УДК 517.5

Методы действительного пространства Харди-Соболева для решения задач рациональной аппроксимации[1]

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)
mardvilko@mail.ru

Рассмотрены методы действительного пространства Харди–Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных приближений. Эти методы базируются на представлении функций данного пространства суммой простых функций и использовании интеграла типа Коши. Описаны некоторые достаточные условия принадлежности функций данному пространству и найдены оценки соответсвующих квазинорм.

Ключевые слова: пространства Харди, Харди–Соболева, действительное пространство Харди–Соболева; рациональная аппроксимация, четное и нечетное продолжения функции.

Methods of the real Hardy-Sobolev space for solving rational approximation problems[1]

T. S. Mardvilko (Minsk, Belarus)
mardvilko@mail.ru

Methods of the real Hardy–Sobolev space on the line for finding best rational approximations are considered. These methods are based on the representation of functions of this space as a sum of simple functions and on the use of a Cauchy-type integral. Some sufficient conditions for functions to belong to this space are described, and estimates for the corresponding quasinorms are found.

Keywords: Hardy space, Hardy–Sobolev space, real Hardy–Sobolev space, rational approximation, even and odd extensions.

Введение

Пусть I – расширенная числовая ось $\widehat{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ или отрезок $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$). Через $C(I)$ обозначим множество непрерывных функций $f : I \to \mathbb{R}$. В случае $I = \widehat{\mathbb{R}}$ предполагается существование конечного предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: f(\infty)$. Пространство $C(I)$ является банаховым относительно стандартной нормы

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$). Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество алгебраических рациональных функций с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и степени не выше n. Пусть $R_n(f)$, $f \in C(I)$ и $n \in \mathbb{N}_0$, – наилучшее равномерное приближение f посредством множества $\mathcal{R}_n$:

$$R_n(f) := R_n(f; I) := \inf \left\{ \|f - r\|_{C(I)} : r \in \mathcal{R}_n \right\}.$$

В комплексной плоскости рассмотрим верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$. Аналитическая в Π функция f принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \le \infty$, если

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Как известно, для функции $f \in H_p$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$ существуют некасательные предельные значения, которые обозначим через $f(x)$. При этом $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}$.

Через H^s, $s \in \mathbb{N}$, обозначим пространство Харди–Соболева аналитических в Π функций. Именно $f \in H^s$, если f аналитична в Π, $f^{(s)} \in H_{1/s}$, и при $s \ge 2$ существует $\lim f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ при $z \in \Pi$ и $z \to \infty$.

Введем действительное пространство Харди–Соболева $\mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{N}$. Пусть $g \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ и $u(z)$, $z \in \overline{\Pi}$, есть решение задачи Дирихле, т. е. u непрерывна в $\overline{\Pi}$, $u(x) = g(x)$ для $x \in \mathbb{R}$, $u(z)$ гармонична и ограничена в Π. Через $v(z)$ обозначим гармонически сопряженную с u функцию, которая однозначно определяется из условия $v(i) = 0$. Говорим, что $g \in \mathcal{H}^s$, если функция $f(z) := u(z) + iv(z)$ принадлежит H^s. При этом $1/s$-норма функции g вводится следующим образом:

$$\|g\|_{\mathcal{H}^s} = \|f^{(s)}\|_{H_{1/s}}.$$

Функция $f(z)$ находится с помощью интеграла типа Коши [1]:

$$f(z) = (Cg)(z) := \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} g(t) \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt, \quad z \in \Pi. \qquad (1)$$

В работе [2] изучилась методы действительного пространства Харди–Соболева $\mathcal{H}^s$ для нахождения наилучших равномерных рациональных приближений. Данная статья посвящена обзору полученных там результатов. Оценки наилучших равномерных рациональных приближений функций рассматриваемыми методами основаны на приведенных ниже достаточных условиях принадлежности функции действительному пространству Харди–Соболева (леммы 1 – 5) и прямой теореме рациональной аппроксиции для функций данного пространства из работы [3]. Отметим, что аналогичные вопросы в пространстве L_p рассматривались в работах [4,5].

Использование s-простых функций

Через $C^s(I)$, $s \in \mathbb{N}$, обозначим множество s раз непрерывно дифференцируемых функций $f : I \to \mathbb{R}$. Будем считать также, что $C^0(I) := C(I)$. Здесь I — отрезок $[a, b]$ или числовая ось $\mathbb{R}$. Через $W_p^s(I)$ ($s \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$) обозначим пространство Соболева. Функция $f \in W_p^s(I)$, если $f \in C^{s-1}(I)$, $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна на I и $f, f^{(s)} \in L_p(I)$.

