 2\gamma L$
Затухание	$\gamma = b/2M$	$\gamma = R/2L$
Жесткость	k	$1/C$
Резонансная частота	$\omega_0^2 = k/M$	$\omega_0^2 = 1/LC$
Добротность	$Q = \omega_0/2\gamma$	$Q = \omega_0 L/R$

На этой глубокой аналогии основана техника моделирования неэлектрических систем с помощью электрических цепей.

Для того, чтобы возбудить в системе (механической, электрической) незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии (механической или электрической).

Такая компенсация может производиться внешними (по отношению к колебательной системе) источниками энергии. Простейшим случаем является воздействие на колебательную систему переменной внешней силой $F(t)$, изменяющейся по гармоническому закону с некоторой частотой ω

$$F(t) = F_0 \sin \omega t, \quad (38)$$

где F_0 — амплитудное значение внешней силы.

Под влиянием этой силы в системе установятся колебания с частотой ω вынуждающей силы, эти колебания называются вынужденными (напомним, что частоту собственных колебаний мы обозначили ω_0). Эта важная особенность процесса, который мы начинаем рассматривать: установившиеся колебания осциллятора с внешним воздействием происходят с вынуждающей частотой ω , а не с собственной ω_0 . Схемы механической и электрической колебательных диссипативных систем с внешней гармонической силой показаны на рис. 19.

Для механической колебательной системы с внешней силой $F(t)$ (рис. 19, а) уравнение движения будет иметь вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (39)$$

Ускорение осциллятора, совершающего вынужденные колебания, определяется одновременным действием трех сил: восстанавливающей силы — kx , внешней силы $F(t)$ и силы трения $F_{тр} = -bv$. Перепишем уравнение (39) в более удобной форме

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \sin \omega t, \quad (40)$$

где введены прежние обозначения $\gamma = b/2M$, $\omega_0^2 = k/M$.

Для электрической системы (рис. 19, б)

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{M} \sin \omega t \quad (41)$$

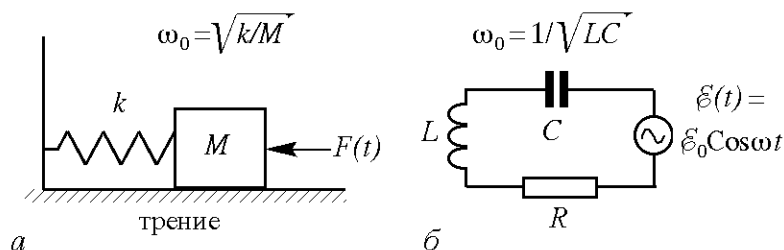


Рис. 19

Полученные дифференциальные уравнения (40) и (41) характеризуют установившиеся вынужденные колебания — каковы бы ни были начальные условия в момент начала действия внешней силы, после некоторого промежутка времени осциллятор будет совершать установившиеся колебания. В нашем анализе мы не рассматриваем процесс установления этих колебаний, так называемый переходный режим, т.е. мы считаем, что внешняя сила начала действовать очень давно и система “забыла” первоначальные колебания.

Будем искать решение уравнения (40) в виде

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (42)$$

в котором x_0 — амплитуда вынужденных колебаний, φ — разность фаз между внешней силой $F(t)$, меняющейся по закону (38), и смещением осциллятора x . Мы уже обращали внимание, что начальные условия не имеют значения для вынужденных колебаний, поэтому подчерк-

нем, что здесь φ имеет совершенно другое значение, чем то, с которым мы имеем дело в подобной записи для собственных колебаний осциллятора, когда фаза φ определяется начальными условиями. Если не вводить φ , то решение уравнения (40) не может быть получено. В электрических цепях обычно говорят о разности фаз между током и напряжением.

