УДК 517.9

О сходимости нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышева[1]

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, И. В. Кругликов
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by, igor.v.kruglikov@gmail.com

В работе найдена асимптотика равномерных уклонений нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышева первого и второго рода от специальных функций, ассоциированных с функциями Миттаг-Леффлера. Получены также точные порядковые оценки для таких уклонений относительно равномерной нормы.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита-Паде, тригонометрические аппроксимации Эрмита-Паде, аппроксимации Паде-Чебышева, нелинейные аппроксимации Эрмита-Чебышева.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

On the convergence of nonlinear Hermite-Chebyshev approximations[1]

A. P. Starovoitov, N. V. Ryabchenko I. V. Kruglikov
(Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by, igor.v.kruglikov@gmail.com

In this paper, we find the asymptotic behavior of uniform deviations of nonlinear Hermite-Chebyshev approximations of the first and second kinds of special functions associated with Mittag-Leffler functions. We also obtain sharp order estimates for such deviations with respect to the uniform norm.

Keywords: Hermite-Padé approximants, trigonometric Hermite-Padé approximants, Padé-Chebyshev approximants, nonlinear Hermite-Chebyshev approximants.

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus.

Введение

Рассмотрим системы

$$\mathbf{Ch}^{\mathbf{1}}_{\gamma} = \mathbf{Ch}^{\mathbf{1}}_{\gamma}(\overrightarrow{\lambda}) = \{Ch^1_{\gamma}(x;\lambda_j)\}_{j=1}^{k},$$

$$\mathbf{Ch}^{\mathbf{2}}_{\gamma} = \mathbf{Ch}^{\mathbf{2}}_{\gamma}(\overrightarrow{\lambda}) = \{Ch^2_{\gamma}(x;\lambda_j)\}_{j=1}^{k},$$

состоящие из k функций, представленных рядами Фурье по многочленам Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_n(x) = \sin(n \arccos x)/\sqrt{1-x^2}$ соответственно первого и второго рода

$$Ch^1_\gamma(x;\lambda_j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} T_p(x), \tag{1}$$

$$Ch^2_\gamma(x;\lambda_j) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} U_p(x), \tag{2}$$

где параметр $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \ldots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1) \cdot \cdot \cdot (\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\overrightarrow{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – корни уравнения $\lambda^k = 1$. В дальнейшем считаем, что $n, m_1, \ldots, m_k$ — целые неотрицательные числа, $m = \sum\limits_{p=1}^{k} m_p$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, \ldots, k$.

При $k \geqslant 1$ и $n \geqslant m_j - 1, j = 1, \ldots, k$, существуют (см. [1, 2]) рациональные дроби

$$\pi_j^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma}) = \pi_j^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma}(\overrightarrow{\lambda})) = \frac{P_j^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma})}{Q_m^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma})},$$

$$\pi_j^{ch2}(x; \mathbf{Ch^2_\gamma}) = \pi_j^{ch2}(x; \mathbf{Ch^2_\gamma}(\overrightarrow{\lambda})) = \frac{P_j^{ch2}(x; \mathbf{Ch^2_\gamma})}{Q_m^{ch2}(x; \mathbf{Ch^2_\gamma})},$$

степени числителей и знаменателей которых не превышают соответственно n_j и m, и для которых

$$Ch^1_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} c_l^j T_l(x),$$

$$Ch^2_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^{ch2}(x; \mathbf{Ch^2_\gamma}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l^j U_l(x).$$

Координатные функции векторов

$$\overrightarrow{\pi}_k^{ch1}(\mathbf{Ch^1_\gamma}) = \{\pi_j^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma})\}_{j=1}^k,$$

$$\overrightarrow{\pi}_k^{ch2}(\mathbf{Ch^2_\gamma}) = \{\pi_j^{ch2}(x; \mathbf{Ch^2_\gamma})\}_{j=1}^k$$

будем называть соответственно *нелинейными аппроксимациями Эрмита–Чебышева* первого и второго рода для мультииндекса $(n, m_1, \ldots, m_k)$ и систем функций $\mathbf{Ch^1_\gamma}(\overrightarrow{\lambda})$, $\mathbf{Ch^2_\gamma}(\overrightarrow{\lambda})$. При $k = 1$ дроби $\pi_{n,m}^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma}) := \pi_1^{ch1}(x; \mathbf{Ch^1_\gamma})$ принято называть *нелинейными аппроксимациями Паде–Чебышева* (первого рода) [3].

