УДК 517.96:517.984

О классическом решении смешанной задачи для волнового уравнения[1]

А. П. Хромов (Саратов, Россия)

KhromovAP@sgu.ru

Показывается, что в смешанной задаче для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и условиями закрепления на концах нахождение формулы для классического решения и проверка, что она действительно дает решение, проводятся по одной схеме.

Ключевые слова: волновое уравнение, смешанная задача, классическое решение.

On classical solution of the mixed problem for wave equation[1]

A. P. Khromov (Saratov, Russia)

KhromovAP@sgu.ru

It is shown that in the mixed problem for a homogeneous wave equation with zero initial velocity and fixed ends conditions, finding a formula of the classical solution and verifying that it really gives a solution may be carried out in the same way according to the same scheme.

Keywords: wave equation, mixed problem,classical solution.

Рассмотим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0.$$

Считаем, что $q(x)$, $\varphi(x)$ — комплекснозначные, $q(x) \in L[0,1]$.

В работе [1] в лемме 5 в качестве функций $J_{11}(x,t)$ и $J_{21}(x,t)$ возьмем функции

$$J_{11}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)\,d\xi,$$

$$J_{21}(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)\,d\xi.$$

Тогда приходим к следующим результатам.

Теорема 1. *При фиксированном* x *функция* $\int\limits_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)\,d\xi$ *абсолютно непрерывна по* $t \in [0,\infty)$ *и почти всюду по* t *справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)\,d\xi = q(x+t)A(x+t,0) + \int\limits_x^{x+t} q(\xi)A'_t(\xi, x+t-\xi)\,d\xi.$$

Теорема 2. *При фиксированном* t *функция* $\int\limits_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)\,d\xi$ *абсолютно непрерывна по* $x \in (-\infty,\infty)$ *и почти всюду по* x *справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)\,d\xi =$$

$$= q(x+t)A(x+t,0) - q(x)A(x,t) + \int\limits_x^{x+t} q(\xi)A'_t(\xi, x+t-\xi)\,d\xi.$$

Доказательства повторяют доказательства лемм 5 и 6 из [1] при замене $a_0(x,t)$ на $A(x,t)$.

Аналогично получаем следующие теоремы.

Теорема 3. *При фиксированном* x *функция* $\int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)\,d\xi$ *абсолютно непрерывна по* $t \in [0,\infty)$ *и почти всюду по* t *справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)\,d\xi = q(x-t)A(x-t,0) + \int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A'_t(\xi, \xi-x+t)\,d\xi.$$

Теорема 4. *При фиксированном* t *функция* $\int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)\,d\xi$ *абсолютно непрерывна по* $x \in (-\infty,\infty)$ *и почти всюду по* x *выполняется равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)\,d\xi =$$

$$= q(x)A(x,t) - q(x-t)A(x-t,0) - \int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)A'_t(\xi,\xi-x+t)\,d\xi.$$

Учитывая, что функции, фигурирующие в теоремах 1 и 2, есть $B_1(x,t)$, а в теоремах 3 и 4 — $B_2(x,t)$, получаем, что текст из [1, с. 730] сохраняется. Тем самым сохраняется теорема 6 из [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731.DOI: 10.1134/S0374064119050121. EDN: ZFWIBF.