

ценной бумаги. Ликвидность растёт вместе с растущим открытым интересом.

Имея данные об объёме ( $v$ ) и обороте ( $q$ ) торговли за указанный период торгов, можно вычислить среднюю цену ( $p$ ) акции:

$$p = \frac{v}{q}$$

Например, если в течение торгового дня оборот акций предприятия составил 100 штук, в том числе 40 штук по курсу 125 руб., и 60 штук по курсу 150 руб., то объём сделок с этими акциями равен 14 тыс. руб., а их средняя цена по итогам торгового дня составляет 140 руб.

Объём торговли можно отразить в виде графика, строящегося строго под ценовым чартом в виде обычной столбиковой гистограммы. Если это нужно, используется дополнительная вертикальная шкала. В отличие от ценового чарта затемнение столбика объёмной диаграммы означает, что объём в текущем периоде повысился по сравнению с предыдущим периодом (рис. 3.12).

При анализе графиков объёма нас интересуют не столько абсолютные значения объёма торговли по данной акции, сколько соотношение значений объёма на сегодняшний день со значением объёма в среднем по конкретной акции за прошлые периоды. Говоря о большом объёме торговли, подразумевают объём сделок по данной акции, значительно (не менее чем на 20 %) превышающий средний объём в рассматриваемом периоде.

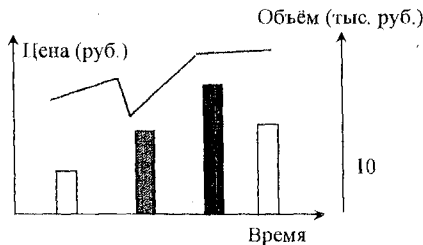


Рис. 3.12. Динамика цены и объёма торгов активом

По объёмным показателям торгов производится сопоставление различных ценных бумаг. Ясно, что информации об обороте торгов в таком случае недостаточно.

Например, если за день торгов оборот актива А, котирующегося по цене 500 руб., был 1 000 штук, а оборот актива В, котирующегося по цене 10 руб., был 50 000 штук, то оба актива достигли одинакового объёма в 500 000 руб.

Если бы рассматривался только оборот, то можно было бы сделать ошибочный вывод о гораздо большей привлекательности актива В. Рассмотрим ещё один пример, свидетельствующий о важности объёмных показателей.

Когда акции успешно развивающегося предприятия достигают определённого ценового уровня, их часто дробят, то есть разделяют на несколько равноценных акций, в сумме составляющих одну прежнюю акцию. Делается это, прежде всего, для повышения доступности акций пред-

приятия покупателям. Допустим, соотношение дробления установлено как 5:1. В этом случае акционеры просто меняют каждую свою предыдущую акцию на 5 новых акций. После дробления количество акций, а следовательно, и оборот торговли, резко возрастает, однако реального сильного роста деловой активности не происходит.

Анализ графика динамики объёмных показателей торговли несёт информационную ценность лишь в совокупности с анализом ценовой тенденции. Так, если курс акций резко растёт в сочетании с повышением объёма торгов, то это можно оценивать как явный показатель увеличения интереса инвесторов.

Естественно, на цену акций влияет соотношение спроса и предложения, а кроме того, за ценой нужно обязательно понаблюдать перед каждым опубликованием бухгалтерской отчётности фирмы (квартальной и годовой). Если перед опубликованием бухгалтерской отчётности акций и объём торговли увеличивается, то можно ожидать позитивной оценки финансового состояния предприятия из ожидаемых данных. Если же объём торгов увеличивается, а курс акций падает, то это обычно предвещает опубликование негативной информации о финансовом состоянии предприятия. В таком аспекте объёмные показатели торгов увязывают результаты технического анализа с фундаментальными показателями деятельности предприятия.

Чем больше объём торгов, тем выше заинтересованность участников рынка. При увеличении объёма, как правило, подтверждается текущая тенденция. Если объём начинает уменьшаться, то это может означать меньшую заинтересованность участников торгов и неуверенность в сохранении текущего ценового тренда. Такая ситуация может быть показателем близкого разворота тренда.

Анализируя чарты, трейдеры стараются выявить в них закономерности и на основе некоторых типовых формаций, появляющихся в прошлом, составить прогноз на будущее. Часто возникают типовые фигуры и формации, которые позволяют сделать достаточно точный прогноз о поведении цены.

### 3.4. Трендовые линии

Цены на акции движутся направленно. Главной задачей технического анализа является возможность распознавания текущего направления и своевременно увидеть сигнал его разворота. Вспомним, что тренд – направление движения цен. Тренд может быть восходящим, или «бычьим», нисходящим, или «медвежьим», а также боковым. При восходящем тренде цены имеют тенденцию к росту, при нисходящем – к падению, при боковом тренде колеблются примерно на одном и том же уровне. Тренды можно также разделить на краткосрочные, среднесрочные или долгосрочные в зависимости от глубины исследования. Рано или поздно направление

тренда изменяется, он может развернуться и начать движение в обратную сторону или прерваться боковым движением и затем по прошествии некоторого промежутка времени продолжить своё развитие в первоначальном направлении. Если тренд находится в процессе разворота от восходящего к нисходящему, или наоборот, то на графиках развивается характерная формация, и её, как правило, можно будет опознать как разворотную формацию. Некоторые формации образуются очень быстро и также быстро подходят к концу, другим требуется на построение несколько недель, пока мы с уверенностью не сможем сказать, что перед нами появилась разворотная формация.

Тенденция может быть повышательной или понижательной. Характеристикой повышательной тенденции является наличие последовательности более высоких минимумов и более высоких максимумов (рис. 3.13). При отслеживании тенденций могут использоваться не только линейные графики, но и гистограммы.

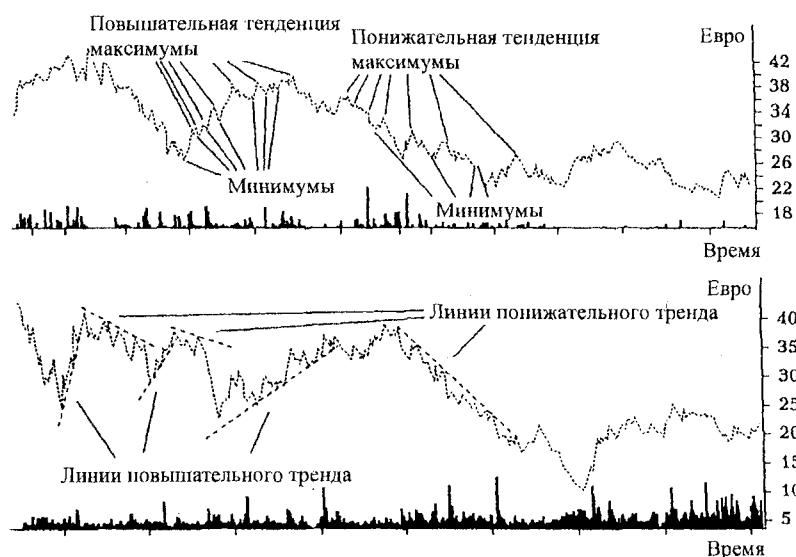


Рис. 3.13. Повышательные и понижательные тренды

Характеристикой понижательной тенденции является наличие последовательности более низких максимумов и более низких минимумов. Тенденция является нарушенной, если «пробит» предыдущий минимум у повышательной тенденции или предыдущий максимум у понижательной тенденции («пробой» означает, что график развития цен пересёк линию тренда сверху вниз или снизу вверх соответственно).

«Пробой» можно рассматривать как предупреждение о том, что текущая тенденция возможно утратила свою силу и закончилась.

Прибыль от вложенного капитала можно получить, используя восходящую или нисходящую тенденции, и следовать им, пока не начнётся разворот. Это означает, что надо стараться «открыть» позицию при зарождении «бычьего» тренда (купить акции) и «закрыть» позицию при зарождении «медвежьего» тренда (продать их).

Для построения линий тренда существует несколько способов. В следующей главе будет предложен метод построения линий тренда, основанный на теории приближений П.Л. Чебышёва и многозначном анализе. Однако при анализе типовых формаций в техническом анализе существуют свои приёмы нанесения линий тренда на график.

Линию тренда проводят через две опорные точки. Линия повышательного тренда соединяет последовательность максимумов и наносится выше ценового чарта (рис. 3.14).



Рис. 3.14. Трендовые линии

Трендовую линию называют также линией сопротивления или линией поддержки в зависимости от её расположения. При движении графика вверх цена как бы наталкивается на препятствие и затем опять опускается.

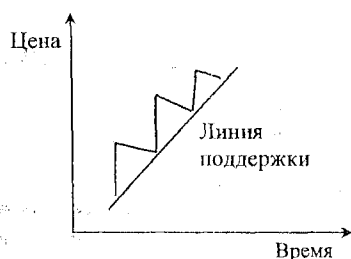


Рис. 3.15. Линия поддержки при бычьем тренде

Аналогично, снизившись, цена опять наталкивается на препятствие и начинает движение вверх. Препятствие, появляющееся при движении вверх, называется уровнем сопротивления, препятствие, возникающее при движении вниз, называют уровнем поддержки. Соединив две или три точки уровня поддержки или несколько точек уровня сопротивления, мы получим нужную линию восходящего или нисходящего тренда соответственно. Такие линии могут подниматься вверх при бычьем тренде, опускаться вниз при медвежьём тренде или проходить параллельно оси абсцисс при боковом тренде (рис. 3.15, 3.16).

Такие линии могут подниматься вверх при бычьем тренде, опускаться вниз при медвежьём тренде или проходить параллельно оси абсцисс при боковом тренде (рис. 3.15, 3.16).

Боковой тренд определяется линией поддержки, последовательно соединяющей минимумы, и линией сопротивления, последовательно соединяющей максимумы. Курс ценной бумаги колеблется между двумя линиями, параллельными горизонтальной оси (рис. 3.17).

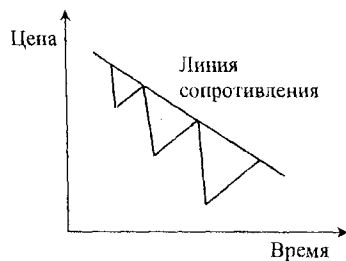


Рис. 3.16. Линия сопротивления при медвежьем тренде

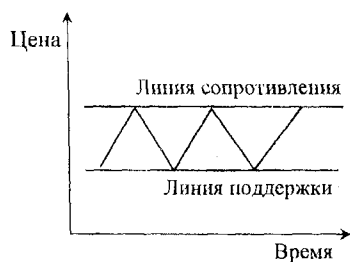


Рис. 3.17. Линия поддержки и линия сопротивления при боковом тренде

Уровни поддержки и сопротивления могут меняться местами. Рассмотрим два примера (рис. 3.18, 3.19).

Уровень сопротивления при боковом тренде (рис. 3.19) стал уровнем поддержки. В такой ситуации имеет смысл открыть позицию, так как трендовая линия была уверенно пробита и есть большая вероятность того, что цена будет расти. На рис. 3.19 уровень поддержки при боковом тренде стал уровнем сопротивления. В такой ситуации имеет смысл закрыть позицию, так как трендовая линия была уверенно пробита и существует большая вероятность того, что цена ещё более опустится (особенно если низший уровень цены был ценой закрытия биржевой сессии), и надо продать акцию, чтобы не получить ещё больший убыток.

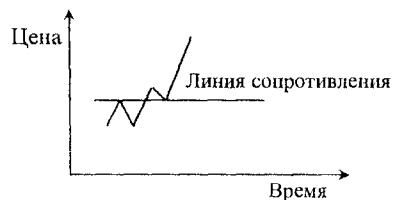


Рис. 3.18. Линия сопротивления при боковом тренде

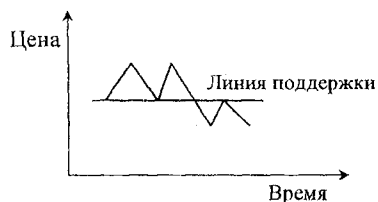


Рис. 3.19. Линия поддержки при боковом тренде

Линию тренда и параллельную ей линию, ограничивающую область ценового тренда, называют ценовым коридором, или торговым диапазоном. В следующей главе будет рассматриваться другой способ построения линии тренда и эти понятия будут уточняться.

Так как тренды никогда не проходят плавно и равномерно и нуждаются в коррекции, аналитику часто приходится сомневаться в дальнейшем

направлении движения тренда и в его силе. Однако в течение ряда лет формировались постоянно повторяющиеся графические модели, с помощью которых стало возможным определять эмпирическим методом, будет ли тренд продолжаться в том же направлении или он закончится, что в дальнейшем приведёт к развороту.

### 3.5. Типовые графические фигуры и формации в техническом анализе рынка ценных бумаг

Конец восходящих или нисходящих тенденций охарактеризован обычно разворотными формациями. К ним относятся:

- ❖ при восходящем тренде:
  - «голова и плечи» (Head and Shoulders);
  - V-образные вершины;
  - двойная вершина (Double Top);
  - тройная вершина (Triple Top);
  - соусники, или круглые вершины (Saucers or Round Tops);
  - нисходящий треугольник;
- ❖ при нисходящем тренде:
  - перевернутые голова и плечи (Inverted Head and Shoulders);
  - V-образные впадины;
  - двойная впадина (Double Bottom);
  - тройная впадина (Triple Bottom);
  - соусники, или круглые днища (Saucers or Round Bottoms);
  - восходящий треугольник.

