А. П. Антонов (Москва)
alt@land.ru

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ $\mathbf{H}_p^{\omega_1\omega_2}$

История вопроса подробно рассматривалась автором в работе [1].

Рассмотрим тригонометрический ряд $\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1,n_2}e^{i(n_1x_1+n_2x_2)}$, где последовательность коэффициентов $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$ удовлетворяет некоторым условиям монотонности. Через $f(x_1,x_2)$ будем обозначать сумму данного ряда в тех точках, где он сходится.

Пусть $k_1,k_2\in\mathbf{N}$, $1\le p<\infty$, $f(x_1,x_2)\in\mathbf{L}_p[0,2\pi]^2$. Смешанным модулем гладкости порядков k_1,k_2 в метрике $\mathbf{L}_p$ будем называть функцию

$$\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p=\sup_{|h_1|\le\delta_1,|h_2|\le\delta_2}\left\|\Delta_{h_1}^{k_1}\left(\Delta_{h_2}^{k_2}(f)\right)\right\|_p,$$

где $\Delta_{h_1}^{k_1}(f)=\Delta_{h_1}^{1}\left(\Delta_{h_1}^{k_1-1}(f)\right)$, а $\Delta_{h_1}^{1}(f)=f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2)$, $\Delta_{h_2}^{k_2}(f)$ определяется аналогично для переменной x_2.

Определение 1. Пусть $\alpha>0$. Будем говорить, что функция ω *принадлежит классу* S_p^{α}, если она непрерывна и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega(\delta)=0$; 2) $0\le\omega(\delta_1)\le\omega(\delta_2)$ при $0\le\delta_1\le\delta_2\le 1$; 3) $\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1^{\alpha}}\le\frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2^{\alpha}}$ при $0<\delta_2\le\delta_1\le 1$; 4) $\int\limits_0^{\delta}\frac{\omega^p(t)}{t}dt=O(\omega^p(\delta))$ при $\delta\to 0+$; 5) существует постоянная $C>0$, что для любого $0<\delta<\frac{1}{2}$ верно $\omega(2\delta)<C\omega(\delta)$.

Определение 2. Пусть $\omega_j\in S_p^{\alpha_j}$, $j=1,2$. Обозначим $\mathbf{H}_p^{\omega_1\omega_2}$ — множество функций $f\in\mathbf{L}_p[0,2\pi]^2$ таких, что найдутся $k_1>\alpha_1$ и $k_2>\alpha_2$, что $\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p=O(\omega_1(\delta_1)\cdot\omega_2(\delta_2))$ при $\delta_1,\delta_2\to 0+$.

Теорема. *Пусть* $\frac{4}{3}<p<\infty$, $\alpha_j>0$, $\omega_j\in S_p^{\alpha_j}$, $j=1,2$, *функция* $f(x_1,x_2)\in\mathbf{L}[0,2\pi]^2$ *и ее коэффициенты Фурье* $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$ *монотонно убывают по каждому направлению. Тогда для того, чтобы* $f(x_1,x_2)\in\mathbf{H}_p^{\omega_1\omega_2}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{n_1,n_2}=O\left(\prod_{j=1}^{2}\left(\omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)\cdot n_j^{\frac{1}{p}-1}\right)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонов А. П.* Гладкость сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2007. № 4. С. 21–29.