Формулировка основных результатов

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $k=1$, то при $x\in[-1,1]$, $n=m$ и $n\to+\infty$*

$$Ch_\gamma^1(x;1)-\pi_{n,n}^{ch1}(x;\mathbf{Ch}_\gamma^{\mathbf{1}})=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\,\frac{1}{(\gamma)_{2n}}\cdot$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i(2n+1)\arccos x}\;e^{x+i\sqrt{1-x^2}}\;\,(1+O(1/n))\right\},$$

$$\sqrt{1-x^2}\left\{Ch_\gamma^2(x;1)-\pi_{n,n}^{ch2}(x;\mathbf{Ch}_\gamma^{\mathbf{2}})\right\}=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\,\frac{1}{(\gamma)_{2n}}\cdot$$

$$\operatorname{Re}\left\{ie^{i(2n+1)\arccos x}\;e^{x+i\sqrt{1-x^2}}\;\,(1+O(1/n))\right\}.$$

Теорема 2. *Если $k\geqslant 2$, то при $x\in[-1,1]$, $n=m_1=\ldots=m_k$, $n\to+\infty$ и $j=1,\ldots,k$*

$$Ch_\gamma^1(x;\lambda_j)-\pi_j^{ch1}(x;\mathbf{Ch}_\gamma^{\mathbf{1}})=(-1)^n\;x_k^{\gamma-1}\;\frac{B_k(n)}{(\gamma)_{kn+n}}\cdot$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i(kn+n+1)\arccos x}\;\lambda_j^{n+1}\;e^{\lambda_j(1-x_k)\,\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)}\left(1+O\left(1/n\right)\right)\right\}.$$

$$\sqrt{1-x^2}\left\{Ch_\gamma^2(x;\lambda_j)-\pi_j^{ch2}(x;\mathbf{Ch}_\gamma^{\mathbf{2}})\right\}=(-1)^{n+1}\;x_k^{\gamma-1}\;\frac{B_k(n)}{(\gamma)_{kn+n}}\cdot$$

$$\operatorname{Re}\left\{ie^{i(kn+n+1)\arccos x}\;\lambda_j^{n+1}\;e^{\lambda_j(1-x_k)\,\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)}\left(1+O\left(1/n\right)\right)\right\},$$

где i — мнимая единица,

$$x_k=\sqrt[k]{\frac{1}{k+1}},\quad B_k(n)=\sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}}\left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n,$$

а $O(1/n)$ является бесконечно малой при $n\to+\infty$, модуль которой не превышает L/n, где L — положительная постоянная.

Следствие 1. *Если $k=1$, $n=m$, то при $n\to\infty$*

$$\left\|Ch_\gamma^1(x;1)-\pi_{n,n}^{ch1}(x;\mathbf{Ch}_\gamma^{\mathbf{1}})\right\|\asymp\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\,\frac{1}{|(\gamma)_{2n}|},\tag{3}$$

$$\left\|\sqrt{1-x^2}\left\{Ch_\gamma^2(x;1)-\pi_{n,n}^{ch2}(x;\mathbf{Ch}_\gamma^{\mathbf{2}})\right\}\right\|\asymp\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\,\frac{1}{|(\gamma)_{2n}|}.$$

Здесь и далее $\|f(x)\|=\max\{|f(x)|: x\in[-1,1]\}$, обозначение $\alpha_n\asymp\beta_n$ означает, что бесконечно малые α_n и β_n имеют одинаковый порядок при

$n \to \infty$, а обозначение $\alpha_n \sim \beta_n$ означает, что бесконечно малые α_n, β_n эквивалентны, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n/\beta_n = 1$.

При выполнении условий следствия 1 в [4, 5] установлено, что

$$\left\|Ch^1_\gamma(x;1) - \pi^{ch1}_{n,n}(x;\mathbf{Ch^1_\gamma})\right\| \asymp \frac{n!\cdot|(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{2n}\cdot(\gamma)_{2n+1}|}\,. \tag{4}$$

Так как $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$, то с учетом равенства $(\gamma)_p = \Gamma(p+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, с помощью Стирлинга нетрудно показать, что при $n \to +\infty$

$$\frac{n!\cdot\gamma_n}{(\gamma)_{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\frac{1}{2^{2n+\gamma}}.$$

Это означает, что равенства (3) и (4) полностью согласуются.

Следствие 2. *Если $k \geqslant 2$ и $n = m_1 = \ldots = m_k$, то при $j = 1,\ldots,k$ и $n \to \infty$*

$$\left\|Ch^1_\gamma(x;\lambda_j) - \pi^{ch1}_{n,m}(x;\mathbf{Ch^1_\gamma})\right\| \asymp x_k^{\gamma-1}\;\frac{B_k(n)}{|(\gamma)_{kn+n}|}\;e^{1-x_k},$$

$$\left\|\sqrt{1-x^2}\left\{Ch^2_\gamma(x;\lambda_j) - \pi^{ch2}_{n,m}(x;\mathbf{Ch^2_\gamma})\right\}\right\| \asymp x_k^{\gamma-1}\;\frac{B_k(n)}{|(\gamma)_{kn+n}|}\;e^{1-x_k},$$