После завершения некоторых графических фигур тенденция движения цен сохраняется в том же направлении, которое предшествовало их формированию. Такие фигуры называются формациями продолжения. К ним относятся:

- ❖ при восходящем тренде:
  - симметричные треугольники;
  - восходящие треугольники;
  - прямоугольники;
  - флаги;
  - вымпелы;
- ❖ при нисходящем тренде:
  - симметричные треугольники;
  - нисходящие треугольники;
  - прямоугольники;
  - флаги;
  - вымпелы.

Заметим, что восходящий и нисходящий треугольники могут указывать как на продолжение, так и на разворот тенденции в зависимости от

предшествующего ценового тренда. Гораздо чаще такие формации встречаются при сохранении действующей тенденции.

Начнём рассмотрение с формаций **разворота тренда**. Прежде чем искать разворотную формацию на графике, нужно убедиться в наличии чётко выраженного тренда. Если предшествующая линия какого-либо (восходящего или нисходящего) тренда будет уверенно пробита, то, следя за дальнейшим развитием цен, можно наблюдать за построением разворотной формации.

«**Голова и плечи**». Одной из наиболее важных разворотных формаций при восходящем тренде является формация «голова и плечи», получившая своё название из-за сходства с человеческим торсом. Она представляет собой конфигурацию из трёх вершин: левое плечо, голова, правое плечо. Средняя вершина чаще всего выше левой и правой. Для такой формации характерно присутствие линии шеи, которая может являться линией поддержки в восходящем тренде (рис. 3.20).



Рис. 3.20. «Голова и плечи»

Чтобы не спутать эту формацию с другими формациями, нужно наблюдать за изменением графика объёма. Идеальнее всего, чтобы объём увеличивался начиная с левого плеча, затем — при движении графика цен вверх — объём должен уменьшаться; на уровне высшей точки правого плеча он должен быть значительно меньше величины объёма на уровне головы и левого плеча. Как только ценовой график пробил линию шеи (для вкладчиков это будет сигналом к продаже акций), объём должен значительно увеличиться. Пробой линии шеи будет означать завершение всей формации «голова и плечи», и начало нисходящего тренда, при котором падение цены произойдёт на величину, не меньшую, чем расстояние между «макушкой» головы и линией шеи.

Пока ценовой график не пробил линию шеи, формация «голова и плечи» не считается завершенной и не может рассматриваться как таковая.

**«Перевернутые голова и плечи».** Эта формация возникает при нисходящем ценовом тренде и является зеркальным отображением предыдущей формации. Она представляет собой конфигурацию из трёх впадин: левое плечо, голова, правое плечо. Линия шеи в данном случае может совпадать с линией сопротивления при нисходящем ценовом тренде. Так же как и в формации «голова и плечи», здесь особое внимание уделяется графику объёма торгов. Объём у левого плеча должен значительно увеличиться, а затем уменьшаться до тех пор, пока ценовой график не пробил линию шеи (в этот момент объём должен увеличиться). Пробой линии шеи ценовым графиком будет сигналом для покупки акций, так как вслед за ним тенденция движения цен станет восходящей, причём подъем цен окажется на величину, не меньшую, чем провал от линии шеи до «макушки» головы (рис. 3.21).



Рис. 3.21. Перевернутые «голова и плечи»

**У-образные вершины и впадины.** Эти формации возникают, как правило, при длительной (сроком не менее месяца) тенденции повышения или понижения цены актива (рис. 3.22, 3.23).

После длительного падения (роста) начинается резкое движение цены в обратном направлении, которое должно быть прервано боковым движением. Если после бокового движения цены начнут расти (падать), то это означает, что сформировалась U-образная формация, которая служит сигналом к покупке (продаже) ценных бумаг.

U-образные формации возникают часто на рынке полезных ископаемых или в преддверии резких кризисов или подъёмов.



Наглядным примером такой формации может служить резкий подъём цен на нефть в 1990 г. из-за войны в Персидском заливе.



Рис. 3.22. V-образная вершина

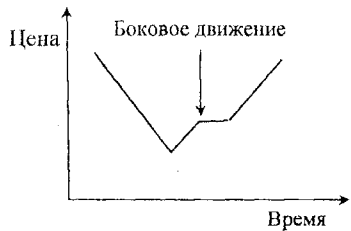


Рис. 3.23. V-образная впадина

**«Двойные вершины и впадины».** Амплитуда колебаний цен акций при формировании этих формаций должна составлять не менее 10 % от курса. Так же как и в формации «голова и плечи», при зарождении «двойных вершин» и «двойных впадин», объём торговли должен заметно увеличиться, а затем, в период формирования, заметно уменьшиться.

Формация «двойных вершин», или M-образная формация, появляется при нисходящем тренде и считается завершённой, если цены падают на уровень ниже минимального уровня цен между двумя вершинами (рис. 3.24), трейдер в таком случае получает сигнал к продаже акций.

Формация «двойных впадин», или W-образная формация, появляется при восходящем тренде и считается завершённой, если цены поднимаются на уровень выше максимального уровня цен между двумя впадинами (рис. 3.25), трейдер в таком случае получает сигнал к покупке акций.



Рис. 3.24. Двойная вершина

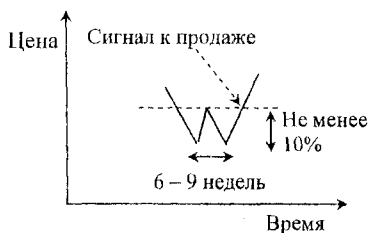


Рис. 3.25. Двойная впадина

**«Тройные вершины и впадины».** Такие формации встречаются достаточно редко, развиваются аналогично «двойным вершинам и впадинам» (рис. 3.26, 3.27).

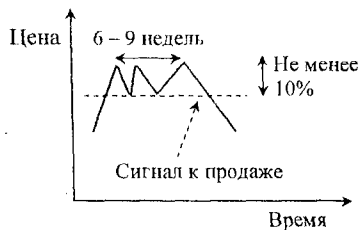


Рис. 3.26. «Тройная вершина»

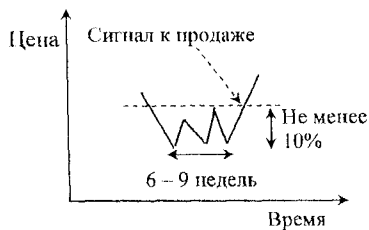


Рис. 3.27. «Тройная впадина»

«Соусники» (круглые вершины и днища). Формации такого типа появляются достаточно редко, и на их формирование часто уходят месяцы. Круглые вершины появляются в конце восходящего тренда, завершение формаций характеризуется пробоем ценовым чартом горизонтальной линии, ограничивающей дугу днища, что обычно сопровождается увеличением объёма торговли (рис. 3.28). Трейдеры получают сигнал к продаже активов. Круглые днища появляются в конце нисходящего тренда, завершение формаций характеризуется пробоем ценовым чартом горизонтальной линии, ограничивающей дугу днища, что обычно сопровождается увеличением объёма торговли (рис. 3.29). Трейдеры получают сигнал к покупке активов.

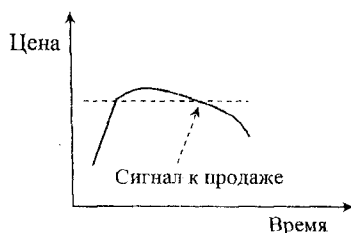


Рис. 3.28. Круглая вершина

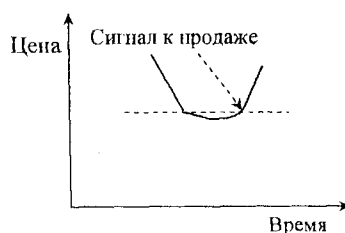


Рис. 3.29. Круглое днище

Ошибочные сигналы. Чем меньше размах колебаний цен и длительность формирования фигуры, тем больше опасность того, что прогноз окажется ложным. Наиболее типичными ситуациями, при которых велика вероятность ошибки, являются «бычья ловушка» (bull-trap) и «медвежья ловушка» (bear-trap).

На графическом изображении «бычьей ловушки» курс акций уверенно пробивает ценовой коридор снизу вверх. Это является отчётливым сигналом для трейдеров открыть позицию. Цена начинает расти, но вопреки всем прогнозам она опять падает, и ценовой график пробивает линию поддержки ценового коридора сверху вниз, что заканчивается появлением нового нисходящего тренда. Позиции, открытые после первого пробоя трендового коридора в надежде на восходящий тренд, должны быть закры-

ты – самое позднее – в момент второго пробоя трендового коридора сверху вниз (рис. 3.30).

Появление медвежьей ловушки на карте характеризуется тем, что график уровня курса пробивает линию поддержки трендового коридора сверху вниз. Такое явление можно интерпретировать как сигнал к продаже. Но вопреки прогнозу цена после недолгого падения пробивает линию сопротивления трендового коридора снизу вверх и начинает новый восходящий тренд. После второго пробоя трейдеры должны исправить ошибку, произошедшую из-за ложного сигнала, и снова открыть позиции (рис. 3.31).



Рис. 3.30. «Бычья ловушка»



Рис. 3.31 «Медвежья ловушка»

Рассмотрим наиболее редко встречающиеся формации разворота тренда – восходящий и нисходящий треугольники.

Восходящий (в нисходящем тренде) и нисходящий (в восходящем тренде) треугольники. Восходящий треугольник ограничен сверху параллельной временной оси линией, а снизу – линией, имеющей с положительным направлением оси времени угол  $35 - 65^\circ$  (рис. 3.32). Нисходящий треугольник ограничен снизу линией, параллельной временной оси, а сверху – линией, имеющей с положительным направлением временной оси угол  $110 - 150^\circ$  (рис. 3.33).

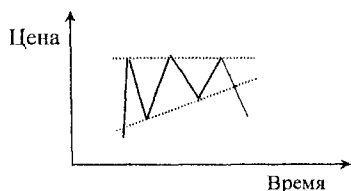


Рис. 3.32. Восходящий треугольник

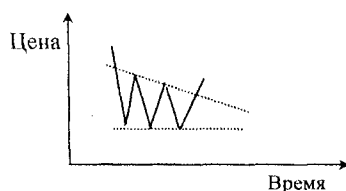


Рис. 3.33. Нисходящий треугольник

Переходим к формациям продолжения, которые наблюдаются в течение фазы консолидации (упрочнения) действующего тренда. Особое значение такие формации имеют на растущих рынках акций стабильных перспективных корпораций, и результаты технического анализа здесь согласуются с результатами фундаментального анализа.

Формации продолжения ценовой тенденции свидетельствуют о том, что предшествующий тренд всё ещё силен и, прервавшись на некоторое время, он продолжает движение в том же направлении. В начале фазы консолидации наблюдается заметное уменьшение объёма торговли. После окончания формирования фигуры продолжения, когда цена начнёт расти (реже – падать) в соответствии с первоначальной тенденцией, величина объёма должна увеличиться и стать максимальной в течение всего времени её формирования. Такое увеличение объёма будет означать растущий интерес инвесторов (реже – увеличение продажи акций) и подтвердит предыдущее направление движение тренда.

«Симметричные треугольники». У сужающегося симметричного треугольника линия поддержки составляет с осью времени угол  $30-45^\circ$ , а линия сопротивления – угол  $135-150^\circ$ , причём обе эти линии сходятся в одной точке (рис. 3.34, 3.35).

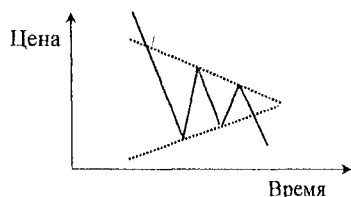


Рис. 3.34. Симметричный треугольник при нисходящем тренде

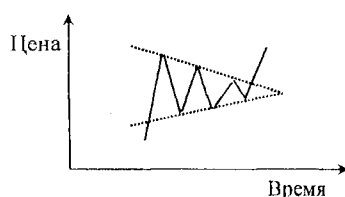


Рис. 3.35. Симметричный треугольник при восходящем тренде

«Восходящие треугольники» (при восходящем тренде) и «нисходящие треугольники» (при нисходящем тренде) (рис. 3.36, 3.37).

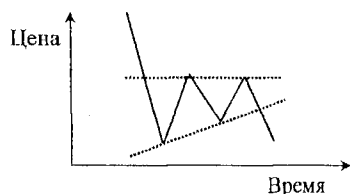


Рис. 3.36. Восходящий треугольник

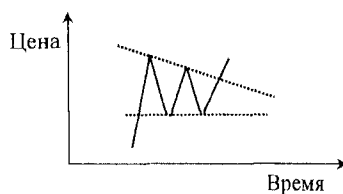


Рис. 3.37. Нисходящий треугольник

«Прямоугольники». Если нисходящее или восходящее движение цены на короткое время (не более нескольких дней) прервалось боковым движением между двумя горизонтальными линиями, это свидетельствует о формировании «прямоугольника» (рис. 3.38, 3.39).

