А. В. Кривошеин (Санкт-Петербург)
san_san@inbox.ru

О ПОСТРОЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ФРЕЙМОПОДОБНЫХ СИСТЕМ[1]

Унитарный принцип расширения (UEP, [A. Ron, Z. Shen, 97]) является общей схемой построения двойственных фреймов всплесков. Однако, вообще говоря, он приводит к двойственной системе всплесков $\{\psi_{ik}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\}$, которая не обязательно является фреймом в $L_2(R^d)$, и, кроме того, может состоять из обобщенных функций. Некоторые свойства этих систем, такие как разложение фреймового типа (со сходимостью в различных смыслах) и их порядок аппроксимации, были исследованы в [1]. Эти системы всплесков были названы фреймоподобными.

Для произвольной матрицы растяжения, любого целого n и целого-полуцелого c описаны все симметричные относительно точки c маски, удовлетворяющие правилу сумм до порядка n. Для каждой такой маски явно строится фреймоподобная система всплесков, обеспечивающая порядок аппроксимации n, при этом все всплеск-функции $\{\psi^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}^{(\nu)}\}$ являются симметричными/антисимметричными относительно точки. Для всех матриц растяжения в R^2 (которые являются подходящими для осевой группы симметрий в некотором естественном смысле) построены фреймоподобные системы всплесков, обладающие осевой симметрией и обеспечивающие заданный порядок аппроксимации. Для некоторых матриц растяжения построены фреймоподобные системы всплесков, обладающие более высокой степенью симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Krivoshein A. V., Skopina M. A.* Approximation by frame-like wavelet systems // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2011. Vol. 31(3). P. 410–428.

В. Г. Кротов, М. А. Прохорович (Минск)
krotov@bsu.by, prokhorovich@bsu.by

О МНОЖЕСТВЕ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Для функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ обозначаем $\Lambda(f)$ дополнение множества тех точек $x \in \mathbb{R}^N$, в которых существует предел

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\mu.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00162).

Здесь μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\}$ — евклидов шар с центром в точке x радиуса $r > 0$.

Согласно классической теореме Лебега $\mu(\Lambda(f)) = 0$ для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Для более регулярных функций можно утверждать большее. Именно, *если $p > 1$, $l \in \mathbb{N}$, $lp < N$ и $f \in W^p_l(\mathbb{R}^N)$ (обычные классы Соболева), то*

$$\mathrm{Cap}_{l,p}(\Lambda(f)) = 0, \quad \dim_{\mathbb{H}}(\Lambda(f)) \leq N - lp.$$

([1] при $l = 1$ и [2–4] в общем случае). Здесь $\mathrm{Cap}_{l,p}$ — емкость, порождаемая классом Соболева $W^p_l(\mathbb{R}^N)$, $\dim_{\mathbb{H}}$ — размерность Хаусдорфа. Наш основной результат показывает точность этого утверждения.

Теорема. *Пусть $1 < p < N/l$. Тогда существуют такая функция $f_0 \in W^p_l\left(\mathbb{R}^N\right)$, что $\dim_{\mathbb{H}}(\Lambda(f_0)) = N - lp$ и $\mathrm{Cap}_{l,q}(\Lambda(f_0)) > 0$ для любого $q > p$.*

Подобные результаты получены также для некоторой непрерывной шкалы соболевских пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Federer H., Ziemer C.* The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p-th power summable // Indiana Univ. Math. J. 1972. Vol. 22, № 2. P. 139–158.

2. *Calderon C. P., Fabes E. B., Riviere N. M.* Maximal smoothing operators // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 232, № 10. P. 889–898.

3. *Meyers N. G.* Taylor expansion of Bessel potentials // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23, № 11. P. 1043–1049.

4. *Bagby T., Ziemer C.* Pointwise differentiability and absolute continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 191. P. 129–148.

Ю. С. Крусс (Саратов)
KrussUS@gmail.com

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КОМПАКТНОЙ НУЛЬМЕРНОЙ ГРУППЕ

Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ таких, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G). $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ — базисная последовательность, $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — функции Радемахера на группе G, $H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} * r_n^j(x \dot{-} q) * 1_{G_n}(x \dot{-} q)$ — функции Хаара, где $j = \overline{1, p_n - 1}$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = \overline{0, m_n - 1}$, а k и q связаны следующим