Чтобы определить амплитуду x_0 и разность фаз φ , сначала вычислим производные:

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

и подставим их в уравнение (40). Эта подстановка дает:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin(\omega t + \varphi) + 2\gamma\omega x_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{M} \sin(\omega t). \quad (43)$$

Правую часть уравнения (43) представим в виде

$$\frac{F_0}{M} \sin(\omega t + \varphi - \varphi) = \frac{F_0}{M} (\sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi - \cos(\omega t + \varphi) \sin \varphi)$$

С учетом этого выражения (43) приобретает вид:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin(\omega t + \varphi) + 2\gamma\omega x_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{M} (\sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi - \cos(\omega t + \varphi) \sin \varphi). \quad (44)$$

Уравнение (44) может быть удовлетворено лишь в том случае, если коэффициенты в левой и правой частях при $\sin(\omega t + \varphi)$ и $\cos(\omega t + \varphi)$ будут равны, откуда находим:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 = \frac{F_0}{M} \cos \varphi, \quad 2\gamma\omega x_0 = -\frac{F_0}{M} \sin \varphi. \quad (45)$$

Из этих выражений определим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (46)$$

Для того, чтобы найти x_0 , оба уравнения (45) возведем в квадрат и сложим:

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right] x_0^2 = \left(\frac{F_0}{M} \right)^2,$$

откуда находим, что

$$x_0 = \frac{F_0/M}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right]^{1/2}}. \quad (47)$$

Уравнения (46) и (47) представляют собой искомое решение. Из этих выражений видно, что значения амплитуды и фазы вынужденных колебаний под действием вынуждающей силы $F(t) = F_0 \sin \omega t$ прежде всего существенно зависят от соотношения между частотами

внешнего воздействия ω и собственных колебаний ω_0 , а смещение осциллятора (42) представляется выражением

$$x = \frac{F_0/M}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right). \quad (48)$$

Исследуем теперь поведение амплитуды вынужденных колебаний x_0 (47) и разности фаз φ (46) в зависимости от частоты ω . Разберем сначала предельные случаи, когда частота ω далека от ω_0 . Напомним, что при нашем рассмотрении мы всегда предполагали затухание малым, т.е. $\gamma \ll \omega_0$.

При малой вынуждающей частоте, когда $\omega \ll \omega_0$, из (47) следует

$$x_0 \approx \frac{F_0}{M\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \quad (49)$$

Амплитуда вынужденных колебаний оказывается равной величине статического смещения, т.е. такого смещения груза на пружине жесткостью k , которое вызвала бы постоянная сила F_0 . Как видно из (45) и (46), $\cos\varphi \rightarrow 1$, $\sin\varphi \rightarrow 0$, откуда $\varphi \rightarrow 0$. Таким образом, в случае низкой частоты смещение и вынуждающая сила совпадают по фазе, а смещение определяется свойствами пружины, а не массой или трением.

При большой вынуждающей частоте, когда $\omega \gg \omega_0$

$$x_0 \approx \frac{F_0}{M\omega^2}.$$

При увеличении частоты воздействия амплитуда колебаний стремится к нулю. При этом $\cos\varphi \rightarrow -1$, $\sin\varphi \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pi$. В этом предельном случае смещение уменьшается по закону $1/\omega^2$ и определяется инерцией массы, а фаза вынужденных колебаний почти противоположна фазе внешнего воздействия. Таким образом, силы упругости и силы трения в сравнении с внешней силой не играют никакой роли.