В период формирования прямоугольника величина объёма торговли уменьшается. Акции как бы «набирают силу», чтобы в будущем продолжить предыдущий тренд. О продолжении восходящего (нисходящего) тренда свидетельствует пробой линии сопротивления (поддержки) ценовым чартом.

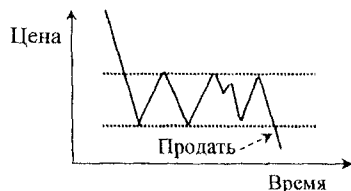


Рис. 3.38. Прямоугольник при нисходящем тренде

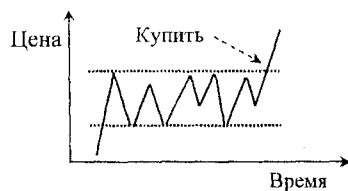


Рис. 3.39. Прямоугольник при восходящем тренде

**Флаги.** Флаги лишь незначительно отличаются от прямоугольников тем, что линии поддержки и сопротивления, между которыми колеблются цены в период прерывания тренда, параллельны между собой, но образуют острый (при нисходящем тренде) или тупой (при восходящем тренде) угол с осью времени (рис. 3.40, 3.41).

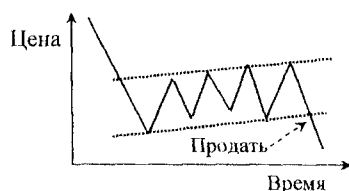


Рис. 3.40. Флаг при нисходящем тренде

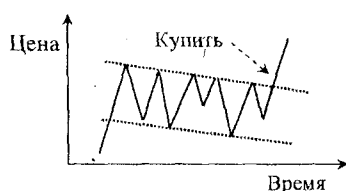


Рис. 3.41. Флаг при восходящем тренде

Так как флаги направлены в сторону, противоположную основной тенденции, то они свидетельствуют о ее слабости.

**«Вымпелы».** «Вымпелы» – это фактически треугольники, направленные в сторону, противоположную основной тенденции.

При нисходящем тренде линия поддержки образует с осью времени угол  $45 - 60^\circ$ , а линия сопротивления – угол  $15 - 30^\circ$  (рис. 3.42).

При восходящем тренде линия поддержки образует с осью времени угол  $145 - 160^\circ$ , а линия сопротивления – угол  $100 - 135^\circ$  (рис. 3.43).

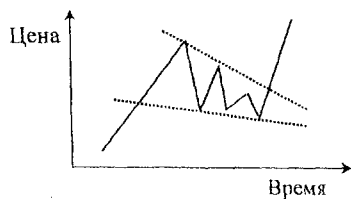


Рис. 3.42. Вымпел при нисходящем тренде

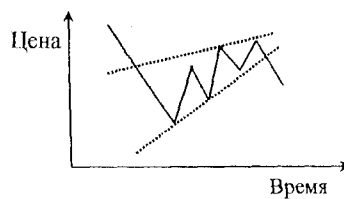


Рис. 3.43. Вымпел при восходящем тренде

### 3.6. Индикаторы технического анализа

Технический аналитик, специализирующийся на ценных бумагах какой-то одной компании или группы компаний, достаточно точно может спрогнозировать развитие цен на основании только графического анализа. Однако для более обширного анализа графической интерпретации недостаточно, поскольку ценовые и торговые масштабы для различных акций могут быть несоизмеримыми. Рекомендуется подсчитывать ещё некоторые аналитические показатели. Следует помнить, что значение какого-либо одного индикатора может повлиять на решение трейдера, только если оно соотносено со значениями других.

Рассмотрим следующие индикаторы:

- ♦ скользящие средние;
- ♦ темпы изменения цен;
- ♦ рыночный коэффициент роста/снижения цен;
- ♦ стохастический индикатор сохранения силы тенденции;
- ♦ индексы относительной силы тенденции;
- ♦ параболический индикатор.

Скользящие средние. Скользящие средние величины удобно использовать, когда нужно сгладить ценовой график. Обозначим  $p_0, p_1, \dots, p_n$  — цены актива, зафиксированные по итогам условных торговых сессий в периоды  $0, 1, \dots, n$ . Самым несложным способом является подсчёт простой скользящей средней (Simple Moving Average):

$$S_{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^n p_i}{n+1} = \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_n}{n+1}.$$

Чтобы усилить влияние цен последних периодов, часто используют взвешенную скользящую среднюю (Weighted Moving Average):

$$W_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot p_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n+1} i} = \frac{1 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 + \dots + (n+1) \cdot p_n}{1 + 2 + \dots + n + (n+1)},$$

причём

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}.$$

На основании скользящих средних часто удаётся получить сигналы к покупке или продаже ценных бумаг. Для этого рассчитываются взвешенные скользящие средние обычно за 12 дней и за 26 дней и вычисляется их разница:  $M = W_{12} - W_{26}$ . Взвешенное среднее (как правило, за 9 дней) из этих величин называется «спусковым крючком»:

$$\text{«Спусковой крючок»}_9 = \frac{1 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 + \dots + 9 \cdot p_8}{1 + 2 + \dots + 9}.$$

Несмотря на удобство применения технического анализа эта сфера деятельности подвержена высокому риску. Ещё Генри Форд (1863 – 1947), промышленник и изобретатель, основатель «Форд мотор компании» (1903), первым внедривший конвейер в процесс производства (1913), говорил, что богатыми мы становимся не от того, сколько зарабатываем, а от того, сколько мы не тратим. Поэтому при проведении операций с ценными бумагами гораздо важнее не потерять то, что уже имеешь, чем гнаться за сверхвысокими прибылями.

Если считать цены активов за каждый день торгов независимыми между собой случайными величинами, то простая скользящая средняя этих цен за  $(n + 1)$  периодов равна математическому ожиданию цены актива по итогам торгов:

$$E(p, n + 1) \approx S_{n+1} = \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_n}{n + 1},$$

а дисперсия рассчитывается по формуле

$$S(p, n + 1) = \sqrt{E((p - E(p, n + 1))^2, n + 1)} \approx \\ \approx \sqrt{\frac{(p_0 - E(p, n + 1))^2 + (p_1 - E(p, n + 1))^2 + \dots + (p_n - E(p, n + 1))^2}{n + 1}}.$$

После расчёта этих величин в каждый момент времени можно рассчитать границы так называемых полос Боллингера:

$$\text{верхняя граница}_i = E(p, i) + S(p, i),$$

$$\text{нижняя граница}_i = E(p, i) - S(p, i), \quad i \in 1 : (n + 1).$$

Полосы Боллингера наносятся на ценовой чарт. Вместе с другими приёмами они позволяют выявлять предстоящие изменение тенденции. Как правило, в преддверие смены тенденции цены сначала резко отклоняются за пределы полосы Боллингера, а затем снова возвращаются вовнутрь.

Следующая группа показателей позволяет техническому аналитику отслеживать скорость ценовых изменений. Путём сопоставления темпов изменения цен с результатами фундаментального прогноза, а именно с ди-

наимкой прибыли на акцию, рентабельностью продаж и рентабельностью собственного капитала аналитик может сделать вывод о том, насколько адекватно оценена компания.

Темпы изменения цен актива. Пусть  $p_t$  – средняя цена торгов активом по итогам  $t$ -го дня.

Абсолютный и относительный импульсы цены актива на период  $[t_1; t_2]$  рассчитываются соответственно по формулам:

$$\text{абсолютный импульс} = p_{t_2} - p_{t_1}, \quad \text{относительный импульс} = \frac{p_{t_2}}{p_{t_1}}.$$

Темп изменения (Rate of change) цены за период  $[t_1; t_2]$  подсчитывается по формуле

$$\text{ROC}[t_1; t_2] = \frac{p_{t_2} - p_{t_1}}{p_{t_1}}.$$

Рыночный коэффициент роста/снижения цен. Этот коэффициент охватывает все акции, допущенные к обращению, поэтому характеризует тенденцию всего фондового рынка, а не отдельного актива.

Обозначим через  $AS_t$  количество ценных бумаг, цены на которые в текущем торговом периоде увеличились по сравнению с предыдущим торговым периодом, а через  $DS_t$  – количество ценных бумаг, цены на которые в текущем торговом периоде понизились по сравнению с предыдущим торговым периодом. Коэффициент роста/снижения цен (Advance/Decline Ratio) рассчитывается как отношение количества растущих в цене акций к количеству снижающихся в цене акций:  $AD_t = AS_t / DS_t$ . Его значение колеблется вокруг среднего значения единицы. При резком снижении этого индекса или его повышении на фондовом рынке обычно происходит соответственно кризис или резкий рост цен. Если колебания индекса вокруг единицы происходят часто и с высокой амплитудой, это свидетельствует о весьма неблагоприятной рыночной ситуации.

Стохастический индикатор сохранения силы тенденции. Стохастический индикатор усиления/ослабления силы тенденции (Stochastic oscillator fast & slow) показывает относительное положение рассматриваемых акций по сравнению с предшествующим периодом. Он вычисляется как отношение разницы между текущей ценой актива  $p_n$  и самой низкой ценой актива за последние  $(n+1)$  периодов ( $\min_{i \in 0:n} p_i$ ) к разнице между самой высокой ценой актива за последние  $(n+1)$  периодов ( $\max_{i \in 0:n} p_i$ ) к самой низкой цене

( $\min_{i \in 0:n} p_i$ ):

$$\text{Stoch}_{n+1} = \frac{p_n - \min_{i \in 0:n} p_i}{\max_{i \in 0:n} p_i - \min_{i \in 0:n} p_i} = \frac{p_n - \min_{i \in 0:n} p_i}{\max_{i, j \in 0:n} (p_i - p_j)}.$$



Для анализа этого показателя часто выбирают  $n$  равным 5, 10 или 30 дням. Значение индикатора в пределах от 20 до 80 % означает, что текущие цены актива продолжают тенденцию последних  $n$  периодов. Если значение индикатора находится в интервале от 0 до 20 %, то акция недооценена на рынке, и следует ожидать подъёма её курса. Если же значение индикатора 80 – 100 %, это свидетельствует о перегретости рынка и ожидаемом снижении котировок актива.

**Индекс относительной силы.** Пусть как и прежде  $p_0, p_1, \dots, p_n$  – цены актива, зафиксированные по итогам условных торговых сессий в периоды  $0, 1, \dots, n$ , причём  $p_n$  – текущее значение цены. Тогда среднее значение повышения цен закрытия торгов по ценной бумаге за последние  $n$  периодов ( $U_{n+1}$ ) подсчитывается по формуле

$$U_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \max \left\{ 0, \frac{p_i - p_{i-1}}{p_{i-1}} \right\},$$

а среднее значение понижения цен закрытия торгов по ценной бумаге за последние  $n$  периодов ( $D_{n+1}$ ) подсчитывается по формуле

$$D_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \max \left\{ 0, \frac{p_{i-1} - p_i}{p_{i-1}} \right\}.$$

Индекс относительной силы (Relative Strength Index) рассчитывается по формуле

$$RSI_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{D_{n+1}}.$$

Он измеряет внутреннюю силу ценовой динамики. Нормальным считается значение от 30 до 70 %. Чем ближе значение RSI к 100 %, тем более переоцененными считаются акции. Если  $RSI > 80$  %, то ценные бумаги переоценены и их нужно продавать, если же  $RSI < 20$  %, то ценные бумаги недооценены, и их нужно покупать.

Для выяснения относительной привлекательности ценных бумаг вида А по сравнению с ценными бумагами вида В полезно подсчитывать следующие индексы:

$$RSD_{n+1}(A, B) = \frac{D_{n+1}(A)}{D_{n+1}(B)} \text{ и } RSU_{n+1}(A, B) = \frac{U_{n+1}(A)}{U_{n+1}(B)}.$$

Эти коэффициенты имеет смысл подсчитывать, если обе ценные бумаги являются одновременно переоцененными (чем выше  $RSD_{n+1}(A, B)$ , тем А «хуже» В) или недооцененными (чем ниже  $RSU_{n+1}(A, B)$ , тем А «хуже» В).

**Параболический индикатор.** Пусть  $p_0, p_1, \dots$  – цены актива, зафиксированные по итогам условных торговых сессий в периоды  $0, 1, \dots$ . Параболический индикатор (Stop & Reverse) рассчитывается по формуле

$$SAR_t = SAR_{t-1} + AF_{t-1} \cdot (EP_t - SAR_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots,$$

причем

$$AF_t = AF_{t-1} + 0,02 \cdot \delta_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

(фактор ускорения с начальным значением 0,02, изменяющийся с интервалом 0,02 за время  $t$ ),

$$EP_t = \max\{EP_{t-1}, p_t\}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

(максимальное значение цены за  $t$  дней торгов),

$$\delta_t = \begin{cases} 1, & \text{если } EP_t = p_t, \\ 0, & \text{если } EP_t = EP_{t-1}, \end{cases}$$

(этот символ указывает, повысилась ли цена в день торгов  $t$ ),

$$AF_0 = 0,02, \quad EP_0 = p_0, \quad SAR_0 = p_0.$$

Параболический индикатор позволяет вырабатывать сигналы к покупке или продаже ценных бумаг. Сигналы вырабатываются в тех случаях, когда цена падает ниже, чем последнее значение индикатора (при повышательном тренде) или поднимается выше, чем последнее значение индикатора (при понижательном тренде). После получения сигнала снова берём текущий момент  $t$ , принимаем его за начало отсчёта (нулевой момент), полагаем  $AF_0 = 0,02$ ,  $EP_0 = p_0$ ,  $SAR_0 = p_0$  и начинаем новый цикл отслеживания. Из приведенных в табл. 3.3 данных видно, что в момент времени  $t = 7$  цена падает ниже уровня последнего значения индикатора SAR:  $10,7 < 10,88041$ , и таким образом генерируется сигнал к продаже акций, после чего цикл начинается заново.