Функцию $\varphi \in W_\infty^s(\mathbb{R})$ называем s-простой, если она финитна. С s-простой функцией φ будем ассоциировать опорный отрезок $J(\varphi)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset J$. Для s-простой функции φ введем характеристику

$$\mu_s(\varphi) = |J|^s \|\varphi^{(s)}\|_{L_\infty(J)},$$

где $|J|$ — длина отрезка J.

Следующая теорема 1 является следствием результата из [6] об атомическом разложении функций пространства $\operatorname{Re} H_p$, $p \le 1$.

Теорема 1. *Функция $g \in C(\widehat{\mathbb{R}})$ принадлежит $\mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{N}$, в том и только в том случае, если существует такая постоянная a и последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ s-простых функций, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{k=1}^\infty \mu_s(\varphi_k)^{1/s} =: A < \infty, \tag{2}$$

$$a + \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

При этом $\|g\|_{\mathcal{H}^s}^\# := \inf\{A^s :$ выполнены соотношения (2) и (3)$\}$ является $\frac{1}{s}$-нормой в $\mathcal{H}^s$, эквивалентной $\|g\|_{\mathcal{H}^s}$.

Через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначаем некоторые положительные величины (постоянные), зависящие от указанных в скобках параметров (если таковы имеются). Для краткости полагаем $\|f\|_X := \|f\|_{L_\infty(X)}$.

С помощью теоремы 1 в работе [2] найдены следующие достаточные условия принадлежности функций пространству $\mathcal{H}^s$ (леммы 1 – 3).

Лемма 1. *Пусть $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ и $\psi|_{[a,b]} \in W_\infty^s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi \in \mathcal{H}^s$ и*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_1(s) \sum_{l=1}^s (b-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a,b]}.$$

Лемма 2. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $-\infty < a < b \le u < y < +\infty$. *Если функция* $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a, y]$, $\psi|_{[a,b]} \in W^s_\infty$, $\psi|_{[u,y]} \in W^s_\infty$ *и* $\psi(x) = const$ *при* $x \in [b, u]$, *то* $\psi \in \mathcal{H}^s$ *и*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_2(s) \sum_{l=1}^{s} (y-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a,b]\cup[u,y]}.$$

Лемма 3. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $-\infty < a < b < y < +\infty$. *Если функция* $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a, y]$, $\psi|_{[a,b]} \in W^s_\infty$ *и* $\psi|_{[b,y]} \in W^s_\infty$, *то* $\psi \in \mathcal{H}^s$ *и имеет место неравенство*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^s} \le c_3(s) \sum_{l=1}^{s} \left\{ (b-a)^l \|\psi^{(l)}\|_{[a,b]} + (y-b)^l \|\psi^{(l)}\|_{[b,y]} \right\} +$$

$$+ c_4(s) |\psi(b)| \log_2^s \frac{y-a}{\min\{b-a, y-b\}}.$$

Леммы 1 – 3 совместно с результатом из [3] используются нами для нахождения наилучших равномерных рациональных приближений некоторых функций. Ниже приведены примеры функций, асимптотика наилучших равномерных рациональных приближений которых найдена рассматриваемыми методами (подробности см. в [2]).

Пример. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $g_{\alpha\beta}(x) = x^\alpha \sin(\pi x^{-\beta})$ при $x \in (0, 1]$ и $g_{\alpha\beta}(0) = 0$. Тогда

$$R_n(g_{\alpha\beta}; [0,1]) \asymp R_n(|g_{\alpha\beta}|; [0,1]) \asymp n^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где постоянные, скрытые символом $\asymp$, зависят лишь от α и β.

Использование интеграла типа Коши

Пусть $I = [a, b]$ – отрезок числовой оси $\mathbb{R}$, $|I| = b - a$ – длина I, $V = V(I)$ — множество функций $f : I \to \mathbb{R}$, которые имеют ограниченное полное изменение, обозначаемое через $v = v(f, I)$. В дальнейшем считаем, что если $f \in V(I)$, то функция f непрерывна справа и слева в точках a и b соответственно. Если же $x_0 \in (a, b)$ и является точкой разрыва функции f, то полагаем, что $f(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$. Через $V^s = V^s(I)$, $s \in \mathbb{N}$, обозначим подмножество функций $f \in W^s_\infty(I)$ таких, что $f^{(s)} \in V(I)$.

Доказательство следующих лемм 4 и 5 основано на применении интеграла типа Коши (1).

