

## Экстремальные задачи на классах голоморфных отображений круга в себя<sup>1</sup>

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия),

А. П. Солодов (Москва, Россия)

kudryavceva\_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Найдены точные области однолиственности и обратимости на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и условием на угловую производную в граничной неподвижной точке.

*Ключевые слова:* голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, экстремальные задачи.

*Благодарности:* работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

## Extremal problems on classes of holomorphic self-maps of a disc<sup>1</sup>

O. S. Kudryavtseva (Volgograd, Russia),

A. P. Solodov (Moscow, Russia)

kudryavceva\_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Sharp domains of univalence and invertibility on classes of holomorphic self-maps of the unit disc with an interior and a boundary fixed points, with a restriction on the value of the angular derivative at the boundary fixed point are found.

*Keywords:* holomorphic map, fixed points, angular derivative, extremal problems.

*Acknowledgements:* this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

В работе изучаются задачи поиска областей однолиственности и обратимости на классах голоморфных отображений круга в себя.

Рассматривая класс ограниченных фиксированной постоянной голоморфных отображений  $f$  единичного круга с центром в нуле с внутренней неподвижной точкой  $z = 0$  и таких, что  $f'(0) = 1$ , Ландау [1] установил существование единого круга однолиственности на этом классе и точно вычислил его радиус. Кроме того, он обнаружил существование круга, в котором все функции из указанного класса обратимы, точно вычислив и его радиус.

Горяйнов [2], изучая влияние угловой производной на поведение функции внутри круга, выделил область однолиственности на классе голоморфных функций  $f$ , отображающих единичный круг с центром в нуле в

---

<sup>1</sup>Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

<sup>1</sup>This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

себя, со свойствами  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $f'(1) \leq \alpha$ . Вопрос о нахождении наилучшаемых областей однолистности оставался открытым.

В настоящей работе решены задачи поиска точных областей однолистности и обратимости на классах голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и ограничением на значение угловой производной в граничной неподвижной точке.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha \in (1, 4]$ . Если  $f$  — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $f'(1) \leq \alpha$  (в смысле углового предела), тогда  $f$  однолистка в области

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}: |z| < 1 \text{ и } \frac{|1 - 2z + |z|^2|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область  $\mathcal{U}$ , содержащаяся в единичном круге с центром в нуле,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U} \neq \mathcal{D}$ , найдется голоморфная функция  $f$ , отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $f'(1) \leq \alpha$ , не однолистная в области  $\mathcal{U}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha \in (1, 2)$ . Если  $f$  — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $f'(1) \leq \alpha$  (в смысле углового предела), тогда существует функция, обратная к  $f$  и конформно отображающая область

$$\mathcal{Y} = \left\{ w \in \mathbb{C}: |w| < 1 \text{ и } \frac{|1 - w|}{1 - |w|} < \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha - 1}} \right\}$$

на некоторую область  $\mathcal{X}$ , содержащуюся в единичном круге с центром в нуле.

Какова бы ни была область  $\mathcal{V}$ , содержащаяся в единичном круге с центром в нуле,  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V} \neq \mathcal{Y}$ , найдется голоморфная функция  $f$ , отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $f'(1) \leq \alpha$ , не имеющая обратной в области  $\mathcal{V}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Landau E. Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. Vol. 32. P. 467–474.
- [2] Горяйнов В. В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.