Таблица 3.3

Параболический индикатор

Период $t$	Цена $p_t$	Максимальная цена $EP_t$	Новый максимум (да, нет)	Фактор ускорения $\Delta f_t$	Индикатор SAR
0	10,00	10,00	Да (начало)	0,02	10,00
1	10,50	10,50	Да	0,04	10,01000
2	11,00	11,00	Да	0,06	10,04960
3	13,00	13,00	Да	0,08	10,22662
4	12,50	13,00	Нет	0,08	10,44849
5	12,80	13,00	Нет	0,08	10,65261
6	13,50	13,50	Да	0,10	10,88041
Поскольку $10,88041 > 10,7$ , то сигнал – продать, начало нового цикла					
7	10,7	0,00	Да (начало)	0,02	10,7
$t = 0$					

### 3.7. Числа Фибоначчи

Ряд Фибоначчи генерируется следующим образом:

$$\Phi_0 = \Phi_1 = 1, \quad \Phi_n = \Phi_{n-2} + \Phi_{n-1},$$

то есть последующее значение всегда вычисляется как сумма двух предыдущих значений. Получаем последовательность Фибоначчи

$$\{\Phi\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 231, \dots\},$$

которая проявляется в биологии, медицине, литературе, политике и экономике. Между числами Фибоначчи, начиная с 55, выполняются приближённые соотношения:

$$\frac{\Phi_n}{\Phi_{n+1}} \approx 0,618, \quad \frac{\Phi_n}{\Phi_{n-1}} \approx \frac{1}{0,618} = 1 + 0,618,$$

$$\frac{\Phi_n}{\Phi_{n+2}} = \frac{\Phi_n}{\Phi_{n+1}} \cdot \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_{n+2}} \approx 0,618^2 \approx 0,382.$$

Эти значения называют «золотым сечением» отрезка  $[0;1]$ . Значение  $x = 0,618$  является корнем уравнения  $\frac{1-x}{x} = x$  соответственно  $1-x = 0,382$ . К указанным значениям добавляют концы, середину единичного отрезка и число  $0,618 - 0,382 = 0,236$ . Полученные пропорции  $0 : 0,236 : 0,382 : 0,5 : 0,618 : 1$  служат основой для деления временных и ценовых интервалов при анализе фондового рынка.

#### Глава 4. ТРЕНДОВЫЕ ПОЛИНОМЫ И ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

##### 4.1. Постановка задачи приближения динамики экономических показателей полиномом. Понятие «экономического коридора».

##### Постановка задачи наилучшего приближения «экономического коридора» полиномом.

##### Экономическая целесообразность решения поставленных задач

Рассмотрим аппарат, полезный финансовому аналитику, который интересуется динамикой развития того или иного экономического процесса по ключевым экономическим показателям. Он позволяет наилучшим образом представить существующие тенденции в простой полиномиальной (главным образом, линейной) форме.

Целью ознакомления читателя с этим аппаратом является не получение сигнала к совершению того или иного экономического действия (скажем, сигнала к покупке ценных бумаг или сигнала к повышению объёма выпуска продукции), а получение одного из средств, весьма удобных при всестороннем комплексном анализе различных аспектов интересующей проблемы.

Пусть  $t_0$  – момент начала наблюдения за некоторым экономическим показателем (например, момент начала торгов финансовым активом), а  $t_1, \dots, t_N$  – моменты времени, когда фиксировалось значение этого показателя  $y_k = y(t_k)$  (например, средняя цена актива за  $k$ -й период торгов),

$k \in [1 : N]$ , а  $y_0$  – начальное значение показателя (например, цена открытия торгов в начале первого периода). Введём сетку

$$T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}.$$

Требуется решить задачу о наилучшем приближении динамики экономического показателя алгебраическим полиномом фиксированной степени, которая сводится к известной задаче П.Л. Чебышёва:

$$\varphi(A) := \max_{k \in [0 : N]} |y_k - p_n(A, t_k)| \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \quad (4.1)$$

где  $p_n(A, t) = a_0 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n$  – алгебраический полином степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Решение такой задачи может быть весьма полезно в фундаментальном анализе корпораций и в техническом анализе.

В техническом анализе задача (4.1) решает вопрос наилучшего приближения ценового чарта алгебраическим полиномом фиксированной степени. Этот аппарат может использоваться при построении трендовых линий динамики цены некоторого актива, особенно в тех случаях, когда цена многократно колебалась и уловить действующий тренд достаточно сложно.

На финансовых рынках (на фондовом, валютном и рынке ссудных капиталов) в основном имеет смысл применять линейные полиномы. В некоторых случаях (например, когда сформированы круглые вершины и днища) могут использоваться квадратичные полиномы. Для аналитика рынка построение наилучшего приближения действующих тенденций может быть полезно при сопоставлении скорости развития того или иного тренда по различным компаниям либо по одной компании за различные периоды.

Кроме ценовых показателей фондового рынка может рассматриваться динамика объёмных показателей.

Для фундаментального аналитика полезно знать тенденции развития той или иной страны, отрасли или компании по ключевым экономическим показателям, поскольку это может помочь ему в выборе того или иного направления для инвестирования. Скажем, за предыдущий год объём продаж предприятия А приближённо зависел от времени по закону  $1 + 2t$ , а объём продаж предприятия В – по закону  $1 + 3t$ . Тогда при наличии альтернативы выбор должен быть сделан в пользу второго предприятия, которое наращивало объём продаж в 1,5 раз быстрее первого.

Полезно иметь такой аппарат и при сопоставлении реальной стоимости компании с рыночной ценой её акций.

Дальнейшим обобщением поставленной задачи является задача о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения  $\Phi(\cdot)$ , образами которого в каждый фиксированный момент времени  $t_k$  являются отрезки  $\Phi(t_k) = [y_{1,k} ; y_{2,k}]$ , алгебраическим полиномом:

$$\rho(A) := \max_{k \in \{0; N\}} \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k); p_n(A, t_k) - y_{1,k}\} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (4.2)$$

В последней задаче  $y_{1,k}$  означает минимальное, а  $y_{2,k}$  – максимальное значение экономического показателя за период  $[t_{k-1}; t_k]$ , а  $y_{1,0}$  и  $y_{2,0}$  – начальные значения. Если предыстория процесса неизвестна, просто полагаем  $y_{1,0} = y_{2,0}$ . Например, полагаем  $t_0$  – момент начала наблюдения за ценой некоторого актива,  $y_{1,0} = y_{2,0}$  – его начальная цена,  $y_{1,k}$  и  $y_{2,k}$  – минимальная и максимальная цена актива по итогам  $k$ -го дня торгов соответственно. Требуется проанализировать характер тенденции за период. В такой постановке применение аппарата приближений наиболее удобно для отслеживания тенденции цен торгов по гистограмме или чарту «японские свечи» (рис. 4.1).

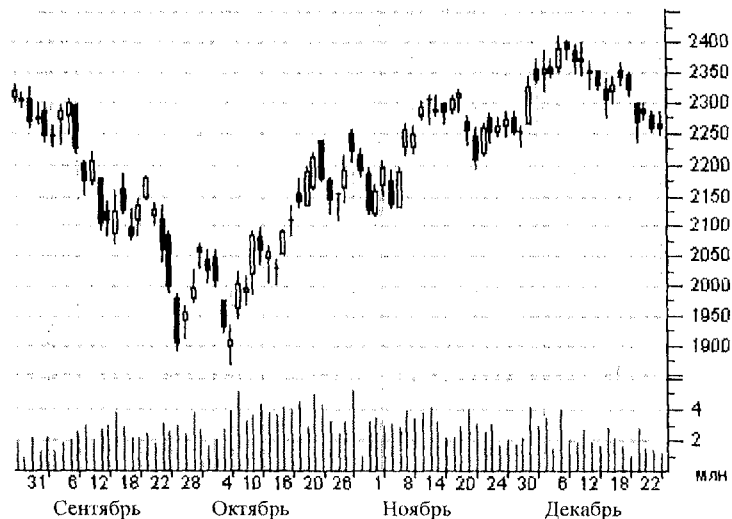


Рис. 4.1. Недельный чарт котировок Лукойл в 2006 г. в руб.

«Экономическим коридором» назовём множество отрезков  $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ ,  $k \in 0; N$ .

Если рассматривать дискретное многозначное отображение  $\Phi(\cdot): T \rightarrow 2^R$ , образом которого в каждом узле дискретной сетки  $T$  является фиксированный отрезок  $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ , то задача (4.2) ставит вопрос об отыскании полинома наилучшего приближения этого многозначного отображения алгебраическим полиномом, а «экономический коридор» является графиком такого многозначного отображения.

Таким образом, в задаче (4.2) ставится вопрос об отыскании трендовой линии движения «экономического коридора» в виде алгебраического полинома заданной степени.

При решении последней задачи используется аппарат, предложенный П.Л. Чебышёвым для решения задачи (4.1). Рассмотрим его.

#### 4.2. Разделённые разности и алгебраическая интерполяция. Формула Ньютона

Пусть  $y_k = y(t_k)$  — значение некоторой функции  $y(\cdot)$  в узлах сетки  $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$ . Определим индуктивно разделённые разности.

Разделёнными разностями I порядка называются величины

$$y[t_k, t_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad k \in [0: N-1].$$

Разделёнными разностями II порядка называются величины

$$y[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}] = \frac{y[t_{k+1}, t_{k+2}] - y[t_k, t_{k+1}]}{t_{k+2} - t_k}, \quad k \in [0: N-2].$$

Пусть  $s \leq N$ . Разделёнными разностями  $s$ -го порядка называются величины

$$y[t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+s}] = \frac{y[t_{k+1}, \dots, t_{k+s}] - y[t_k, \dots, t_{k+s-1}]}{t_{k+s} - t_k}, \quad k \in [0: N-s].$$

Рассмотрим сначала случай  $N = n$ , то есть когда сетка  $T$  содержит  $(n+1)$  узлов. Интерполяционным полиномом для функции  $y(\cdot)$  на сетке  $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$  называется алгебраический полином степени  $n$  вида  $p_n(A, t) = a_0 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n$ , удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$p_n(A, t_k) = y_k, \quad k \in [0: n].$$

Построение интерполяционного полинома называется *алгебраической интерполяцией*.

Согласно известному факту из курса алгебры, интерполяционный полином существует и единственен.

К примеру, по двум точкам однозначно строится прямая линия, по трём — квадратическая функция.

Для построения интерполяционного полинома можно воспользоваться *формулой Ньютона*:

$$p_n(A, t) = y_0 + \sum_{k=1}^n \{y[t_0, t_1, \dots, t_k] \cdot (t - t_0) \cdot (t - t_1) \cdot \dots \cdot (t - t_{k-1})\}. \quad (4.3)$$

**Пример 4.1.** Рассмотрим три дня торгов  $T = \{0 < 1 < 2\}$ , в которые жёстко установлена цена актива (например, на валютном рынке)  $y_0 = 3$ ,  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 2$  д.е. соответственно. Пусть требуется построить алгебраический

ческий полином степени не выше 2, значение которого в узлах сетки  $T$  точно отражает зафиксированные цены актива. Пользуясь формулой (4.3) получаем полином

$$p_2(A, t) = 3 + 2,5 \cdot t - 1,5 \cdot t^2, \quad A = (3; 2,5; -1,5).$$

Заметим, что самым удобным для описания ценовой тенденции на фондовом рынке является построение линейного полинома. Но при применении алгебраической интерполяции с ростом числа узлов сетки  $T$  степень полинома должна увеличиваться. Тогда нужно будет решать задачу (4.1) при условии, что  $n < N$ .

### 4.3. Полином наилучшего чебышевского приближения

Известно, что задача (4.1) всегда имеет решение.

Положим  $\varphi^* := \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \varphi(A)$ . Решение задачи (4.1) существенно зависит от соотношения между  $n$  и  $N$ .

При  $n = N$  полином наилучшего приближения задачи (4.1) является интерполяционным алгебраическим полиномом для сетки  $T$ , и его можно построить, например, по формуле Ньютона (4.3). Ясно, что при этом  $\varphi^* = 0$ .

Если  $N < n$ , то решением задачи (4.1) будет интерполяционный полином для сетки  $\tilde{T}$ , которая получается из сетки  $T$  путём добавления новых различных между собой  $(n - N)$  узлов (значения функции  $y_k$  в новых узлах могут быть произвольными). Ясно, что таких решений бесконечно много и при этом  $\varphi^* = 0$ .

