УДК 517.51

Разрывный оператор Стеклова и полиномиальные сплайны [1]

Г. В. Хромова (Саратов, Россия)

Khromovagv@sgu.ru

Показано, что сглаживание ломаной, построенной на заданных значениях непрерывной функции с помощью разрывного оператора Стеклова даёт метод построения полиномиальных сплайнов.

Ключевые слова: оператор Стеклова, ломаная, непрерывная функция, одномерная сетка .

Discontinuous Steklov operator and polynomial splines[1]

G. V. Khromova (Saratov, Russia)

Khromovagv@sgu.ru

It is shown that smoothing a polyline constructed on the given values of a continuous function using a discontinuous Steklov operator gives a method for constructing polynomial splines.

Keywords: Steklov operator, polyline, continuous function, one-dimensional grid.

1. Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором её значений:

$$\widehat{f} = f(x_i)_0^n, f_i = f(x_i), x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}.$$

Построим параболический сплайн, дающий равномерные приближения к $f(x)$ на $[0,1]$. Применим следующий метод: построим ломаную $L_n\widehat{f}$: $(L_n\widehat{f})(x_i) = f_i,\ i = 0,\dots,n,$ а затем сгладим с помощью разрывного оператора Стеклова [1]:

$$S_\alpha L_n\widehat{f} = \begin{cases} S_{\alpha 2} L_n\widehat{f}, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha 1} L_n\widehat{f}, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{1}$$

где

$$S_{\alpha 1}\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} \varphi(t)dt, S_{\alpha 2}\ \varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} \varphi(t)dt.$$

(Запись (1) означает: как именно определено значение $(S_\alpha L_n\widehat{f})(\frac{1}{2})$ - несущественно).

Считаем, что точка разрыва $x = \frac{1}{2}$ есть $m-$ый узел x_m и полагаем $\alpha = \frac{1}{n}$.

Теорема 1. *Функция* $(S_\alpha L_n \widehat{f})(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{n}$ *представляет собой параболический сплайн, разрывный в точке* $x = \frac{1}{2}$ *и вычисляемый по формуле*

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x) = A_i x^2 + B_i x + C_i$$

$$A_i = \frac{n^2}{2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \tag{2}$$

$$B_i = n^2[-f_{i+2}x_i + f_{i+1}(x_i + x_{i+1}) - f_i x_{i+1}]$$

$$C_i = \frac{n^2}{2}(f_{i+2}x_i^2 + f_i x_{i+1}^2) + (\frac{1}{2} - n^2 x_i x_{i+1}) f_{i+1},$$

если $x \in [x_i, x_{i+1}] \subset [0, \frac{1}{2}]$ $(i = 0, \ldots, m-1)$.

Если же $x \in [x_{i-1}, x_i] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ $(i = m+1, \ldots, n)$, *то* A_i, B_i, C_i *имеют вид (2) с заменой* f_{i+2} *на* f_{i-2}, f_{i+1} *на* f_{i-1}, x_{i+1} *на* x_{i-1}.

При этом

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}), x_i \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}), x_i \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Другой вид коэффициентов сплайна приведён в [2].

Теорема 2 (следствие из теоремы 1 в [2]).

Для любой $f(x) \in C[0,1]$ *и* $\alpha = \frac{1}{n}$ *выполняется сходимость*

$$\left\| S_\alpha L_n \widehat{f} - f \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

где

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \right\}.$$

Параболический сплайн из теоремы 1 отличается от сплайнов из [3] тем, что он не является интерполирующим, вычисляется по готовым формулам и даёт равномерную сходимость к любой непрерывной функции, не требуя краевых условий и ограничений на сетку.

Если вместо оператора S_α в (1) мы рассмотрим оператор S_α^m, который получается заменой в правой части (1) операторов $S_{\alpha i}, i = 1, 2$, на их $m-$ые степени $S_{\alpha i}^m$, то получим полиномиальный сплайн степени $m + 1$, аналогичный параболическому и для него справедлива теорема 2 с заменой S_α на S_α^m.