Лемма 4. *Пусть* $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$, $\operatorname{supp}\psi \subset I = [a,b]$, *и* $\psi|_I \in V^s$, $s \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\psi \in \mathcal{H}^{s+1}$ *и справедливы неравенства*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^2} \le c|I|v(\psi', I) \quad \textit{при } s = 1,$$

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_5(s) \sum_{l=1}^{s-1} |I|^l \|\psi^{(l)}\|_I + c_6(s)|I|^s v(\psi^{(s)}, I) \quad \textit{при } s \ge 2.$$

Лемма 5. *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и* $-\infty < a < b \le u < y < +\infty$. *Если* $\psi \in C(\widehat{\mathbb{R}})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a,y]$, $\psi|_{[a,b]} \in V^s$, $\psi|_{[u,y]} \in V^s$ *и* $\psi(x) = const$ *при* $x \in [b,u]$, *то* $\psi \in \mathcal{H}^{s+1}$ *и справедливо неравенство*

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}^{s+1}} \le c_7(s) \sum_{j=1}^{s-1} (y-a)^j \|\psi^{(j)}\|_{[a,b]\cup[u,y]} +$$

$$+ c_8(s)(y-a)^s \left(v(\psi^{(s)}, [a,b]) + v(\psi^{(s)}, [u,y]) \right).$$

Здесь сумма по j *при* $s = 1$ *заменяется нулем.*

Рациональная аппроксимация функций с логарифмической особенностью

Полученные достаточные условия принадлежности функции действительному пространству Харди–Соболева на прямой позволили нам, в частности, найти асимптотику четного и нечетного продолжений функций с логарифмическими особенностями.

Для функции $g \in C([0,1])$, $g(0) = 0$, через g^+ обозначим ее четное продолжение на $[-1,1]$: $g^+(x) = g(|x|)$, а через g^- — нечетное продолжение: $g^-(x) = g(|x|) \operatorname{sign} x$.

Рассмотрим функции

$$h_{v\beta}(x) = \left(\ln_{(v)} \frac{a}{x} \right)^{-\beta}, \quad 0 < x \le 1; \quad h_{v\beta}(0) = 0.$$

Здесь $v \in \mathbb{N}$ означает порядок итерации логарифма, т. е. $\ln_{(1)}(\cdot) = \ln(\cdot)$ и $\ln_{(v)}(\cdot) = \ln(\ln_{(v-1)}(\cdot))$ при $v \ge 2$. Число $\beta > 0$, а $a > 1$ и достаточно большое, чтобы функция $\ln_{(v)} \frac{a}{x}$ была положительная при $x \in (0,1]$. Именно, $a > 1$ при $v = 1$, $a > e$ при $v = 2$, $a > e^e$ при $v = 3$ и т. д.

При указанных выше условиях на v, β и a справедливы соотношения

$$R_n(h_{1\beta}^+; [-1,1]) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}} \quad \text{при } n \ge 1,$$

$$R_n(h^+_{v\beta};[-1,1]) \asymp \frac{1}{n(\ln_{(v-1)} n)^\beta} \quad \text{при } v \geq 2 \text{ и } n \geq n(v).$$

Что касается нечетного продолжения, то справедливы соотношения

$$R_n(h^-_{1\beta};[-1,1]) \asymp \frac{1}{n^\beta} \quad \text{при } n \geq 1,$$

$$R_n(h^-_{v\beta};[-1,1]) \asymp \frac{1}{(\ln_{(v-1)} n)^\beta} \quad \text{при } v \geq 2 \text{ и } n \geq n(v).$$

Порядковые оценки наилучших равномерных рациональных приближений функций $h_{v\beta}$ на $[0,1]$ были найдены в работах [7,8].

Отметим, что дальнейшие исследования поведения наилучших равномерных приближений четного и нечетного продолжений функций можно найти в работах [9–11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Garnett J. B.* Bounded analytic function. 1^{st} edition, revised. New York : Springer, 2007. 463 p.

[2] *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди-Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций // Журн. Белорус. гос. ун-та. Матем. Инф. 2022. № 3. С. 16–36.

[3] *Пекарский А. А.* Равномерные рациональные приближения и пространства Харди–Собовева // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 4. С. 132–140.

[4] *Мардвилко Т. С.* Применение действительного пространства Харди–Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных приближений в L_p // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 2. С. 31–42.

[5] *Мардвилко Т. С.* Дейсвительное пространство Харди-Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных L_p приближений // Сборник трудов XVII Международной Казанской школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань, 23 – 28 августа 2025 г., С. 126-127.

[6] *Coifman R. R., Weiss G.* Extension of Hardy spaces and their use in analysis // Bulletin of the American Mathematical Society. 1977. V. 83, № 4. P. 569–645.

[7] *Пекарский А. А.* Рациональные приближения выпуклых функций // Математические заметки. 1985. Т. 38, № 5. С. 679–690.

[8] *Пекарский А. А.* Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Математический сборник. 1987. Т. 133, № 1. С. 86–102.

[9] *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши // Математический сборник. 2025. Т. 216, № 2. С. 110–127.

[10] *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций // Математические заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 257–265.

[11] *Мардвилко Т. С.* Соотношения между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями функций и их четными и нечетными продолжениями // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 229. С. 47–52.