Также следует отметить, что рассматриваемый метод восстановления N базируется на тех же идеях, что и метод Прони: в его основе лежат стандартные свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема. *Пусть Δ — произвольное ненулевое действительное число, $f_k(x) = f(x - k\Delta)$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$. Тогда (i) при $K = N - 1$ (и, следовательно, при всех $K < N$) система функций $\{f_k\}_{k=0}^{K}$ линейно независима на $\mathbb{R}$ (и, более того, линейно независима на равномерных сетках, состоящих по крайней мере из N точек); (ii) при $K = N$ (и, следовательно, при всех $K \geqslant N$) система функций $\{f_k\}_{k=0}^{K}$ линейно зависима на $\mathbb{R}$ (а, значит, и на любом подмножестве $\mathbb{R}$).*

Теорема может быть перенесена и на случай комплексных α_n, β_n, однако это требует добавления некоторых условий; без дополнительных условий утверждение теоремы в этом случае неверно.

Полученный результат применим, в частности, при исследовании сложных биологических растворов для определения числа присутствующих в растворе ферментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prony G. R. B.* Essai experimental et analysique ... // J. de L'Ecole Polytechnique. 1795. Vol. 1(2). P. 24–76.

2. *Beylkin G., Monzon L.* On approximation of functions by exponential sums // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2005. Vol. 19. P. 17–48.

Ю. А. Гладышев (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА С ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦАХ ПРОМЕЖУТКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ранее было доказано [1] существование и определен процесс нахождения обобщенных степеней Берса $X^{(2p+1)}(x; x_1, x_2)$ с нулевыми значениями на краях промежутка при целом $p > 0$.

Для решения ряда краевых задач и дальнейших обобщений необходимо построить последовательность степеней

$$X^{(2p+1)}(x; x_1, x_2; g_0^{(1)}, \ldots, g_\rho^{(1)}, g_0^{(2)}, \ldots, g_\rho^{(2)}),$$

которые обладают свойствами

$$D_2 D_1 X^{(2p+1)}(x; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) = (2p+1)2pX^{(2p-1)}(x; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) \quad (1)$$

относительно дифференцирования по Берсу

$$D_1 = a_1(x)\frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2(x)\frac{d}{dx}$$

и принимают заданные граничные значения

$$X^{(2p+1)}(x_1; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) = g_p^{(1)}, \tag{2}$$

$$X^{(2p+1)}(x_2; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) = g_p^{(2)}, \quad g_0^{(1)} = g_0^{(2)} \neq 0. \tag{3}$$

Случай одновременного обращения $g_0^{(1)}, g_0^{(2)}$ в ноль исключен. Здесь через $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ в символ степени обозначены наборы ρ заданных постоянных значений степени справа в точке x_1 и слева x_2.

Предварительно рассмотрена задача, когда все постоянные $g_\rho^{(1)} = 0$ исчезают:

$$X^{(2p+1)}(x_1; x_1, x_2) = 0,$$
$$X^{(2p+1)}(x_2; x_1, x_2) = g_p^{(2)} = g_\rho, \quad g_0 \neq 0.$$

Общее выражение для условий (2), (3) находится путем сложения двух последовательностей при замене $x_1 \to x_2$. Для нахождения степеней использован метод производящей функции вида

$$f(x, x_1, x_2, g_0, \ldots, g_\rho) = \left(\sum \frac{k^{(2i)} g_{(2i+1)}}{(2i+1)!}\right) \frac{\operatorname{sh} kX(x, x_1)}{\operatorname{sh} kX(x_2, x_1)}.$$

Разлагая функцию $\dfrac{\operatorname{sh} kX(x, x_1)}{\operatorname{sh} kX(x_2, x_1)}$ в ряд по k и производя перемножение рядов получим ряд, члены которого есть искомые степени. Показано, что искомые степени представленной линейной комбинацией степеней с двумя нуль-точками.

$$X^{(2p+1)}(x_2; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) =$$

$$= (2p+1)! \sum_{i=0}^{\rho} \frac{g_{2\rho-2i+1}^{(i)}}{(2\rho-2i+1)!(2i+1)!} X^{(2\rho-2i+1)}(x; x_1, x_2). \tag{4}$$

Можно непосредственным дифференцированием проверить выполнение условий (1) и подстановкой $x = x_1$, $x = x_2$ условий (2), (3).

Аналогичным образом в силу равноценности точек x_1, x_2 строятся степени, принимающие значения $g_{(2\rho+1)}^{(i)}$ слева в точке x_1. Полное решение получим как сумму этих двух выражений.

Тем самым показано, что последовательность степеней Берса с условиями (1)–(3) существует и единственна.

Последовательность (4) позволяет дать решение ряда краевых задач. Например, построить ось при разрывных функций $a_1(x)$, $a_2(x)$. Далее она позволяет построить обобщенные степени на графе принимает нулевые значения на открытых вершинах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения. Калуга, 2011. 201 с.

Ю. А. Гладышев, Ю. В. Афанасенкова (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Для решения второй краевой задачи для системы уравнений на графе использовано представление решения в форме Берса. Имеется в виду приложения к задачам переноса в системе стержней (труб) при линейных законах переноса в стержне и обмена с внешним пространством. Пусть граф имеет N вершин, среди которых L открытых и S закрытых. На открытых вершинах заданы значения первых производных по Берсу решения $u^{(i)}$

$$Du^{(i)} = J_i, \quad i = 1, 2, \ldots, L. \tag{1}$$

На закрытых вершинах приняты обычные условия непрерывности решения и суммарной непрерывности производной. Эти условия, учитывающие закон сохранения переносимой величины находятся в полном соответствии с основной системой уравнений переноса

$$D_1^{(i)} D_1^{(i)} u^{(i)} - m^2 u^{(i)} = u_b^{(i)}. \tag{2}$$

Здесь $u^{(i)}$ является потенциалом процесса на каждом ребре, а $u_b^{(i)}$ — внешним потенциалом. Система учитывает обмен с внешней средой.

Ранее [1] было дано решение задачи D на графе, где использовалось представленные решения на каждом ребре в виде

$$T^{(i)}(x) = \left(T_1 - w\,\Big|_{x_1}\right) \frac{\operatorname{sh} m_i X_i(x, x_2)}{\operatorname{sh} m_i X_i(x_1, x_2)} +$$

$$+ \left(T_2 - w\,\Big|_{x_2}\right) \frac{\operatorname{sh} m_i X_i(x, x_1)}{\operatorname{sh} m_i X_i(x_2, x_1)} + w(x), \tag{3}$$

где $w^(i)$ — частные решения(2).