Как видно из соотношения (47) наибольшего значения амплитуда вынужденных колебаний достигает приблизительно при совпадении частот ω и ω_0 или, как говорят, при резонансе. Так как явление резонанса очень часто используется в различных приложениях, мы рассмотрим этот случай более подробно. Прежде всего обратим внимание, что максимального значения смещение $x_{0\text{рез}}$ достигает при частоте $\omega_{\text{рез}}$, не в точности равной ω_0 . Это следует из того, что производная от знаменателя выражения (47) обращается в нуль (а это и есть условие максимума x_0), когда

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right] = 0$$

при значении $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. $\cos\varphi \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow -\pi/2$. Амплитуда при резонансе будет равна

$$x_{0рез} \approx \frac{F_0}{M} \frac{1}{2\gamma\omega_0}. \quad (50)$$

Может показаться странным, что максимум смещения осциллятора получается при значении разности фаз $\varphi = -\pi/2$, т.е. когда разность фаз между силой и смещением составляет в точности 90° . Хитрость заключается в том, что наибольшее отклонение достигается в том случае, когда в точности совпадают фазы вынуждающей силы и скорости. Именно в этом случае масса получает толчки в надлежащие моменты времени и в надлежащих положениях. Когда смещение равно нулю, скорость оказывается максимальной. Если в какой-то момент времени масса движется в положительном направлении, то для достижения наибольшего отклонения нужно, чтобы в этот же момент времени и сила достигала бы своего наибольшего значения. В крайней точке, где скорость меняет знак, для достижения резонанса нужно, чтобы и сила в тот же момент времени также изменяла бы знак. Таким образом, при описании резонанса удобнее и понятнее говорить о разности фаз между скоростью и вынуждающей силой. Мы знаем, что скорость осциллятора опережает его смещение в точности на 90° . Следовательно, при резонансе, когда сила и скорость совпадают по фазе, необходимо, чтобы $\varphi = -\pi/2$, т.к. $F(t) \sim \sin\omega t$, а $x(t) \sim \sin(\omega t + \varphi)$.

При резонансе внешняя сила совершает наибольшую работу, т.к. направление движения массы все время совпадает по знаку с направлением внешней силы. Таким образом, с точки зрения энергетической явление резонанса обусловлено тем, что при совпадении частот ω и ω_0 выполняются наиболее благоприятные условия для поступления в колебательную систему энергии от внешнего источника. Роль внешней силы сводится главным образом к компенсации действующих в системе сил трения. Если же частота ω заметно отличается от ω_0 , то направление движения осциллятора в течение некоторой части периода совпадает с направлением внешней силы, а в течение другой части периода противоположно ей. Самые неблагоприятные условия передачи энергии от источника внешней силы к осциллятору имеют место при $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$, когда фазы силы и скорости отличаются почти на $\pi/2$. Это означает, что сила примерно половину времени направлена противоположно скорости и половину времени совпадает с ней. Таким образом, в среднем осциллятору от внешнего источника передается



незначительная энергия за период колебаний и поэтому амплитуда колебаний в этих случаях очень мала.

Количественной характеристикой эффекта резонанса может служить отношение амплитуды смещения при резонансе $x_{0рез}$ к статическому смещению под действием силы F_0 . Из формул (49) и (50) следует

$$\frac{x_{0рез}}{x_{0(\omega=0)}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = Q, \quad (51)$$

эту величину мы назвали добротностью колебательной системы (35). Добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы. Из формулы (51) видно, что чем меньше затухание осциллятора, тем более энергично он “раскачивается” в резонансе. Добротность может быть очень большой величиной. Порядок этой величины разнообразных типов осцилляторов приведен в таблице.

Некоторые типичные значения Q

Радиотехнический колебательный контур	10 - 10 ²
Земля (сейсмические волны)	25 - 1400
Камертон	10 ²
Скрипичная струна	10 ³
СВЧ резонатор	10 ³ - 10 ⁴
Оптический резонатор	10 ⁶ - 10 ⁷
Возбужденный атом	10 ⁷

Полученные нами характерные особенности изменения амплитуды вынужденных колебаний x_0 и сдвига фаз φ при изменении частоты ω внешнего воздействия принято представлять графически. Зависимость амплитуды колебаний x_0 от частоты ω внешней силы (рис. 20, *a*) называется резонансной кривой. На этом рисунке показаны резонансные кривые для различных значений коэффициента затухания γ (или различных добротностей Q). Чем меньше затухание, тем острее резонансный максимум. Картина изменения разности фаз φ от ω изображена на рис. 20, *б* (это так называемая фазовая резонансная кривая). При малом затухании (γ_1) в очень малом интервале частот вблизи резонансной фаза быстро меняется почти от 0 до π , т.е. на резонансной частоте происходит “переворот” фазы.