Сравнивая полученные результаты, можно сделать вывод о том, что в нашем случае при приближении на отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$ аппроксимациями Эрмита-Паде первого рода с точки зрении скорости приближения не имеют существенных преимуществ перед аппроксимациями второго рода. При приближении к концам отрезка $x = \pm 1$ аппроксимациями Эрмита-Паде второго рода существенно уступают аппроксимациям первого рода в скорости аппроксимации. Это явление имеет место (см., например, [6, гл. 3, § 6]) и при приближении частными суммами рядов (1) и (2) и обусловлено тем, что весовая функций $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ для ортогональных многочленов $U_n(x)$ в точках $x = \pm 1$ имеет особенности. По этой причине в этих точках многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ возрастают неограничено. Нетрудно заметить, что при $k = 1$ и $m = 0$ аппроксимации Паде-Чебышева первого и второго рода для функций $Ch^1_\gamma(x;1)$, $Ch^2_\gamma(x;1)$ являются соответственно n-ми частными суммами рядов (1) и (2).

Доказательство теорем 1 и 2

Рассмотрим систему $\mathbf{F} = (f_1,\ldots,f_k)$ степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p,$$

ассоциированную с системами $\mathbf{Ch^1_\gamma}$ и $\mathbf{Ch^2_\gamma}$.

Рациональные функции вида

$$\pi_j(z;\mathbf{F}) = \frac{P_j(z;\mathbf{F})}{Q_m(z;\mathbf{F})},\ \ j=1,\ldots,k\,,$$

где алгебраические многочлены $Q_m(z;\mathbf{F})$, $P_j(z;\mathbf{F})$ имеют степени соответственно не выше m и n_j, будем называть *аппроксимациями Эрмита-Якоби* для мультииндекса $(n, m_1, ..., m_k)$ и системы $\mathbf{F}$, если

$$f_j(z) - \frac{P_j(z;\mathbf{F})}{Q_m(z;\mathbf{F})} = O(z^{n+m+1}).$$

В случае произвольной системы степенных рядов, аппроксимации Эрмита-Якоби могут не существовать. Для определенной выше системы $\mathbf{F}$ выполняются следующие условия (см. [1, 2, 7]):

1) существуют аппроксимации Эрмита-Якоби $\{\pi_j(z;\mathbf{F})\}_{j=1}^k$;

2) каждый степенной ряд f_j имеет радиус сходимости $R_j > 1$;

3) дроби $\pi_j(z;\mathbf{F})$ при $n \geqslant n_0$ не имеют полюсов в $\overline{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$.

Выполнение условий 1)–3) влечет за собой (см. [2]) справедливость следующей теоремы 3, опираясь на которую и учитывая результаты работы [8], мы доказываем теоремы 1, 2.

Теорема 3. Пусть $n \geqslant \max\{m_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $m \neq 0$. Тогда при $k \geqslant 1$ существуют нелинейные аппроксимации Эрмита-Чебышева первого $\{\pi_j^{ch1}(x;\mathbf{Ch^1_\gamma})\}_{j=1}^k$ и второго рода $\{\pi_j^{ch2}(x;\mathbf{Ch^2_\gamma})\}_{j=1}^k$ и для их знаменателей и числителей справедливы представления:

$$Q_m^{ch1}(x;\mathbf{Ch^1_\gamma}) = Q_m(e^{i\arccos x};\mathbf{F})\cdot\overline{Q_m(e^{i\arccos x};\mathbf{F})},$$

$$P_j^{ch1}(x;\mathbf{Ch^1_\gamma}) = \mathrm{Re}\left\{P_j(e^{i\arccos x};\mathbf{F})\cdot\overline{Q_m(e^{i\arccos x};\mathbf{F})}\right\},$$

$$Q_m^{ch2}(x;\mathbf{Ch^2_\gamma}) = Q_m(e^{i\arccos x};\mathbf{F})\cdot\overline{Q_m(e^{i\arccos x};\mathbf{F})},$$

$$P_j^{ch2}(x;\mathbf{Ch^2_\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{Im}\left\{P_j(e^{i\arccos x};\mathbf{F})\cdot\overline{Q_m(e^{i\arccos x};\mathbf{F})}\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Старовойтов А. П., Кечко Е. П., Оснач Т. М.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышева // Журнал Белорусского государственного университета. Матем. Информ. 2023. № 2. С. 6–17.

[2] *Старовойтов А. П., Кругликов И. В.* Существование и явный вид нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышева // Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Т. 33, № 1. С. 75–86.

[3] *Суетин С. П.* О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышева для аналитических функций // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 290–303.

[4] *Старовойтов А. П., Старовойтова Н. А., Рябченко Н. В.* Аппроксимации Паде специальных функций // Український математичний вісник. 2012. Т. 9, № 2. С. 246–258.

[5] *Рябченко Н. В.* Тригонометрические аппроксимации Паде специальных функций // ПФМТ. 2021. № 2(47). С. 81–83.

[6] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1976. 328 с.

[7] *Аптекарев А. И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1, c; \lambda_i\, z)\}_{i=1}^{k}$ // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 1981. № 2. С. 58–62.

[8] *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. 2018. Т. 301. С. 241–258.