А. И. Седов (Магнитогорск)
sedov-ai@yandex.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА. МЕТОД СЛЕДОВ

Пусть линейный, дискретный, самосопряженный, полуограниченный снизу оператор T с ядерной резольвентой действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть P — ограниченный оператор умножения на функцию $p \in H$ действующий в H. Обозначим через $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектры операторов.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *пусть ряд $\sum\limits_n |\lambda_n - \xi_n|$ сходится. Для последовательности $\{\xi_n\}$ требуется доказать существование и единственность такого оператора $T+P$, что его спектр $\sigma(T+P)$ совпадает с данной последовательностью $\{\xi_n\}$.*

За последнее время метод, идея которого высказана в [1], был обобщен для абстрактных дискретных операторов, найдены и обоснованы эффективные алгоритмы по нахождению приближенного решения обратной задачи [2]. Приведем пример применения метода.

Пусть оператор T_0, порожден краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, Π — прямоугольник со сторонами a и b.

Введем оператор $T = \displaystyle\int_0^{\infty} \lambda^{\beta} dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta > 3/2$, $\lambda^{\beta} > 0$ при $\lambda > 0$. Можно показать, что $\lambda_{kl} = \left(\dfrac{\pi^2 k^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2 l^2}{b^2}\right)^{\beta}$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Пусть стороны прямоугольника $a = \sqrt[4]{2}$ и $b = 1$; степень $\beta = 2$. Положим $m = 9$. Тогда будем иметь $\{\lambda_1, \dots, \lambda_9, \dots\} = \{28.76,\ 144.66,\ 218.68,\ 460.19,\ 535.21,\ 929.99,\ 1060.11,\ 1380.87,\ 2329.73, \dots\}$. В качестве возмущенной последовательности возьмем $\{\xi_1, \dots, \xi_9\} = \{-14.70,\ 118.56,\ 189.90,\ 449.10,\ 511.75,\ 903.62,\ 1051.98,\ 1372.41,\ 2324.44\}$. Показано, что функция

$$p(x, y) = -177.59 \cos(5.28x) \cos(6.28y) -$$

$$-105.16 \cos(10.56x) \cos(6.28y) - 116.70 \cos(5.28x) \cos(12.57y) -$$

$$-44.36 \cos(10.57x) \cos(12.57y) - 91.65 \cos(15.85x) \cos(6.28y) -$$

$$-105.39 \cos(5.28x) \cos(18.85y) - 30.93 \cos(15.85x) \cos(12.57y) -$$

$$-33.09\cos(10.57x)\cos(18.85y)-19.70\cos(15.85x)\cos(18.85y)$$

дает множество $\{\mu_1,\dots,\mu_9\}$ которое отличается от множества $\{\xi_1,\dots,\xi_9\}$ на величину равную 0.000075, в смысле метрики ℓ_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1206–1211.

2. *Седов А. И.* Об обратной задаче спектрального анализа // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 7, № 4(221). С. 91–99.

А. И. Седов, С. С. Михеева (Магнитогорск)
sedov-ai@yandex.ru, sveta.safonova@mail.ru

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть T — положительный линейный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H с компактной резольвентой и простым спектром $\sigma(T)=\{\lambda_n\}$. Занумеруем собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ в порядке возрастания и обозначим через $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированные в H соответствующие собственные функции. Пусть ряд $\sum\limits_n \frac{1}{\lambda_n}$ сходится. Тогда $d_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n\to\infty$. Пусть P — ограниченный оператор действующий в H. Тогда найдется N такое, что при $n>N$ выполняются неравенства $\|P\|<d_n/2$ и $q:=\frac{\|P\|}{r}<1$, где $r=\frac{1}{2}\inf\limits_{n>N} d_n$. Обозначим через μ_n собственные числа оператора $T+P$ занумерованные в порядке возрастания действительных частей, с учетом алгебраической кратности, а через u_n соответствующие им ортонормированные в H собственные функции. Можно показать, что матрица Вандермонда $\left(\mu_k^m\right)_{k=\overline{1,N},\, m=\overline{0,N-1}}$ обратима. Обозначим элементы обратной матрицы через w_{km}.

В работе приводятся формулы асимптотики собственных функций возмущенного оператора u_n при любом n. Например, для первых $k\le N$ собственных функций они имеют следующий вид.

$$c_{nk}u_k=\sum_{m=0}^{N-1} w_{km}\Big(\lambda_n^m v_n+m\lambda_n^{m-1}(Pv_n,v_n)v_n+$$

$$+\sum_{l\le N,l\ne n}\frac{\lambda_n^m-\lambda_l^m}{\lambda_n-\lambda_l}(Pv_n,v_l)v_l+\sum_{l>N}\frac{\lambda_n^m}{\lambda_n-\lambda_l}(Pv_n,v_l)v_l+R_2^m\Big),$$