Отметим еще одно важное свойство резонансной кривой, которое характеризуется поня-

тием ширины резонансной кривой. Для введения этого понятия резонансную кривую представляют в виде зависимости квадрата амплитуды от частоты ω . Это связано с энергетической трактовкой изучаемого явления, а энергия осциллятора, как известно, характеризуется квадратом амплитуды. Вид этой зависимости по характеру аналогичен резонансной кривой.

На рис. 21 она показана в окрестности резонансной частоты ω_0 . Шириной резонансной

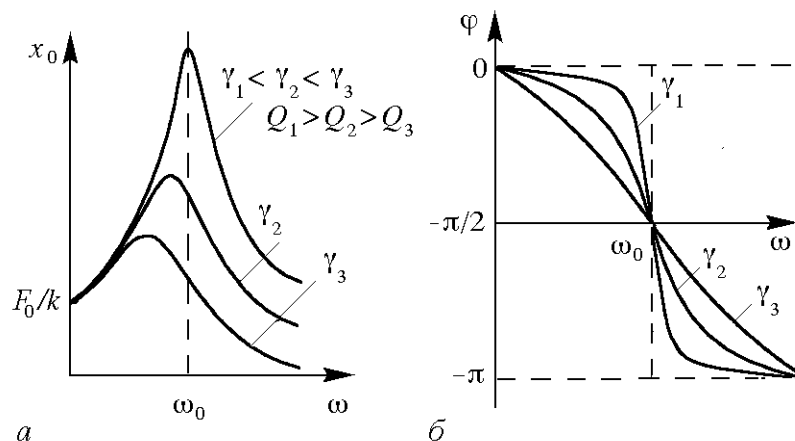


Рис. 20

кривой называется величина $\Delta\omega$, показанная на рисунке, на частотах $\omega_0 - \Delta\omega/2$ и $\omega_0 + \Delta\omega/2$ энергия вынужденных колебаний осциллятора вдвое меньше резонансного значения

$$x_{0\text{рез}}^2 = \left(\frac{F_0}{M} \frac{1}{2\gamma\omega_0} \right)^2.$$

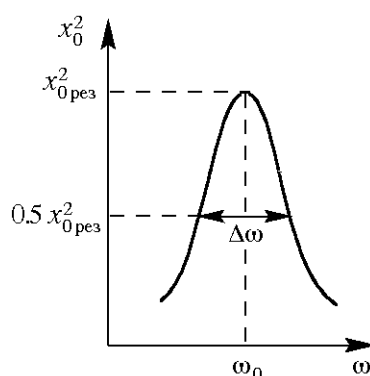


Рис. 21

Величину $\Delta\omega$ также называют шириной линии резонанса. На этих частотах можно считать (вблизи резонанса):



$$x_0^2 = \left(\frac{F_0}{M}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Теперь учтем: $\omega_0 - \omega = \Delta\omega/2$, $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$, тогда

$$x_0^2 = \left(\frac{F_0}{M}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 (\Delta\omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Запишем условие уменьшения энергии в два раза $1/2x_{0рез}^2 = x_0^2$, или

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\gamma\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2 (\Delta\omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2},$$

откуда для ширины резонансной кривой находим $\Delta\omega = 2\gamma$. С учетом (51)

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (52)$$

Мы видим, что чем больше добротность осциллятора, тем уже резонансная кривая. Далее, из формул (49), (51) и (52) имеем

$$Q = \frac{x_{0рез}}{x_{0(\omega=0)}} = \frac{x_{0рез}}{F_0/k} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

откуда следует $x_{0рез}\Delta\omega = \omega_0 F_0 / k$, т.е. для выбранного осциллятора при заданной внешней силе

$$x_{0рез}\Delta\omega = const.$$

Итак, чем больше максимум резонансной кривой, тем он острее, т.е. тем уже резонансная кривая, что и показано на рис. 20, а.

