И. А. Козлова, А. И. Савотин (Калуга)
irena1983.83@mail.ru

ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

Функция Больцано $B(x)$ строится следующим образом. Определяются вспомогательные функции $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $\ldots$, $B_n(x)$,$\ldots$. Графиком функции $B_0(x)$ является отрезок OA_4. Заменим OA_4 ломаной $OA_1A_2A_3A_4$, так, что точки O, A_1, A_2, A_3, A_4, имеют координаты

$$O(0,0), \quad A_1\left(\frac{a}{4}, -\frac{h}{2}\right), \quad A_2\left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad A_3\left(\frac{3a}{4}, \frac{h}{2}\right), \quad A_4(a,h).$$

Функцию, имеющую график $OA_1A_2A_3A_4$, обозначим через $B_1(x)$. По функции $B_1(x)$ строим функцию $B_2(x)$.

Повторим эту операцию n раз; придем к функции $B_n(x)$. Колебание функции $B_n(x)$ в каждом из промежутков

$$\left(\frac{s}{4^n}\,a, \frac{s+1}{4^n}\,a\right), \quad s = 0,1,2,\ldots,4^n-1, \quad n = 0,1,2,3,\ldots \tag{1}$$

будет

$$\omega\left(\frac{s}{4^n}\,a, \frac{s+1}{4^n}\,a\right) = \frac{h}{2^n}; \tag{2}$$

для колебания $B_n(x)$ в промежутке $(0,a)$ получим

$$\omega_n(0,a) = h\left(2 - \frac{1}{2^n}\right). \tag{3}$$

Определим функцию $B(x)$ вначале в точках вида

$$x = \frac{ka}{4^n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 4^n, \quad n = 0,1,2,3,\ldots, \quad k \text{ — целое}, \tag{4}$$

полагая $B(x) = B_n(x)$.

На основании (2) и (3) можно утверждать, что колебание $B(x)$ на множестве всех точек вида (4), принадлежащих одному из промежутков (1) будет

$$\omega\left(\frac{s}{4^n}\,a, \frac{s+1}{4^n}\,a\right) = \frac{h}{2^{n-1}}, \tag{5}$$

а колебание $B(x)$ на любом множестве точек вида (4), принадлежащем промежутку длины $a/4^n$, будет меньше $h/2^{n-2}$, а поэтому $B(x)$ будет непрерывна на множестве (4). Нам остается еще определить $B(x)$ для значений x, отличных от точек вида (4). Это можно сделать полагая

$$B(x) = \lim_{t\to x} B(t).$$

Теперь $B(x)$ определена во всем промежутке $(0, a)$ и является непрерывной функцией в этом промежутке.

Колебание функции Больцано $B(x)$ в любом промежутке длины $a/4^n$

$$\omega\left(x, x + \frac{a}{4^n}\right) > \frac{h}{2^n}. \tag{6}$$

Это утверждение вытекает из того, что в любом промежутке длины $a/4^n$ попадает хоть один промежуток из числа промежутков, полученных при делении $(0, a)$ на 4^{n+1} равных частей.

Теперь рассмотрим модуль непрерывности функции Больцано при $h = 1$ и $a = 1$. В этом случае $0 < \delta < 1$. Из (5) следует, что модуль непрерывности (при $h = 1$, $a = 1$)для

$$\frac{1}{4^{n+1}} \leqslant \delta < \frac{1}{4^n}$$

будет

$$\omega(B; \delta) \leqslant \omega\left(B; \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{4^{n-1}}} = 4\sqrt{\frac{1}{4^{n+1}}} \leqslant 4\sqrt{\delta}. \tag{7}$$

Таким образом, мы получили оценку сверху модуля непрерывности функции $B(x)$. Из (6) можно получить и оценку снизу модуля непрерывности для данной функции:

$$\omega(B; \delta) \geqslant \omega\left(B; \frac{1}{4^{n+1}}\right) > \frac{1}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{4^{n+1}}} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\delta}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что модуль непрерывности функции Больцано находится в пределах

$$\frac{1}{2}\sqrt{\delta} \leqslant \omega(B; \delta) \leqslant 4\sqrt{\delta},$$

и $B(x)$ принадлежит классу Липшица порядка $frac12$ с константой $M = 4$, т.е. $B(x) \in 4\mathrm{Lip}\frac{1}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бржечка Б. Ф.* О функции Больцано // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, вып. 2. С. 15–20.