2. Пусть вместо $\widehat{f}$ нам известен набор $\widehat{f}_\delta$: $\left\| \widehat{f}_\delta - \widehat{f} \right\|_{E_{n+1}} \leq \delta$, где $E_{n+1}-$ евклидово пространство с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \left(\sum_{0}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

либо с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \max_i |f_i|$$

Теорема 3. *Для сплайна $S_\alpha L_n \widehat{f}_\delta$ при $\alpha = \frac{1}{n}$ справедлива оценка:*

$$\left\|S_\alpha L_n \widehat{f}_\delta - f(x)\right\|_{L_\infty} \leq \delta + 2\omega(\frac{1}{n}),$$

где $\omega(\frac{1}{n})$−модуль непрерывности функции $f(x)$ на $[0,1]$.

Следствие. Для любой $f(x) \in C[0,1]$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ выполняется сходимость

$$\left\|S_\alpha L_n \widehat{f}_\delta - f(x)\right\|_{L_\infty} \to 0 \ \text{ при } \delta \to 0, n \to \infty. \tag{3}$$

Если в E_{n+1} выбрана метрика иная, чем указанные выше, и такая, что сходимость (3) не выполняется, то мы попадаем в зону действия некорректно поставленных задач. Тогда, применяя технику методов регуляризации ([1]) добиваемся этой сходимости за счет согласования n с δ.

3. Пусть $f(x) \in C^m[0,1],\ m \geq 1$. Для аппроксимации $f^{(m)}(x)$ используем полиномиальный сплайн: рассмотрим оператор $D^m S_\alpha^m L_n$, где D^m− оператор m−кратного дифференцирования.

Из [4] известно, что для любой $\varphi(x) \in C[0,1]$

$$D^m S_\alpha^m \varphi = \begin{cases} \Delta_{\alpha 2}^m \varphi, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \Delta_{\alpha 1}^m \varphi, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$\Delta_{\alpha 1}^m \varphi = \frac{1}{\alpha^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \varphi(x - k\alpha),$$

$$\Delta_{\alpha 2}^m \varphi = \frac{1}{\alpha^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \varphi(x + (m-k)\alpha)$$

(левосторонняя и правосторонняя разностные формулы).

Из того, что $(L\widehat{f})(x_i) = f_i$ и сходимости

$$\left\|D^m S_\alpha^m f - f^{(m)}(x)\right\|_{L_\infty} \to 0 \ \text{ при } \ \alpha \to 0$$

следует

Теорема 4. *При* $\alpha = \frac{1}{n}$ *для* $f(x) \in C^m[0,1]$ *выполняется сходимость*

$$|D^m S_\alpha^m L_n \widehat{f} - f^{(m)}(x)|_{x=x_i} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \ i = 0, \ldots, n.$$

Замечание. Может оказаться, что в формулах (2) $A_i = 0$. Это будет случай, когда у ломаной $L_n\widehat{f}$ в точке x_{i+1} не будет излома. Такой сплайн можно назвать параболическим с вырождением.

Вырождение можно устранить: значение f_{i+1} заменить на близкое $f_{i+1} + \delta$. Это не повлияет на аппроксимативные свойства сплайна по теореме 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромова Г. В.* Об операторах с разрывной областью значений и их применении // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и её приложения, Тематические обзоры. Москва : ВИНИТИ РАН, 2021. Т. 200, ч. 2, С. 57–64.

[2] *Хромова Г. В.* Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. XVI Междунар. Казанская школа-конф. "Теория функций, её приложения и смежные вопросы "Сб. трудов (Казань, 22-27 авг. 2023). Казань : Изд. Казанского федерального ун-та, 2023. Т. 66. С. 279–281.

[3] *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. Москва : Наука, 1976. 248 с.

[4] *Хромова Г. В.* Об аппроксимации производных на отрезке // Математика. Механика. Сб. научных трудов. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. вып. 16. С. 84–86.