Говоря об энергии осциллятора, на который действует внешняя сила, интересно выяснить величину работы этой силы. Оценим среднюю по времени работу вынуждающей силы над осциллирующей системой в единицу времени, т.е. мощность, поглощаемую осциллятором. Работа, совершаемая за время dt на пути dx равна $F(t) dx$, а мгновенная мощность $P(t) = F(t) dx/dt$. Движение осциллятора описывается уравнением (39)

$$F(t) = M \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma M \frac{dx}{dt} + M\omega_0^2 x.$$

Значит

$$P(t) = M \left[\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \frac{dx}{dt} \right] + 2\gamma M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (53)$$

Простым дифференцированием можно проверить, что выражение в квадратных скобках можно переписать в виде



$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 x^2 \right] = \frac{d}{dt} [K + U] = \frac{dE}{dt} . \quad (54)$$

где K — кинетическая энергия движущегося осциллятора, U — потенциальная энергия пружины, а E — запасенная энергия, т.е. энергия, накопленная при колебаниях. Значит,

$$P(t) = \frac{dE}{dt} + 2\gamma M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 . \quad (55)$$

Теперь давайте усредним мощность по времени за много периодов колебаний. Если колебания длятся долго, то запасенная энергия не изменяется и $dE/dt = 0$. Таким образом, средняя мощность $\langle P \rangle$ равна

$$\langle P \rangle = \langle 2\gamma M (dx/dt)^2 \rangle . \quad (56)$$

Иными словами, если усреднить затраченную за долгое время мощность, то вся энергия поглотится из-за сопротивления, представляемым выражением $2\gamma M (dx/dt)^2$ (вспомним, что сила трения, тормозящая движение осциллятора, равна $2\gamma M (dx/dt)$). Учитывая (42), найдем среднюю мощность по соотношению (56)

$$\langle P \rangle = \langle 2\gamma M [\omega x_0 \cos(\omega t + \varphi)]^2 \rangle = \gamma M \omega^2 x_0^2 . \quad (57)$$

Мощность, поглощаемая при резонансе

$$\langle P_{рез} \rangle = \gamma M \omega^2 x_{0рез}^2 \quad (58)$$

Интересно использовать соотношение (56) для характеристики электрической цепи (рис. 19, б). В этом случае (см. таблицу соответствия механических и электрических величин) dx/dt надо заменить на ток $I(t)$, а $2\gamma M$ на активное сопротивление цепи R . Значит, среднюю мощность потерь в электрической цепи можно представить в виде:

$$\langle P \rangle = \langle RI^2(t) \rangle = 1/2 RI_0^2 , \quad (59)$$

где I_0 — амплитудное значение переменного тока. Смысл выражения (59) совершенно ясен — поглощаемая энергия переходит в джоулево тепло, выделяемое сопротивлением. Амплитуда тока в такой последовательной цепи достигает максимального значения $I_{0рез} = E_0/R$ в момент резонанса, когда $\omega^2 \approx 1/LC$. В этом режиме полное сопротивление цепи, состоящей из элементов R, L, C , достигает минимального значения, равного R (это явление получило название резонанса напряжений — при больших добротностях такого колебательного контура напряжения на индуктивности и емкости во много раз превосходят напряжение на омическом сопротивлении).