Пусть  $N \geq n + 1$ . Полиномом наилучшего чебышевского приближения в задаче (4.1) называется алгебраический многочлен степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A^* = (a_0^*, \dots, a_n^*)$ , для которого выполняется равенство  $\varphi^* := \varphi(A^*)$ . Ясно, что  $A^*$  является решением задачи (4.1).

Первым нетривиальным случаем ( $\varphi^* \neq 0$ ) является  $N = n + 1$ . Чебышевской интерполяцией называется процедура построения полинома наилучшего чебышевского приближения при  $N = n + 1$ .

Этот случай считается базовым, поскольку алгоритм решения задачи (4.1) при  $N = n + 1$  (чебышевская интерполяция) будет применяться многократно и при решении задачи для более высоких значений величины  $N$ .

### 4.4. Чебышевская интерполяция

Перепишем задачу (4.1) для  $N = n + 1$ ,  $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}\}$ :

$$\varphi(A) := \max_{k \in \{0, n+1\}} |y_k - p_n(A, t_k)| \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (4.4)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Необходимые и достаточные условия решения задачи (4.4). Полином наилучшего приближения в задаче (4.4) существует и единственен. Для того чтобы полином  $p_n(A^*, t)$  был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $h$  выполнялись соотношения:

$$p_n(A, t_k) = y_k + (-1)^{k+1} \cdot h, \quad k \in [0 : n+1]. \quad (4.5)$$

При этом  $\varphi^* = |h|$ .

Докажем достаточность.

Пусть для полинома  $p_n(A^*, t)$  при некотором  $h$  выполняются соотношения (4.5). Покажем, что  $p_n(A^*, t)$  – полином наилучшего приближения. Из (4.5) вытекает, что

$$|h| = \max_{k \in [0 : n+1]} |y_k - p_n(A^*, t_k)| = \varphi(A^*), \quad \forall k \in [0 : n+1].$$

Предположим, что  $p_n(A^*, t)$  не является полиномом наилучшего приближения задачи (4.4). В таком случае  $\min_{A \in R^{n+1}} \varphi(A) = \varphi^* < \varphi(A^*) = |h|$ , откуда вытекает, что найдётся полином  $p_n(A^{**}, t)$  такой, что

$$\varphi(A^{**}) = \max_{k \in [0 : n+1]} |y_k - p_n(A^{**}, t_k)| < \max_{k \in [0 : n+1]} |y_k - p_n(A^*, t_k)| = \varphi(A^*) = |h|, \quad (4.6)$$

причём

$$A^{**} \neq A^*. \quad (4.7)$$

Рассмотрим алгебраический полином степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A^{***} = A^{**} - A^*$ . Ясно, что  $p_n(A^{***}, t) = p_n(A^{**}, t) - p_n(A^*, t)$ . Подсчитаем значение полинома  $p_n(A^{***}, t)$  в узлах сетки  $T$ :

$$\begin{aligned} p_n(A^{***}, t_k) &= p_n(A^{**}, t_k) - p_n(A^*, t_k) = \\ &= [p_n(A^{**}, t_k) - y_k] + [y_k - p_n(A^*, t_k)] = \\ &\stackrel{(4.5)}{=} (-1)^k \cdot h - [y_k - p_n(A^*, t_k)]. \end{aligned}$$

В силу (4.6),  $|y_k - p_n(A^*, t_k)| < |h|$ , следовательно, знак величины  $p_n(A^{***}, t_k)$  совпадает со знаком  $(-1)^k \cdot h$ . Учитывая, что узлы сетки  $T$  упорядочены по возрастанию:  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ , получим, что

$$\begin{aligned} h \cdot p_n(A^{***}, t_0) &> 0, \\ h \cdot p_n(A^{***}, t_1) &< 0, \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^n \cdot h \cdot p_n(A^{***}, t_n) &> 0. \end{aligned}$$



По теореме об обращении в ноль непрерывной на отрезке функции получаем, что на каждом интервале  $(t_k; t_{k+1})$ ,  $k \in [0:n]$  алгебраический многочлен  $p_n(A^{***}, t)$  имеет корень, а всего таких корней  $(n+1)$ . По основной теореме алгебры наличие у многочлена степени  $n$  более чем  $n$  различных корней возможно лишь в случае, когда  $p_n(A^{***}, t) \equiv 0$ , что противоречит (4.7).

Из оптимальности вектора  $A^*$  и равенств (4.5) вытекает, что  $\varphi^* = h$ .

Приведём формулу для построения полинома наилучшего чебышевского приближения. Используя введённое понятие разделённых разностей запишем величину  $h$  в виде

$$h = \frac{y[t_0, t_1, \dots, t_{n+1}]}{\chi[t_0, t_1, \dots, t_{n+1}]}, \quad (4.8)$$

где  $\chi_k = \chi(t_k) = (-1)^k$ ,  $k \in [0:n+1]$ .

Осуществим алгебраическую интерполяцию в узлах  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$  дискретной сетки  $T$ . Построим интерполяционный полином степени  $(n+1)$   $p_{n+1}(A^{**}, t) = a_0^{**} + a_1^{**} \cdot t + \dots + a_n^{**} \cdot t^n + a_{n+1}^{**} \cdot t^{n+1}$  с вектором коэффициентов  $A^{**} = (a_0^{**}, \dots, a_n^{**}, a_{n+1}^{**})$ , определив:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(A^{**}, t_0) &= y_0 - h, \\ p_{n+1}(A^{**}, t_1) &= y_1 - h \cdot \chi_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \dots \dots \\ p_{n+1}(A^{**}, t_n) &= y_n - h \cdot \chi_n, \\ p_{n+1}(A^{**}, t_{n+1}) &= y_{n+1} - h \cdot \chi_{n+1}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Ньютона (4.3):

$$\begin{aligned} p_{n+1}(A^{**}, t_{n+1}) &= y_0 - h + \\ &+ \sum_{j=1}^{n+1} \{y[t_0, \dots, t_j] - h \cdot \chi[t_0, \dots, t_j]\} (t - t_0) \cdot \dots \cdot (t - t_{j-1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Преобразуем равенство (4.9):

$$\begin{aligned} p_{n+1}(A^{**}, t) &= y_0 - h + \sum_{j=1}^n \{y[t_0, \dots, t_j] - h \cdot \chi[t_0, \dots, t_j]\} (t - t_0) \cdot \dots \cdot (t - t_{j-1}) + \\ &+ \underbrace{\{y[t_0, \dots, t_{n+1}] - h \cdot \chi[t_0, \dots, t_{n+1}]\}}_{\substack{\\ // (4.8) \\ 0}} (t - t_0) \cdot \dots \cdot (t - t_n) = \\ &= y_0 - h + \sum_{j=1}^n \{y[t_0, \dots, t_j] - h \cdot \chi[t_0, \dots, t_j]\} (t - t_0) \cdot \dots \cdot (t - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, в (4.9) при переменной  $t^{n+1}$  стоит коэффициент 0. Значит, полином  $p_{n+1}(A^{**}, t)$  на самом деле имеет степень не выше  $n$ ,

причём он совпадает с полиномом  $p_n(A^*, t)$  во всех узлах сетки  $T$ . Значит, формула (4.9) позволяет построить именно полином наилучшего приближения задачи (4.5). Окончательно получаем формулу для чебышевского интерполяционного полинома:

$$p_n(A^*, t) = y_0 - h + \sum_{j=1}^n \{y[t_0, \dots, t_j] - h \cdot \chi[t_0, \dots, t_j]\} (t-t_0) \dots (t-t_{j-1}). \quad (4.10)$$

Явление, отражённое формулой (4.5), означает, что дискретная функция отклоняется от полинома наилучшего приближения при переходе от одного узла дискретной сетки к другому, то в одну, то в другую сторону на одинаковую величину. Такое явление называется чебышевским альтернансом.

Алгоритм построения полинома наилучшего чебышевского приближения для задачи (4.4) (чебышевская интерполяция) состоит в последовательности следующих действий.

1. Построить таблицы разделённых разностей до  $(n+1)$  включительно для функций  $\chi$  и  $y$ .
2. Найти значение величины  $h$  по формуле (4.8).
3. Построить полином наилучшего чебышевского приближения по формуле (4.10).

В качестве проверки можно убедиться в выполнении равенств (4.5).

Пример 4.2. Пусть  $T = \{0 < 1 < 2\}$ ,  $n = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 0$ . Построим решение задачи (4.4) для этих условий. Вначале строим таблицы разделённых разностей для функций  $\chi$  и  $y$ .

$t_j$	$\chi_j$	$\chi[t_j, t_{j+1}]$	$\chi[t_0, t_1, t_2]$	,	$t_j$	$y_j$	$y[t_j, t_{j+1}]$	$y[t_0, t_1, t_2]$
0	1				0	1		
1	-1	-2	2		1	1	0	$-\frac{1}{2}$
2	1	2			2	0	-1	$-\frac{1}{2}$

По формуле (4.8) находим  $h = -\frac{1}{4}$ . По теореме 4.1 имеем  $\varphi^* = \frac{1}{4}$ . Полином наилучшего чебышевского приближения строим по формуле (4.10):  $p_1^*(A^*, t) = -\frac{1}{2} \cdot t + \frac{5}{4}$ . Вектор коэффициентов этого полинома  $A^* = \left(\frac{5}{4} \quad -\frac{1}{2}\right)$  является решением задачи (4.4).

Явление чебышевского альтернанса из этого примера геометрически проиллюстрировано на рис. 4.2.

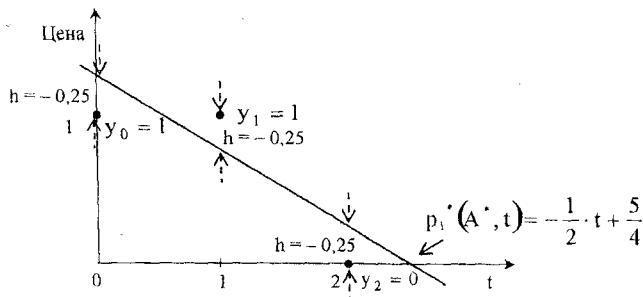


Рис. 4.2. Чебышевский альтернанс

#### 4.5. Постановка общей дискретной задачи. Алгоритм Вале – Пуссена

Пусть теперь требуется решить задачу (4.1) при любом  $N \geq n + 1$ .

Базисом  $\sigma$  назовём  $(n + 2)$ -точечную подсистему узлов сетки  $T$  вида

$$\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T. \quad (4.11)$$

Множество всех базисов  $\sigma$  вида (4.11) обозначим через  $\Theta$ . Это множество конечно и содержит  $C_{N+1}^{n+2}$  элементов.

На каждом базисе  $\sigma$  можно осуществить чебышевскую интерполяцию, то есть построить алгебраический полином  $p_n(A(\sigma), t)$ , являющийся решением следующей базисной  $\sigma$ -подзадачи задачи (4.1):

$$\varphi(A, \sigma) := \max_{k \in [0:n+1]} |y_{j_k} - p_n(A, t_{j_k})| \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (4.12)$$

Задачу (4.12) назовём  $\sigma$ -подзадачей задачи (4.1). Обозначим через  $\varphi^*(\sigma) := \min_{A \in R^{n+1}} \varphi(A, \sigma)$ . Тогда  $\varphi^*(\sigma) = \varphi(A(\sigma), \sigma)$ . По теореме 4.1 для вектора  $A(\sigma)$  выполняются следующие соотношения:

$$p_n(A(\sigma), t_{j_k}) = y_{j_k} + (-1)^{k+1} \cdot h(\sigma), \quad k \in [0:n+1], \quad (4.13)$$

где

$$h(\sigma) = \frac{y[t_{j_0}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{n+1}}]}{\bar{\chi}[t_{j_0}, t_{j_1}, \dots, t_{j_{n+1}}]}, \quad |h(\sigma)| = \varphi^*(\sigma), \quad (4.14)$$

причём  $\bar{\chi}(t_{j_k}) = (-1)^k$ ,  $k \in [0:n+1]$ .

Поскольку  $\sigma \subset T$ , из (4.1) и (4.13) вытекает неравенство

$$\varphi(A) \geq \varphi(A, \sigma), \quad \forall A \in R^{n+1}, \sigma \in \Theta. \quad (4.15)$$

ЛЕММА 4.1. Если для некоторого базиса  $\sigma^*$  вида

$$\sigma^* = \{t_{j_0}^* < t_{j_1}^* < \dots < t_{j_{n+1}}^*\} \subset T \quad (4.16)$$

оказалось, что

$$\varphi(A(\sigma^*)) = \varphi^*(\sigma^*), \quad (4.17)$$

то  $A(\sigma^*)$  будет решением общей задачи (4.1).

Доказательство. Из принятых обозначений для задач (4.1) и (4.12) вытекает двойное неравенство:  $\varphi(A) \geq \varphi(A, \sigma^*) \geq \varphi^*(\sigma^*) = \varphi(A(\sigma^*)) \forall A \in R^{n+1}$ . Запишем левую и правую части этого неравенства:  $\varphi(A) \geq \varphi(A(\sigma^*)) \forall A \in R^{n+1}$ . Последнее означает, что вектор  $A(\sigma^*)$  будет решением задачи (4.1). Лемма доказана.

