УДК 517.96;517.984

Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения[1]

А. П. Хромов (Саратов, Россия)

KhromovAP@sgu.ru

Используя операцию интегрирования расходящегося ряда, приводятся результаты по смешанной задаче для волновго уравнения, не требующие привлечения классических решений.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача.

Divergent series and generalized mixed problem for wave equation[1]

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

KhromovAP@sgu.ru

By integrating divergent series the results, concerning mixed problem for wave equation, are obtained without use of classic solution.

Keywords: divergent series, wave equation, mixed problem.

1. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \tag{4}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Определение. *Классическим решением смешанной задачи* (1)–(3) называется функция $u(x,t)$, непрерывная вместе с производными $u'_x(x,t)$, $u'_t(x,t)$, причем, в свою очередь, $u'_x(x,t)$ $(u'_t(x,t))$ абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющая условиям (2), (3) и почти всюду по x и t уравнению (1).

Отсюда следует, что для классического решения необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Относительно классического решения справедлива

Теорема 1 [1]. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(3) *с условием, что $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ класса Q, то оно единственно и находится по формуле* (4), *в которой ряд справа при любом фиксированном $t > 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$.*

Здесь и в дальнейшем считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Таким образом, у нас задача (1)–(3) и ряд (4) тесно связаны.

Расширим понятие этой связи. Ряд (4) имеет смысл для любой $\varphi(x) \in \in L[0,1]$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально. Эту задачу (1)–(3) и будем называть *обобщенной смешанной задачей.* Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти «сумму» расходящегося ряда (4) («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда [2, 3]). Помимо аксиом о расходящихся рядах из [3, с. 19], будем пользоваться еще следующим правилом интегрированния расходящегося ряда:

$$\int \sum \stackrel{df}{=} \sum \int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

Итак, рассмотрим ряд (4). Имеем

$$u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \tag{6}$$

где $\Sigma_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t)$. Отсюда следует, что для нахождения «суммы» ряда (4) надо найти «сумму» тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$, т. е. ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x, \tag{7}$$

Пусть «сумма» ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in \in L[0,1]$. Тогда в соответствие с правилом (5) имеем

$$\int_0^x g(\eta)\, d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int_0^x \sin n\pi\eta\, d\eta. \tag{8}$$

По теореме 3 ([4, с. 320]) ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$ и его сумма есть $\int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$, т. е.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\int\limits_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, получили, что $\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$. Отсюда $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т. е. нашли «сумму» $g(x)$ расходящегося ряда (7). Далее, $\sin n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Тогда получаем, что «сумма» ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ есть $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось. В силу (6) получаем, что «сумма» $u(x,t)$ ряда (4) есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]. \tag{9}$$

Таким образом, получена

Теорема 2. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция $u(x,t)$ класса Q, определенная по формуле* (9).

2. Рассмотрим следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q.

Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Так как $\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau) = \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\,d\eta$, то (13) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\,d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\,d\eta. \tag{14}$$

Из (14) в силу правила (5) получаем

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta \, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta \tag{15}$$

поскольку ряд в (15), как это следует из п. 1, имеет «сумму» $\frac{1}{2}\tilde{f}(\eta,\tau)$, где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение по η на всю ось функции $f(\eta,\tau)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Решение $u(x,t)$ обобщенной смешанной задачи* (10)–(12) *есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{16}$$

Отметим, что без привлечения операции интегрирования расходящегося ряда формула (16) приводится в [5].

То, что $u(x,t)$ есть функция класса Q, дается следующей леммой.

Лемма. *Имеет место оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L[Q_T]} \le T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

3. Рассмотрим такую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0. \tag{19}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция класса Q и $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение по методу Фурье [1] есть

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ есть ряд (4), $u_1(x,t)$ есть ряд (13). Поэтому, исходя из п.п. 1, 2 получаем

Теорема 4. *Обобщенная смешанная задача* (17)–(19) *имеет решение класса* Q, *определяемое по формуле:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \qquad (20)$$

4. Наконец, рассмотрим как приложение к пп. 1–3 следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \qquad (21)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (22)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \qquad (23)$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)u(x,t)$ класса Q.

Тогда из результатов п. 3 получаем, что нахождение решения задачи (21)–(23) в класссе Q сводится к нахождению в классе Q решения интегрального уравнения

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)u(\eta,\tau)}\, d\eta, \qquad (24)$$

где $\widetilde{q(\eta)u(\eta,\tau)}$ есть нечетное, 2-периодическое по η продолжение функции $q(\eta)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Для случая классических решений переход к уравнению (24) использовался ранее в [6].

Интегральное уравнение (24) имеет единственное решение в классе Q, получаемое по методу последовательных подстановок. Теперь привлечение операции интегрирования расходящегося ряда приводит к изменению методики исследования расходящихся рядов, содержащейся в [7–10]: для обоснования правильности получаемых результатов уже не требуется привлечения классических решений.

5. Важность введения операции интегрирования расходящегося ряда подчеркивается следующим рассуждением. Если сохранить п. 1, удалить из п. 2 предложение после формулы (16), и из п. 4 — третье и последнее предложения, то получаем цельный текст без ссылок на какие-либо источники, кроме [1–4].

6. Хорошо известные факты можно объяснить с точки зрения расходящихся рядов. Так, если рассматривать малые значения спектрального параметра λ в уравнении Фредгольма второго рода, то решение этого

уравнения представляется сходящимся рядом последовательных подстановок, и выдающийся результат Фредгольма о решении уравнения второго рода при произвольных λ представляет собой явную «сумму» расходящегося ряда по отношению к упомянутому сходящемуся ряду последовательных подстановок.

Другой пример — полное аналитическое продолжение ряда Тейлора аналитической в окрестности фиксированной точки функции вне круга сходимости есть «сумма» расходящегося ряда по отношению к упомянутому ряду Тейлора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: 10.1134/S0374064119050121

[2] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[3] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

[4] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной пееменной. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1957. 552 с.

[5] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 41–44.

[6] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волновго уравнения // Понтрягинские чтения – XXIX : материалы конференции, посвященной 90-летию академика В. А. Ильина (2–6 мая 2018. М. : ООО «Макс Пресс». С. 132–133.

[7] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международ. Сарат. зим. шк. (Саратов, 28 янв.–1 февр. 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 433–439.

[8] *Ломов И. С.* Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международ. Сарат. зим. шк. (Саратов, 28 янв.–1 февр. 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 231–236.

[9] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280-288. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

[10] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.