Полученный нами результат относительно мощности, поглощаемой осциллятором, целесообразно дополнить еще некоторыми физическими характеристиками. Для этого воспользуемся соотношением (57) и перепишем его с учетом (47) в следующем виде:

$$\langle P \rangle = \gamma M \omega^2 x_0^2 = \frac{F_0^2}{4\gamma M} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \right)^2}. \quad (60)$$

Зависимость от частоты внешнего воздействия характеризуется вторым сомножителем, который можно представить в виде функции

$$f(X) = \frac{1}{1 + X^2}, \quad X = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}. \quad (61)$$

Видно, что $\langle P \rangle \sim f(X)$, а параметр X просто связан с разностью фаз φ ; действительно, из (46) найдем

$$X = -\text{ctg } \varphi. \quad (62)$$

Функция $f(X) = (1 + X^2)^{-1}$ называется функцией Лоренца, она является центральным элементом при математическом анализе широкого класса резонансных систем (например, характеризует распределение энергии по частотам в естественной ширине линии излучения изолированного атома). Вид этой функции показан на рис. 22. Половинной величине мощности, как это видно из рисунка, соответствуют значения $X = \pm 1$. Здесь же показаны характерные значения разности фаз и частот:

- резонанс ($\omega = \omega_0$), $\varphi = -\pi/2$, $X = 0$, $f(X) = 1$,
- — $\varphi = -\pi/4$, $\omega = \omega_1 < \omega_0$, $X = 1$, $f(X) = 1/2$, $(\omega_1^2 - \omega_0^2)/(2\gamma\omega_0) = -1$,
- $\varphi = -3/4\pi$, $\omega = \omega_2 > \omega_0$, $X = -1$, $f(X) = 1/2$, $(\omega_2^2 - \omega_0^2)/(2\gamma\omega_0) = 1$.

Нетрудно видеть из этих соотношений, что ширина линии резонанса, как и можно было ожидать, равна $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma$.

Добротность осциллятора, которую мы ввели соотношениями (35) и (51), можно теперь определить из энергетических соображений. Этот параметр можно измерять величиной запасенной энергии осциллятора при резонансе $E_{рез}$ по сравнению со средней энергией, теряемой за один период колебаний $E_{ном}$. По определению добротность представляет собой отношение этих энергий, умноженное на 2π

$$Q = 2\pi E_{рез} / E_{ном}. \quad (63)$$



Величина мгновенной запасенной энергии осциллятора $E(t)$ у нас уже встречалась (54).

Можно вычислить среднюю запасенную энергию на частоте ω внешней силы:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} M x_0^2 (\omega^2 + \omega_0^2),$$

что дает при резонансе

$$E_{рез} = 1/2 M \omega_0^2 x_{0рез}^2 \quad (64)$$

Используя (57), найдем энергию потерь за период колебаний T в точке резонанса ($\omega = \omega_0$):

$$E_{пот} = \langle P_{рез} \rangle T = \gamma M \omega_0^2 x_{0рез}^2 T. \quad (65)$$

Из (63), (64), (65) следует

$$Q = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\omega_0}{2\gamma},$$

что и было получено ранее. Осциллятор располагает большой энергией, если трение мало, и потери энергии невелики даже при очень большом размахе колебаний. Если осциллятор достаточно добротен можно накопить много энергии за счет небольшой силы.

Необходимо в заключение нашего анализа подчеркнуть, что рассмотренные нами эффекты справедливы при воздействии гармонической силы только на линейную колебательную систему, когда электрический или механический осцилляторы могут считаться линейными. Для линейной системы характерна независимость периода колебаний от их амплитуды. Известно, что при большой амплитуде колебаний осциллятор становится нелинейным и частота его собственных колебаний ω_0 зависит от их амплитуды x_0 (колебания в такой системе будут неизохронными). Для примера на рис.