#### 4.6. Преобразование базиса Scheb по алгоритму Вале – Пуссена

ЛЕММА 4.2. Пусть для некоторого базиса  $\sigma \in \Theta$  вида (4.11) выполняется неравенство

$$\varphi(A(\sigma)) > \varphi^*(\sigma). \quad (4.18)$$

Тогда существует преобразование базиса, которое приводит к новому базису  $\tilde{\sigma} \in \Theta$  вида

$$\tilde{\sigma} = \{t_{\tilde{j}_0} < t_{\tilde{j}_1} < \dots < t_{\tilde{j}_{n+1}}\} \subset T, \quad (4.19)$$

удовлетворяющего свойству:

$$\varphi^*(\tilde{\sigma}) > \varphi^*(\sigma). \quad (4.20)$$

Приведём преобразование Scheb, которое доказывает лемму.

Обозначим через  $\varepsilon_k := y_k - p_n(A(\sigma), t_k)$ ,  $k \in [0: N]$ . Ввиду (4.1), имеем

$$\varphi(A(\sigma)) = \max_{k \in [0: N]} |\varepsilon_k|. \quad (4.21)$$

Из (4.13) и (4.14) вытекает, что

$$|\varepsilon_{j_k}| = \varphi^*(\sigma), \quad k \in [0: n+1]. \quad (4.22)$$

Пусть, далее,  $t_s$  – тот узел сетки  $T$ , для которого  $|\varepsilon_s| = \max_{k \in [0: N]} |\varepsilon_k|$ . Учитывая (4.18), (4.21) и (4.22), получаем  $|\varepsilon_s| > |\varepsilon_{j_k}|$ , поэтому

$$t_s \notin \sigma. \quad (4.23)$$

Существует 3 варианта расположения узла  $t_s$  относительно узлов базиса  $\sigma$ . Первый вариант – узел  $t_s$  расположен «внутри базисного отрезка»:



Рис. 4.3. «Внутри базисного отрезка»

Второй вариант – узел  $t_s$  расположен «слева от узлов базиса»:  
 $t_s < t_{j_0}$ .

Третий вариант – узел  $t_s$  расположен «справа от узлов базиса»:  
 $t_s > t_{j_{n+1}}$ .

В каждом из этих трёх вариантов преобразование базиса Scheb определяется по-своему.

Рассмотрим первый вариант. Ясно, что  $|\varepsilon_{j_q}| = |\varepsilon_{j_{q+1}}| = \varphi^*(\sigma)$ , при этом  $\varepsilon_{j_{q+1}} = -\varepsilon_{j_q}$ . Тогда либо величина  $\varepsilon_s$  имеет тот же знак, что и величина  $\varepsilon_{j_q}$ , либо она имеет тот же знак, что и величина  $\varepsilon_{j_{q+1}}$ .

Если величина  $\varepsilon_s$  имеет тот же знак, что и величина  $\varepsilon_{j_q}$ , то полагаем:

$$t_{\tilde{j}_k} := t_{j_k}, k \in [0: n+1], k \neq q, t_{\tilde{j}_q} := t_s$$

(из базиса  $\sigma$  исключается точка  $t_{j_q}$ , а в базис  $\tilde{\sigma}$  включается точка  $t_s$ ).

Если величина  $\varepsilon_s$  имеет тот же знак, что и величина  $\varepsilon_{j_{q+1}}$ , то полагаем

$$t_{\tilde{j}_k} := t_{j_k}, k \in [0: n+1], k \neq q+1, t_{\tilde{j}_{q+1}} := t_s$$

(из базиса  $\sigma$  исключается точка  $t_{j_q}$ , а в базис  $\tilde{\sigma}$  включается точка  $t_s$ ).

Рассмотрим второй вариант. Если величина  $\varepsilon_s$  имеет тот же знак, что и величина  $\varepsilon_{j_0}$ , то полагаем

$$t_{\tilde{j}_0} := t_s, t_{\tilde{j}_k} := t_{j_k}, k \in [1: n+1]$$

(из базиса  $\sigma$  исключается узел  $t_{j_0}$ , а в базис  $\tilde{\sigma}$  включается узел  $t_s$ ).

Если знаки величин  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_{j_0}$  различны между собой, то узел  $t_s$  добавляется в новый базис  $\tilde{\sigma}$  взамен узла  $t_{j_{n+1}}$ , который из базиса  $\sigma$  исключается:

$$t_{\tilde{j}_k} := t_{j_{k-1}}, k \in [1: n+1], t_{\tilde{j}_0} := t_s.$$

Рассмотрим, наконец, третий вариант расположения узла  $t_s$  относительно узлов базиса  $\sigma$ . Если знаки величин  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_{j_{n+1}}$  совпадают, то из базиса  $\sigma$  исключается узел  $t_{j_{n+1}}$ , а в базис  $\tilde{\sigma}$  включается узел  $t_s$ :

$$t_{\tilde{j}_k} := t_{j_k}, k \in [0: n], t_{\tilde{j}_{n+1}} := t_s.$$

Если знаки величин  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_{j_{n+1}}$  различны между собой, то узел  $t_s$  добавляется в новый базис  $\tilde{\sigma}$  взамен узла  $t_{j_0}$ , который из базиса  $\sigma$  исключается:

$$t_{\tilde{j}_k} := t_{j_{k+1}}, k \in [0: n], t_{\tilde{j}_{n+1}} := t_s.$$

Построенный базис  $\tilde{\sigma}$  обладает следующими свойствами:

$$\bullet \quad \varepsilon_{\tilde{k}} = -\varepsilon_{\tilde{k}+1}, \quad k \in [0; n], \quad \text{где } \varepsilon_{\tilde{k}} := y_{\tilde{k}} - p_n(A(\sigma), t_{\tilde{k}}), \quad (4.24)$$

то есть знаки уклонений значений дискретной функции  $y_{\tilde{k}}$  от значений полинома  $p_n(A(\sigma), t_{\tilde{k}})$  меняются последовательно при переходе от одного узла базиса  $\tilde{\sigma}$  к другому, как это было и для базиса  $\sigma$ ;

$$\bullet \quad \varphi(A(\sigma)) = |\varepsilon_s| = |y_s - p_n(A(\sigma), t_s)| \stackrel{(4.18)}{>} \varphi^*(\sigma), \quad (4.25)$$

(вектор  $A(\sigma)$  не является решением базисной  $\tilde{\sigma}$ -подзадачи задачи (4.1));

$$\bullet \quad |\varepsilon_{\tilde{k}}| = |y_{\tilde{k}} - p_n(A(\sigma), t_{\tilde{k}})| = \varphi^*(\sigma), \quad k \in [0; n+1], \quad \tilde{k} \neq s. \quad (4.26)$$

Положим

$$\tilde{\varphi} := \max_{\sigma \in \Theta} \varphi^*(\sigma) = \varphi^*(\sigma^*). \quad (4.27)$$

Базис  $\sigma^*$ , для которого выполняется (4.27), называется *экстремальным базисом*.

Поскольку множество базисов  $\Theta$  конечно, то следуя описанному преобразованию Scheb, ввиду (4.20), на очередном шаге получим экстремальный базис. Вообще говоря, экстремальных базисов может быть много. Отыскав экстремальный базис в задаче (4.1), получим решение задачи.

**ТЕОРЕМА 4.2.** *В общей дискретной задаче (4.1) полином наилучшего приближения существует и единственен. Для того чтобы полином  $p_n(A^*, t)$  был полиномом наилучшего приближения для этой задачи, необходимо и достаточно, чтобы он осуществлял чебышевскую интерполяцию на некотором экстремальном базисе  $\sigma^*$ , то есть чтобы  $A^* = A(\sigma^*)$ . Наконец,  $\varphi^* = \tilde{\varphi}$ , так что*

$$\min_{A \in R^{n+1}} \max_{k \in [0; N]} |y_k - p_n(A, t_k)| = \max_{\sigma \in \Theta} \varphi^*(\sigma).$$

**Пример 4.3.** Рассмотрим 6 дней торгов  $T = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5\}$ , за которые зафиксированы следующие цены активов:  $y_0 = 8$ ,  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 6$ ,  $y_3 = 2$ ,  $y_4 = 16$ ,  $y_5 = 4$ . Нужно изобразить линейный тренд изменения цены.

**Решение.** Рассмотрим сначала базис  $\sigma = \{0 < 1 < 2\}$ , на котором решением задачи (4.12) является полином первой степени  $p_1((6,5 \ -1), t) = 6,5 - t$ . Этот полином не является решением общей дискретной задачи (4.1) на сетке  $T$ . Следуя последовательно процедуре Scheb, описанной выше, получаем каждый раз новые базисы:

$$\{0 < 1 < 2\} \xrightarrow{\text{Scheb}} \{0 < 1 < 4\} \xrightarrow{\text{Scheb}} \{1 < 4 < 5\} \xrightarrow{\text{Scheb}} \{3 < 4 < 5\}$$

и соответствующие решения базисных подзадач (4.12):

$$(6,5 \ -1) \xrightarrow{\text{Scheb}} (5 \ 2) \xrightarrow{\text{Scheb}} (10 \ 0) \xrightarrow{\text{Scheb}} (5,5 \ 1).$$

Более подробно рассмотрим процесс получения решения на базисе  $\sigma = \{3 < 4 < 5\}$  ( $t_{j_0} = 3, t_{j_1} = 4, t_{j_2} = 5$ ):

$t_{j_k}$	$\chi_k$	$\chi[t_{j_k}, t_{j_{k+1}}]$	$\chi[t_3, t_4, t_5]$	$t_{j_n}$	$y_{j_n}$	$y[t_{j_n}, t_{j_{n+1}}]$	$y[t_3, t_4, t_5]$
0	1			0	2		
1	-1	-2	2	1	16	14	
2	1	2		2	4	-12	-13

По формуле (4.14) вычисляем  $h(\sigma) = -\frac{13}{2}$ . Пользуясь формулой (4.10) для

базиса  $\sigma$ , строим решение базисной подзадачи (4.12):

$$p_1((a_0 \ a_1), t) = 2 + 6,5 + (14 + 6,5 \cdot (-2)) \cdot (t - 3) = 5,5 + t.$$

Итак,  $p_1((5,5 \ 1), t) = 5,5 + t$  – решение базисной подзадачи (4.12),

$$\varphi^*(\sigma) = |h(\sigma)| = 6,5.$$

Поскольку  $\varphi(5,5 \ 1) = \max_{k \in \{0,5\}} y_k - p_1((5,5 \ 1), t_k) = 6,5 = \varphi^*(\sigma)$ , то по лемме 4.1 ба-

зис  $\sigma^*$  является экстремальным, а полином  $p_1((5,5 \ 1), t) = 5,5 + t$  является решением общей задачи (4.1), причём  $\varphi^* = 6,5$ .

Если руководствоваться простым перебором, нужно было решить  $C_6^3 = 20$  базисных подзадач, а следуя преобразованию Scheb, понадобилось решить только 4.

Поскольку самым распространённым инструментом представления экономической динамики являются линейные полиномы, приведём для этого случая формулу для интерполяционного чебышевского полинома, прямо вытекающую из (4.10):

$$p_1(a_0^*, a_1^*, t) = \frac{h \cdot (t_1 + t_0) + y_0 \cdot t_1 - y_1 \cdot t_0}{t_1 - t_0} + \frac{y_1 - y_0 - 2 \cdot h}{t_1 - t_0} \cdot t, \quad (4.28)$$

где  $A^* = (a_0^*, a_1^*) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a_0^* = \frac{h \cdot (t_1 + t_0) + y_0 \cdot t_1 - y_1 \cdot t_0}{t_1 - t_0}$ ,  $a_1^* = \frac{y_1 - y_0 - 2 \cdot h}{t_1 - t_0}$ ,

$$h = \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \frac{y_2}{2} \cdot \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_0}. \quad (4.29)$$

**Пример 4.4.** Пусть  $T = \{1 < 2 < 3 < 4 < 8 < 9 < 10\}$  – дни ноября месяца 2006 г., за которые зафиксированы следующие курсы некоторых иностранных валют к рублю (таблица).

Рассматривая в качестве  $y_k$  соответствующие курсы валют, строим тенденции их изменения в виде полинома первой степени. Результаты такого построения отражены в предпоследнем столбце таблицы. В последнем столбце указан экстремальный базис, то есть те дни торгов, в которые отмечено явление чебышевского альтернанса.

Официальные курсы валют ЦБ РФ с 1 по 11 ноября 2006 г.

Курсы валют	1	2	3	4	8	9	10	11	Линейный тренд	Экстр. базис
Доллар США	26,78	26,73	26,73	26,70	26,72	26,70	26,70	26,62	$p = -0,0114286t + 26,78$	{4,10, 11}
Евро	33,99	33,99	34,08	34,11	34,09	34,10	34,11	34,24	$p = 0,0185714t + 33,98$	{4,10, 11}
Яп. иена	22,78	22,85	22,80	22,80	22,69	22,69	22,65	22,64	$p = -0,014444t + 22,836667$	{1,2, 10}
Кит. юань	33,99	33,94	33,93	33,92	33,91	33,94	33,93	33,85	$p = -0,01t + 33,99$	{4,9, 11}
Укр. гривна	52,84	52,76	52,71	52,64	52,67	52,62	52,61	52,48	$p = -0,0242857t + 52,8$	{1,4, 8}
Казах. тенге	20,95	20,91	20,90	20,87	20,91	20,89	20,88	20,83	$p = -0,005714t + 20,924286$	{1,4, 8}

Скорость изменения курса отражает коэффициент полинома при  $t$  (геометрически это тангенс угла наклона линии полинома к положительному направлению оси времени, или производная полинома по  $t$ ). Интересно отметить, что темп понижения курса украинской гривны за этот период был самым быстрым, а темпы снижения курса доллара, иены и китайского юань примерно совпадали. Евро рос с той же скоростью, что и падал доллар.