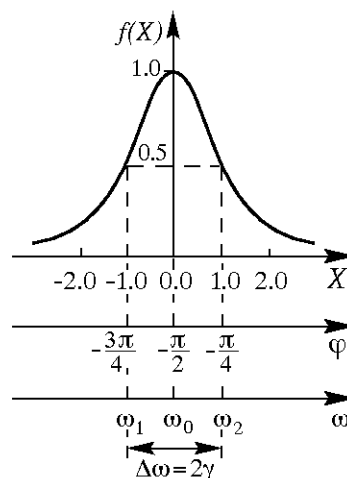


Рис. 22

23 приведена строгая зависимость частоты колебаний $\omega(\theta_0)$ для математического маятника от начального угла отклонения θ_0 ($\omega_0^2 = g/l$ — собственная частота колебаний линейного осциллятора при малых углах отклонения, l — длина нити маятника).

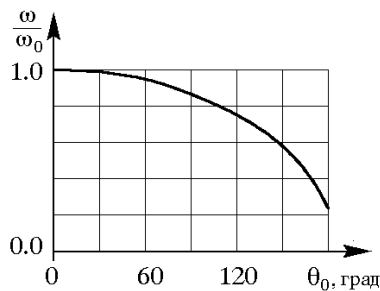


Рис. 23

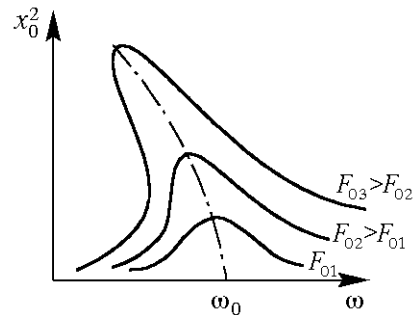


Рис. 24

Вследствие этого резонанс нелинейного осциллятора отличается тем, что в ходе его раскачки внешней силой расстройка резонанса изменяется. Чтобы избежать выхода системы из резонанса, необходимо подстраивать частоту ω внешней силы вслед за частотой осциллятора $\omega_0(x_0)$. Максимальная амплитуда, которую таким образом можно придать осциллятору, определяется, как и для линейных осцилляторов, балансом между диссипацией энергии и ее поступлением от источника внешней силы. На рис. 24 схематически показаны резонансные кривые нелинейного осциллятора в зависимости от амплитуды внешней силы F_0 .

Проведение измерений

Изучение вынужденных колебаний производится на механической колебательной системе, описанной в теме 2 — поворотный стол соединен с двумя одинаковыми пружинами нитью № 2, охватывающей верхний шкив стойки поворотного стола (рис. 1). Такая колебательная система, как отмечалось, характеризуется периодом колебаний (23).

Свойства пружин и момент инерции системы J определяют период вращательных колебаний.

Для возбуждения в схеме вынужденных колебаний стойка стола соединяется с электродвигателем пассиком, надетым на большой шкив двигателя. Блок питания измерительной системы (рис. 16) должен быть включен в режиме генератора переменного тока (тумблер 4 “=” в положении “~”). Изменение частоты гармонического сигнала генератора в пределах 0,3-12 Гц регулируется дискретно тумблером 5 на три положения “x0.3/x1/x3” и плавно ручкой 6 “Частота”. Для измерения периода задаваемого сигнала тумблер “1/ΔT/2” должен быть в



положении “1”. Обратим внимание, что при определении периода свободных вращательных колебаний механической системы этот тумблер — в положении “2”. Амплитуда вынужденных колебаний устанавливается ручкой 7 “Амплитуда”.

При возбуждении вынужденных вращательных колебаний стола с помощью электропривода электронная система позволяет измерять запаздывание по времени колебаний стола относительно колебаний генератора. Для измерения этого времени запаздывания ΔT необходимо тумблер “1/ ΔT /2” перевести в положение “ ΔT ”.