## Глава 5. ПРИБЛИЖЕНИЕ «ЭКОНОМИЧЕСКОГО КОРИДОРА» АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

### 5.1. Свойства решения задачи наилучшего приближения «экономического коридора» алгебраическим полиномом

Рассмотрим теперь задачу (4.2).

Амплитудным модулем назовём функцию

$$f(A, k) := \max\{y_{2,k} - p_n(A, t_k); p_n(A, t_k) - y_{1,k}\}, k \in [0: N].$$

Она является непрерывной и выпуклой по  $A$  при каждом фиксированном  $k \in [0: N]$ , но не является дифференцируемой по  $A$  на  $R^{n+1}$ . Таими же свойствами обладает и целевая функция  $\rho(A)$  задачи (4.2). Обозначим через  $\rho^* := \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$  минимальное значение целевой функции задачи (1), а через  $\mathcal{A} := \{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$  – множество решений этой задачи. В случае если

$$y_{1,k} = y_{2,k}, k \in [0: N],$$

задача (4.2) вырождается в задачу (4.1). Простые примеры показывают, что в общем случае задача (4.2) не сводится к задаче (4.1), даже если в качестве приближаемой функции в задаче (4.1) выбрать следующую



$$y_k = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2}, \quad k = [0:N]. \quad (5.1)$$

При  $N \geq n$  задача П. Л. Чебышёва (4.1) имеет единственное решение, а задача (4.2) может иметь бесконечно много решений, причём её множество решений  $\mathcal{R}$  непусто, выпукло и замкнуто, а при  $N \geq n$  оно ещё и ограничено.

Приведём основные результаты исследования задачи (4.2). Начнём со случая  $N \leq n$ . Положим  $m := \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$ .

**ТЕОРЕМА 5.1.** Пусть  $N \leq n$ . Тогда любое решение  $A^*$  задачи (4.2) является решением системы:

$$a_0 + a_1 t_k + \dots + a_n t_k^n = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} + \alpha_k \left( m - \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right), \quad k \in [0:N], \quad (5.2)$$

при некотором наборе параметров  $\alpha_k \in [-1;1]$ ,  $k \in [0:N]$ , и, наоборот, для любого набора параметров  $\alpha_k \in [-1;1]$ ,  $k \in [0:N]$  решение системы (5.2) является решением задачи (4.2).

При этом  $\rho^* = m$ .

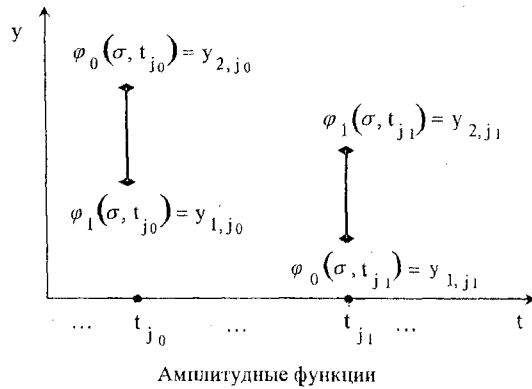
Фактически при  $N \leq n$  процесс решения задачи (4.2) сводится к решению систем (5.2).

Переходим к общему случаю. На каждом базисе  $\sigma$  вида (4.11) определим две функции  $\varphi_0(\cdot)$  и  $\varphi_1(\cdot)$ , положив

$$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = \begin{cases} y_{2,j_k}, & k \text{ — чётно,} \\ y_{1,j_k}, & k \text{ — нечётно,} \end{cases} \quad \varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = \begin{cases} y_{1,j_k}, & k \text{ — чётно,} \\ y_{2,j_k}, & k \text{ — нечётно,} \end{cases}$$

$$t_{j_k} \in \sigma, \quad k \in [0:n+1],$$

и такие функции назовём *амплитудными* (рисунок).



Если в качестве приближаемой функции в задаче П. Л. Чебышёва (2) взять амплитудную функцию, то получим следующие задачи:

$$\rho_i(A, \sigma) := \max_{k \in [0:n+1]} |\varphi_i(\sigma, t_{jk}) - p_n(A, t_{jk})| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad i \in 0:1. \quad (5.3)$$

Задачи (5.3) назовём *амплитудными  $\sigma$ -подзадачами задачи (4.2)*. Положим  $\rho_i^*(\sigma) := \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i(A, \sigma) = \rho_i(A_i(\sigma), \sigma)$ ,  $i \in 0:1$ . Заметим, что для любого базиса  $\sigma$  выполняется неравенство:  $\rho_i^*(\sigma) \leq \rho^*$ ,  $i \in 0:1$ .

**ТЕОРЕМА 5.2** (необходимые и достаточные условия решения). *Для того чтобы вектор  $A^* \in R^{n+1}$  являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий*

- а)  $\rho(A^*) = m$ ;
- б)  $\exists$  базис  $\sigma^* : \rho(A^*) = \rho_i^*(\sigma^*)$  для  $i=0$  или  $i=1$ .

Из теоремы 5.2 и теорем 4.1, 4.2 получаем следующие факты.

1. Из равенства а) вытекает, что алгебраический полином с вектором коэффициентов  $A^*$  «проходит» через середины максимальных по длине отрезков, являющихся образами многозначного отображения.

2. Если выполняется условие б) теоремы 5.2, то вектор  $A^*$  будет решением соответствующей амплитудной  $\sigma$ -подзадачи (5.3).

3. Если выполняется условие б) теоремы 5.2, то

$$\rho_i^*(A^*) = \max_{\sigma \in T, j \in \{0,1\}} \rho_j^*(\sigma).$$

4. Условие б) эквивалентно равенствам:

$$(-1)^{k+i} \rho(A^*) = \varphi_i(\sigma^*, t_{jk}) - p_n(A^*, t_{jk}), \quad \forall k \in [0:n+1], \text{ где } i=0 \text{ или } i=1,$$

которые очень похожи на классический результат П. Л. Чебышёва. Такое явление можно назвать *амплитудным альтернансом*.

**ТЕОРЕМА 5.3** (критерий единственности решения). *Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:*

а) множество  $Z$  вида

$$Z := \left\{ k \in [0:N]: \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^* \right\}$$

содержит не менее чем  $(n+1)$  элемент;

б)  $\exists$  базис  $\sigma^* : \rho^* = \rho_i^*(\sigma^*)$  для  $i=0$  или  $i=1$

(на некотором базисе минимальное значение целевой функции задачи (1) совпадает с минимальным значением целевой функции одной из амплитудных  $\sigma$ -подзадач).

Из условия  $\alpha$ ) вытекает, что полином наилучшего приближения для задачи (4.2) «проходит» через середины максимальных по длине отрезков, являющихся образами многозначного отображения, и таковых не менее чем  $(n+1)$  штук.

Условие  $\beta$ ) теоремы 5.3 совпадает с условием  $\delta$ ) теоремы 5.2, если указано, что вектор  $A^*$  является решением задачи (4.2).

Рассмотрим вопрос о крайних точках множества решений задачи (1), то есть таких элементов  $A^* \in \mathfrak{R}$ , которые нельзя представить в виде  $A^* = \lambda A^1 + (1-\lambda)A^2$ , где  $A^1, A^2 \in \mathfrak{R}$ ,  $A^1 \neq A^2$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

При  $N < n$  множество решений задачи (4.2) не имеет крайних точек. Пусть  $N \geq n$ . В таком случае множество решений  $\mathfrak{R}$  является выпуклым компактом и, следовательно, имеет крайние точки. Если решение задачи (4.2) единственно, то оно само и будет крайней точкой. Более интересен случай, когда решений бесконечно много. Число крайних точек множества решений задачи (4.2) конечно. При этом выпуклый компакт  $\mathfrak{R}$  представляет собой выпуклую оболочку множества своих крайних точек. Фактически  $\mathfrak{R}$  является многогранником, «натянутым» на свои крайние точки. Поэтому для описания множества решений задачи (4.2) достаточно найти все его крайние точки. Следующая теорема служит критерием распознавания крайних точек.

**ТЕОРЕМА 5.4** (Критерий распознавания крайних точек). Пусть решение задачи (4.2) не единственно. Вектор  $A \in \mathbb{R}^{n+1}$  является крайней точкой множества решений задачи (4.2) тогда и только тогда, когда существует выборка  $\Delta$  вида

$$\Delta := \{t_{q_0} < \dots < t_{q_n}\} \subset T \quad (5.4)$$

и числа  $\xi_k \in [0; 1]$ ,  $k \in [0; n]$ , такие, что выполняются равенства

$$\xi_k (p_n(A, t_{q_k}) - y_{1,q_k}) + (1 - \xi_k) (y_{2,q_k} - p_n(A, t_{q_k})) = m \quad \forall k \in [0; n] \quad (5.5)$$

и

$$\max_{k \in [0; N]} f(A, k) = m. \quad (5.6)$$

Система уравнений (5.5), (5.6) позволяет реально отыскать все крайние точки множества решений задачи (4.2).

## 5.2. Алгоритм решения задачи наилучшего приближения «экономического коридора» алгебраическим полиномом

При  $N \leq n$  следует искать решения, пользуясь теоремой 5.1.

Пусть теперь  $N \geq n + 1$ . Обозначим через  $M$  множество вида

$$M := \left\{ k \in [0; N]: \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = m \right\}.$$

Процедура решения задачи (4.2) включает 3 этапа.

1. Если множество  $M$  содержит не менее чем  $(n+1)$  элемент, выбираем произвольно  $(n+1)$  различных индексов  $\{k_0 < k_1 < \dots < k_n\} \subset M$  и решаем относительно  $A \in \mathbb{R}^{n+1}$  линейную систему:

$$p_n(A, t_{k_i}) = \frac{y_{1,k_i} + y_{2,k_i}}{2}, \quad i \in 0:n.$$

Если выполняется равенство (5.6), то вектор  $A$  будет единственным решением задачи (4.2), в силу теоремы 5.3, при этом

$$\rho^* = M \text{ и } Z = M,$$

и процесс решения задачи (4.2) завершается. Иначе переходим ко второму этапу.

2. Пусть  $\Sigma = \{\sigma \subset T\}$  – множество всех базисов сетки  $T$ . Оно конечно и содержит  $C_{N+1}^{n+2}$  элементов. Берём очередной базис  $\sigma$  из множества  $\Sigma$  и решаем две амплитудные  $\sigma$ -подзадачи (5.3), применяя чебышевскую интерполяцию (гл. 4). Если для текущего базиса  $\sigma$  выполняется равенство:

$$\rho(A_i(\sigma)) = \rho_i^*(\sigma) \text{ при } i=0 \text{ или } i=1,$$

то вектор  $A_i(\sigma)$  будет единственным решением задачи (4.2) в силу теорем 5.2, 5.3 и процедура завершается. Если множество  $\Sigma$  исчерпано, а решение задачи (4.2) не найдено в силу теоремы 5.3, задача (4.2) будет иметь бесконечно много решений. Переходим к третьему этапу.

Теперь, пользуясь теоремой 5.4, находим все крайние точки множества решений задачи (4.2), решая конечное число систем (5.5) и проверяя каждый раз равенство (5.6).

Алгоритм существенно упрощается для случая  $N = n+1$ , то есть когда возможен только один базис  $\sigma$ , который совпадает с сеткой  $T$ . Обозначим через  $A_0$  и  $A_1$  решения соответствующих амплитудных  $\sigma$ -подзадач (5.3), опуская аргумент  $\sigma$ , и пусть

$$\alpha = \frac{m - h_0}{2m - h_0 - h_1}, \quad A_\alpha = (1 - \alpha)A_0 + \alpha A_1,$$

$$\begin{cases} h_0 = y_{2,j_k} - p_n(A_0, t_{j_k}), & k - \text{чётно}, \\ h_0 = p_n(A_0, t_{j_k}) - y_{1,j_k}, & k - \text{нечётно}, \\ -h_1 = y_{1,j_k} - p_n(A_1, t_{j_k}), & k - \text{чётно}, \\ -h_1 = p_n(A_1, t_{j_k}) - y_{2,j_k}, & k - \text{нечётно}, \end{cases}$$

$$k \in [0:n+1], \quad |h_i| = \rho_i^* \leq \rho^*, \quad i \in 0:1.$$

**ТЕОРЕМА 5.5.** Пусть  $N = n+1$  и пусть  $A_0 \notin \mathfrak{R}$ ,  $A_1 \notin \mathfrak{R}$ . Тогда вектор  $A_\alpha$  является решением задачи (4.2).

Таким образом, решением задачи (4.2) в случае  $N = n + 1$  будет либо решение одной из амплитудных  $\sigma$ -подзадач (5.3), либо выпуклая комбинация этих решений с параметром  $\alpha$ .

**Пример 5.1.** Пусть узлы дискретной сетки  $T$  обозначают дни торгов финансовым активом, в качестве  $u_{1,k}$  берём минимальную, а в качестве  $u_{2,k}$  – максимальную цену актива по итогам  $k$ -го дня торгов. Решив задачу (4.2), получим линию ценового тренда в виде алгебраического полинома заданной степени. Допустим, в дни торгов 0, 1, ..., 5 наблюдались следующие колебания цены некоторого актива ([минимальная цена; максимальная цена]):

День	0	1	2	3	4	5
Цена, д.е.	[1; 3]	3	2	2	[1; 3]	2

Если строить ценовой тренд в виде прямой линии (полином первой степени) пользуясь математической моделью (4.2), то получим боковой тренд  $p_1(t) \equiv 2$ , что вполне соответствует экономическому представлению. Если, например, строить трендовый полином, пользуясь чебышевской моделью (4.1), взяв при этом в качестве приближаемой дискретной функции средние арифметические цены за каждый день, получаем другое решение  $p_1(t) \equiv 2,5$ .

**Пример 5.2.** Рассмотрим динамику учётной ставки ЦБ РФ в 2000 – 2006 гг.

Динамика ставки рефинансирования ЦБ РФ в 2000 – 2006 гг.

Год (200 )		0	2	3	4	5	6
Диапазон изменений (%)							
	от	25,00	23	18,00	14,00	12,00	12
	до	23,00	18,00	14	12,00	12,00	11,00

Введём дискретную сетку  $T = \{1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6\}$ , и пусть  $[u_{1,k}; u_{2,k}]$  – диапазон изменения ставки в каждом году. Тенденция понижающаяся и зависит от времени по закону  $p = -2,75t + 25,375$ . В таблице выделены узлы и значения, в которых наблюдался амплитудный альтернанс. Подобным образом можно проследить тенденции и за другие периоды, а также провести сравнение с аналогичными тенденциями в иных странах.

## КРАТКИЙ СЛОВАРЬ АНАЛИТИКА РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

Активная операция – операция по размещению средств, в частности, вложение денег в ценные бумаги (в процессе изложения термин «актив» означает «ценная бумага», хотя в бухгалтерском учёте этот термин значительно шире).

Акционерное общество – это коммерческая организация, уставный капитал которой разделён на определённое число акций, удостоверяющих обязательственные права участников общества (акционеров) по отношению к обществу.

Акция – именная ценная бумага, закрепляющая право её владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества (АО) в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом (если это обыкновенная акция) и на часть имущества, остающегося после ликвидации АО. Этот вид ценных бумаг наиболее распространён.

Бар – представление развития цены за определённый торговый период (день, неделю, месяц и т.п.) на гистограмме.

Бык – участник рынка ценных бумаг, ожидающий повышения их курса.

Вексель – документ, содержащий безусловное обязательство векселедателя выплатить векселедержателю определённую сумму денег к определённом моменту (обычно вексель выдаётся в качестве оплаты за поставленный товар).

Деньги – это товар особого рода, являющийся всеобщим эквивалентом.

Депозитный сертификат – это свидетельство банка о приёме денежных средств вкладчика, представляющее собой двустороннее обязательство: вкладчика, не изымать деньги некоторое время, и банка, уплатить через этот срок достаточно высокий процент по вкладу.

Диверсификация – распределение, рассредоточение вложений капитала.

Доджи – это японская свеча, у которой цены открытия и закрытия торгового периода совпадают, либо диапазон между ними очень мал.

Доходность по ценным бумагам – это доход на единицу вложенных средств за единицу времени.

Инвестиционный проект – это план или программа мероприятий, связанных с осуществлением капиталовложений с целью их последующего возмещения и получения прибыли.

Инвестиционный процесс – это поток платежей, в котором инвестиции (капиталовложения) отрицательны, а доходы положительны.

Конъюнктура – текущее соотношение спроса и предложения на рынке.

Котировка ценных бумаг – это определение курса их покупки и продажи на определённый момент времени, то есть определение наивысшей цены, предлагаемой за ценную бумагу покупателем и наименьшей цены, по которой продавец готов её уступить.

Курс ценной бумаги – рыночная цена этой ценной бумаги.

Ликвидность – способность предприятия в полной мере и в установленный срок выполнить свои обязательства.

Лицами, принимающими решение, называются руководители, инвесторы, кредиторы и прочие юридические и физические лица, способные влиять на финансовое состояние предприятия и заинтересованные в этом.

Медведь – участник рынка ценных бумаг, ожидающий понижения их курса.

Облигация – одностороннее обязательство эмитента вернуть через определённый срок номинальную стоимость плюс проценты, это форма займа, не предполагающая движения товара, к которой приходится прибегать государству, органам местной власти и предприятиям при наличии временных финансовых трудностей.

Оборот – это общее количество акций определённого вида, на которые заключены кассовые сделки купли-продажи в течение одной биржевой сессии.

Объём – это общая стоимость заключённых кассовых сделок купли-продажи по одной акции в денежном выражении во время данной биржевой сессии.

Открытый интерес – это сумма всех открытых фьючерсных контрактов на покупку того или иного вида ценных бумаг в каждый момент биржевой сессии.

Окно – это разрыв в ценовом чарте с японскими барами.

Опцион (англ. *option* – выбор) – это ценная бумага, оформленная в виде контракта, дающая владельцу право (но не обязательство) купить или продать определённое количество акций по определённой цене в течение определённого времени или на определённую дату.

Портфель – это набор различных ценных бумаг одного владельца, которые выбраны на основе учёта целей данного инвестора и результатов ФУА.

«Пробой» линии ценового тренда означает, что график развития цен пересёк линию тренда снизу вверх при понижательной тенденции или сверху вниз при повышательной тенденции.

Рынок – это сфера купли/продажи товаров.

Рынок финансовый состоит из трёх частей: рынка ценных бумаг, рынка банковских ссуд и валютного рынка. Рынок ценных бумаг часто называют также фондовым рынком.

Средняя цена акции по итогам торгового периода – это отношение объёма торговли к обороту за этот период.

Товарный warrant (англ. *warrant* – полномочие, правомочие) – свидетельство, выдаваемое товарными складами о приёме товара на хранение, этот документ даёт владельцу право получить заем под залог указанного товара.

Треjder – участник рынка ценных бумаг, осуществляющий их покупку и продажу, в том числе брокер, дилер, инвестор, доверительный управляющий ценными бумагами (англ. *trade* – торговля).

Треjдинг – проведение сделок купли и продажи с ценными бумагами.

Тренд – направление развития цен в виде линии.

Фондовая биржа – это организатор торговли на рынке ценных бумаг, причём участниками торгов на фондовой бирже являются только брокеры, дилеры и управляющие.

Формации разворота (*Reversal Patterns*) – графические фигуры, сигнализирующие о глобальном изменении тренда.

Формации продолжения (*Continuation or Sideways Patterns*) – графические фигуры, появляющиеся внутри долговременных тенденций, после завершения которых ожидается движение цен в том же направлении, которое предшествовало их формированию.

Цена – денежное выражение стоимости.

Ценные бумаги – это особым образом оформленные документы или записи в системе ведения реестра ценных бумаг (при бездокументарной форме), свидетельствующие о правах их владельца на определённое имущество или денежную сумму.

Чарт – графическое представление динамики рыночных цен на фондовой бирже.



#### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Хартфельдер М., Лозовская Е., Хануш Е.* Фундаментальный и технический анализ рынка ценных бумаг. СПб., 2005.
- Колесникова В. И.* Банковское дело. М., 1997.
- Власова В. М.* Основы предпринимательской деятельности. М., 1994.
- Хорн Дж.* Основы управления финансами. М., 1997.
- Общая теория денег и кредита / Под ред. Е. Ф. Жукова. М., 1995.
- Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., 1972.
- Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Дж. В.* Инвестиции. М., 1998.
- Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., 1965.
- Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973.
- Выгодчикова И. Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2001. Вып. 3. С. 25 – 27.
- Выгодчикова И. Ю.* Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2002. Вып. 4. С. 27 – 31.
- Выгодчикова И. Ю.* О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 5. С. 15 – 18.
- Выгодчикова И. Ю.* Процедура решения задачи приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 12-й Саратов. зимней шк. Саратов, 2004. С. 48 – 50.
- Выгодчикова И. Ю.* Применение алгебраических полиномов к моделированию экономических процессов // Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности: Альманах. Саратов, 2006. С. 16 – 21.
- Выгодчикова И. Ю.* О задаче наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом: алгоритм решения: Сб. матер. 25-й конф. мол. учёных. Москва, 31 марта – 5 апреля 2003 г. Москва, 2004. С. 30 – 34.
- О рынке ценных бумаг: Федеральный закон № 39-ФЗ от 22 апреля 1996 г. // Рос. газ. 1996. № 79. 25 апр.
- Об Акционерных обществах: Федеральный закон № 208-ФЗ от 26 декабря 1995 г. // Рос. газ. 1995. № 248. 29 дек.

Процесс аукционных торгов

Заказы на покупку					Цена, евро	Заказы на продажу			
Количество акций, заказанных по данной цене			Общее количество акций, заказанных по данной цене	Количество акций, заказанных по цене, не менее чем		Количество акций, заказанных по цене, не более чем	Общее количество акций, заказанных по данной цене	Количество акций, заказанных по данной цене	
Инвестор1	Инвестор2	Инвестор3						Инвестор1	Инвестор2
200	400		600	600	101				
400			400	1000	100,5	5600	200	200	
300			300	1300	100	5400	1300	700	600
900			900	2200	99,5	4100	1200	800	400
200	100	400	700	2900	99	2900	100	100	
400			400	3300	98,5	2800	400	400	
500	100		600	3900	98	2400	500	300	200
					97,5	1900	500	500	
					97	1400	1400	900	500

По итогам аукциона:

эффективная цена составляет 99 евро,  
 эффективный объем торгов составляет 2 900 акций.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>Глава 1. Характеристика российского рынка ценных бумаг .....</b>	<b>4</b>
1.1. Инвестиционный процесс и его участники .....	4
1.2. Виды ценных бумаг .....	6
1.3. Сделки с ценными бумагами .....	7
1.4. Процесс торговли ценными бумагами. Торги ценными бумагами в рамках биржевой торговой сессии: аукцион и его этапы, определение эффективной цены и эффективного объёма торгов, типы заявок. ....	9
1.5. Клиринг и расчёты по ценным бумагам .....	12
<b>Глава 2. Фундаментальный анализ .....</b>	<b>13</b>
2.1. Выбор портфеля .....	13
2.2. Корпоративный анализ. Финансовые показатели эффективности деятельности предприятия .....	17
2.3. Методы ФУА корпораций .....	26
2.4. Психологический подход к анализу рынка ценных бумаг .....	30
<b>Глава 3. Технический анализ рынка ценных бумаг .....</b>	<b>31</b>
3.1. Постулаты технического анализа .....	31
3.2. Графическая интерпретация ценовых тенденций технического анализа .....	34
3.3. Объёмные показатели торгов .....	44
3.4. Трендовые линии .....	46
3.5. Типовые графические фигуры и формации в техническом анализе рынка ценных бумаг .....	50
3.6. Индикаторы технического анализа .....	58
3.7. Числа Фибоначчи .....	62
<b>Глава 4. Трендовые полиномы и динамика экономических показателей .....</b>	<b>63</b>
4.1. Постановка задачи приближения динамики экономических показателей полиномом. Понятие «экономического коридора». Постановка задачи наилучшего приближения «экономического коридора» полиномом. Экономическая целесообразность решения поставленных задач .....	63
4.2. Разделённые разности и алгебраическая интерполяция. Формула Ньютона .....	66
4.3. Полином наилучшего чебышевского приближения .....	67
4.4. Чебышевская интерполяция .....	67
4.5. Постановка общей дискретной задачи. Алгоритм Вале – Пуссена .....	71
4.6. Преобразование базиса Scheb по алгоритму Вале – Пуссена .....	72
<b>Глава 5. Приближение «экономического коридора» алгебраическим         полиномом .....</b>	<b>76</b>
5.1. Свойства решения задачи наилучшего приближения «экономического коридора» алгебраическим полиномом .....	76
5.2. Алгоритм решения задачи наилучшего приближения «экономического коридора» алгебраическим полиномом .....	79
<b>Краткий словарь аналитика рынка ценных бумаг .....</b>	<b>82</b>
<i>Список рекомендуемой литературы .....</i>	<i>85</i>
<i>Приложение .....</i>	<i>86</i>

Учебное издание

*Выгодчикова Ирина Юрьевна*

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИНАМИКИ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО И ТЕХНИЧЕСКОГО  
АНАЛИЗА РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Учебное пособие

для студентов экономико-математических специальностей

Корректор Е. Б. Крылова  
Технический редактор Л. В. Агальцова  
Оригинал-макет подготовлен О. Л. Багаевой

---

Подписано в печать 21.12.2006. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 5,11(5,5). Уч.-изд. л. 5,7. Тираж 300 экз. Заказ 4.

---

Издательство Саратовского университета.  
410012, Саратов, Астраханская, 83.  
Типография Издательства Саратовского университета.  
410012, Саратов, Астраханская, 83.