В работе исследуется зависимость амплитуды и фазы вращательных вынужденных колебаний стола от частоты колебаний генератора. Предлагается следующая методика измерений. Собирается конкретная колебательная система с определенными пружинами (свободный или нагруженный стол). Собственный период этой колебательной системы T_0 уже известен из измерений по теме 2. При желании его просто определить, если отсоединить пассик от электродвигателя (!) (при этом тумблер “1/ ΔT /2” в положении “2”). После этого схема собирается в режиме вынужденных колебаний, т.е. пассик соединен с электродвигателем. Перед включением генератора тумблер 8 “Привод-Тормоз” установить в положение “Тормоз”. Затем включается генератор возбуждающего сигнала и устанавливается необходимая частота, а точнее период вынужденных колебаний. Удобно начинать измерения вблизи резонансной частоты. Для этого подбором частоты (дискретным и плавным, как описано выше) устанавливаем на измерительном табло период генератора по возможности близкий к периоду свободных колебаний системы T_0 . Ручка “Амплитуда” в нулевом положении, тумблер “Привод-Тормоз” переводится в состояние “Привод” и регулировкой ручки “Амплитуда” плавно устанавливается амплитуда вынужденных колебаний в пределах 60-80°. При установившихся колебаниях при этом периоде измеряется сдвиг по времени ΔT между колебаниями стола и генератора (тумблер “1/ ΔT /2” в положении “ ΔT ”). При дальнейших измерениях положение ручки “Амплитуда” остается неизменным. Параметры T и ΔT измерять в режиме “одн” (тумблер “цикл-одн”). После этих измерений на выбранной частоте электропривод отключается (тумблер “Привод — Тормоз” перевести в положение “Тормоз”). Установить другую частоту генератора изменением периода вынужденных колебаний, на этой частоте измерить амплитуду и ΔT . Такие измерения проводить по обе стороны от резонансной частоты. Измерения проводятся для двух пар пружин с известными параметрами.



1. Для собранных колебательных систем (свободный стол и стол нагруженный массивным кольцом) определите период собственных колебаний T_0 (можно использовать данные темы 2).
2. Поворотный стол соедините пассиком с электроприводом. На генераторе установите частоту, соответствующую (или очень близкую) периоду T_0 . Схему переводите в режим вынужденных колебаний с амплитудой 60-80°; для заданного T в установившемся режиме определите величину ΔT .
3. Аналогичные измерения выполните по обе стороны от резонансной частоты, при переходе от точки к точке период генератора плавной регулировкой изменяется на 30-50 мс; при каждом значении T находите соответствующее значение амплитуды колебаний (в градусах) и ΔT ; измерения проведите до тех частот, где амплитуда уменьшается до 5-10°; для каждого измерения рассчитайте сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между вынужденными колебаниями и колебаниями генератора: $\Delta\varphi = 2\pi\Delta T/T$.
4. Результаты всех измерений представьте в таблице, где для каждого заданного периода колебаний генератора укажите значения частоты колебаний, запаздывания ΔT , амплитуды колебаний, сдвига фаз $\Delta\varphi$.
5. Полученные результаты для всех колебательных систем представьте в виде резонансных зависимостей: амплитуды колебаний и сдвига фаз $\Delta\varphi$ от частоты.
6. По полученным резонансным кривым определите добротности исследованных систем.
7. Определите погрешности измерений.

Контрольные вопросы

1. Проведите аналогию между механическими и электрическими осцилляторами.
2. Объясните поведение резонансных кривых для амплитуды и сдвига фаз.
3. Дайте различные физические трактовки понятия добротности осциллятора.
4. Как связаны между собой добротность и ширина резонансной кривой?
5. Какими особенностями характеризуется мощность, поглощаемая осциллятором?
6. Каковы особенности резонанса нелинейного осциллятора?

Литература

1. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971, §§ 135-142.
2. Киттель Ч. и др. Механика. М.: Наука, 1983. Гл. 7.
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: ВШ. 1986, §§ 50, 51, 52, 53.
4. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978, §§ 3.1, 3.3.
5. Фейнман Р. и др. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1965. Вып. 2, гл. 21, 23.